

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

## **ТЕОРИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Электронный учебно-методический комплекс  
по дисциплине в LMS Moodle

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование  
образовательной деятельности» Программы развития СГАУ  
на 2009-2018 годы по проекту «Разработка магистерской программы «Программное обеспечение мобильных  
устройств» по направлению 230100.68 «Информатика и вычислительная техника»  
Соглашение №1/12 от 3.06.2013 г.

САМАРА  
2013

УДК 519.216.2(075)  
Т338

Автор-составитель: **Куликовских Илона Марковна**

**Теория цифровой обработки сигналов и изображений** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс по дисциплине в LMS Moodle / Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. И. М. Куликовских. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав учебно-методического комплекса входят:

1. Курс лекций.
2. Методические указания для практических занятий.
3. Вопросы к экзамену.
4. Рабочая программа.

УМКД «Теория цифровой обработки сигналов и изображений» предназначен для студентов факультета информатики, обучающихся по направлению подготовки магистров 230100.68 «Информатика и вычислительная техника» в 9 семестре.

УМКД разработан на кафедре информационных систем и технологий.

© Самарский государственный  
аэрокосмический университет, 2013

# **ТЕОРИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Конспект лекций

2013

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Тема №1.</b> Сигналы и их характеристики. Определение и классификация сигналов. Случайные и детерминированные сигналы. Дискретизация сигналов.	3
<b>Тема №2.</b> Методы представления и преобразования сигналов. Математическое описание сигналов. Динамическое представление сигналов, свертки. Интерполяция, аппроксимация и экстраполяция. Матричное, полиномиальное и $Z$ - представление сигналов.	9
<b>Тема №3.</b> Спектральное представление сигналов. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье. Системы базисных функций. Автокорреляционная функция и энергетический спектр. Свойства спектров мультипликативных базисов.	30
<b>Тема №4.</b> Преобразование Фурье в классических базисах. Системы дельта-функций, единичных функций и функций Котельникова. Тригонометрические системы базисных функций. Системы комплексных экспоненциальных и полиномиальных базисных функций. Преобразования Хартли, Уолша и Хаара.	49
<b>Тема №5.</b> Ортогональные преобразования в обобщенных базисах. Функции и преобразования Виленкина-Крестенсона. Обобщенные функции Крестенсона, Хаара. Теоретико-числовые преобразования. Системы дискретных базисных функций на основе чисел Фибоначчи. Обобщенные преобразования Фурье.	64
<b>Тема №6.</b> Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Вычислительная сложность алгоритма. Быстрые алгоритмы вычисления частного спектра, преобразований Уолша, Виленкина-Крестенсона, Хаара. Матричные методы синтеза быстрых преобразований.	82
<b>Тема №7.</b> Цифровые фильтры и их характеристики. Описание цифровых фильтров. Передаточные функции цифровых фильтров и формы их реализации. Частотные и импульсные характеристики фильтров. Классификация фильтров.	98
<b>Тема №8.</b> Методы расчета нерекурсивных и рекурсивных фильтров. Классификация нерекурсивных цифровых фильтров по виду импульсной характеристики. Частотные характеристики нерекурсивных фильтров с симметричной и антисимметричной импульсной характеристикой. Этапы проектирования нерекурсивных фильтров. Оптимизационные и неоптимизационные методы расчета частотных фильтров. Методы расчета рекурсивных цифровых фильтров.	111
<b>Тема №9.</b> Методы аналитического синтеза цифровых фильтров. Синтез оптимальных фильтров. Адаптивные полиномиальные фильтры. Синтез квазиоптимальных полиномиальных фильтров.	129
<b>Тема №10.</b> Спектральные методы синтеза цифровых фильтров. Основы спектральной теории цифровых фильтров. Синтез цифровых фильтров в спектральной области.	149
<b>Тема №11.</b> Понятие непрерывного wavelet-преобразования. Материнские wavelet-ы. Локализирующие свойства и интерпретация, свойства CWT. Дискретизация непрерывного wavelet-а. Применение непрерывного wavelet-преобразования.	165
<b>Тема №12.</b> Дискретное wavelet-преобразование. Матричное описание и свойства DWT. Применение дискретного wavelet-преобразования. Адаптивные ортогональные преобразования.	175
<b>Тема №13.</b> Математическое описание непрерывных изображений. Представление непрерывных изображений, системы преобразования непрерывных преобразований. Детерминированное и вероятностное описание непрерывных изображений. Дискретизация и квантование изображений.	184
<b>Тема №14.</b> Математическое описание дискретных изображений. Векторное представление и линейные преобразования дискретных изображений. Вероятностное описание дискретных изображений.	189
<b>Тема №15.</b> Повышение качества изображения. Линейная фильтрация изображений. Совмещение изображений и линейный прогноз. Математическая морфология и обработка изображений.	203



## ТЕМА №1. Сигналы и их характеристики. Определение и классификация сигналов. Случайные и детерминированные сигналы. Дискретизация сигналов.

Под *сигналом* в общем случае понимается физический процесс, являющийся средством переноса информации во времени и пространстве. Сигналы описываются математическими моделями, отражающими общие свойства различных по физической природе сигналов. Наиболее распространенной моделью сигналов является их представление в виде математических функций некоторых физических аргументов. В зависимости от числа аргументов сигналы делятся на *многомерные* (при числе аргументов не менее двух) и *одномерные* (с одним аргументом). В данной книге рассматриваются преимущественно одномерные сигналы.

Обобщенно одномерный сигнал представляется в виде  $x(t)$ , где  $x$  – обозначение функции изменения сигнала, а  $t$  – его аргумент. Кроме  $x$  и  $t$  для обозначения сигнала могут быть использованы и другие буквы латинского алфавита. Если  $t$  – время, то  $x(t)$  – обозначение временного сигнала. Время является естественным аргументом многих физических процессов, поэтому временные сигналы являются одними из распространенных на практике. Кроме аргумента  $t$  функция  $x(t)$  может зависеть еще и от некоторых параметров  $p_1, p_2, \dots$ , которые, не меняя размерности сигнала, влияют на характер его изменения. В этом случае может быть использована следующая общая запись сигнала:  $x(t, p_1, p_2, \dots)$ . Такими параметрами являются, например, амплитуда сигнала, его частота и фаза. Параметры сигнала могут быть неизменными во времени или меняться с течением времени, могут быть детерминированными и случайными.

Сигналы задаются на определенном интервале изменения аргумента. Для реальных сигналов этот интервал всегда конечен, т.е.  $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ , где  $t_{\min}$  и  $t_{\max}$  – соответственно нижняя и верхняя границы интервала, так как обработка сигналов на практике не может выполняться бесконечно долго. Сигнал, имеющий начало во времени, называется *каузальным*. Если вне конечного интервала сигнал принимается равным нулю, то он называется ещё и *финитным*. Реальные сигналы всегда являются каузальными и финитными. Сигнал считается *периодическим*, если любые его значения повторяются через интервал, равный периоду. Наряду с ограниченными во времени сигналами в теории сигналов широко используются также сигналы с полубесконечными и бесконечными интервалами определения.

Реальные сигналы  $x(t)$  на интервале определения принимают всегда действительные значения, поэтому каждый такой сигнал в отдельности рассматривается как *действительный*. Наряду с ними используется и более сложная математическая модель, в которой два действительных сигнала  $x(t)$  и  $y(t)$  объединяются в один:

$$z(t) = x(t) + jy(t), \quad (1.1)$$

который называется *комплексным*. При этом сигнал  $x(t)$  определяет действительную часть комплексного сигнала  $z(t)$ , т.е.  $Re [z(t)] = x(t)$ , сигнал  $y(t)$  – его мнимую часть:  $Im [z(t)] = y(t)$ , а  $j$  есть мнимая единица, равная  $\sqrt{-1}$ . Комплексный сигнал может быть записан еще и так:

$$z(t) = |z(t)| e^{j\psi(t)} = |z(t)| \cos(\psi(t)) + j |z(t)| \sin(\psi(t)), \quad (1.2)$$

где  $|z(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$  – *огибающая* сигнала, а  $\psi(t) = \arctg(y(t)/x(t))$  – *фаза* сигнала. Каждому комплексному сигналу соответствует комплексно-сопряженный к нему сигнал

$$z^*(t) = x(t) - jy(t).$$

Следует иметь в виду, что в реальной жизни комплексных сигналов не существует. Это только удобная форма представления двух действительных сигналов в виде единого математического объекта, над которым можно производить математические операции по известным правилам. Комплексные сигналы могут оказаться весьма полезными в многоканальных системах обработки.

Простейшими комплексными сигналами являются *комплексные экспоненциальные сигналы*, для которых огибающая имеет постоянное значение, равное амплитуде  $A$ , а фаза – линейная функция:  $\psi(t) = \omega t$ . Такие сигналы имеют вид

$$z(t) = A e^{j\omega t} = x(t) + jy(t), \quad (1.3)$$

где  $x(t) = A \cos(\omega t)$ ,  $y(t) = A \sin(\omega t)$ . Величина  $\omega$  в (1.3) носит название *круговой частоты* и связана с *линейной частотой*  $f$  известным соотношением  $f = \omega / 2\pi$ . Комплексный экспоненциальный сигнал является периодическим с периодом  $2\pi / \omega = 1 / f$ .

Как и любое комплексное число, комплексный сигнал в любой момент времени можно представить в виде вектора на плоскости  $[1, j]$ . При этом длина вектора (его модуль) совпадает с огибающей сигнала, а угол его наклона к действительной оси (оси абсцисс) равен фазе сигнала (рис. 1.1).

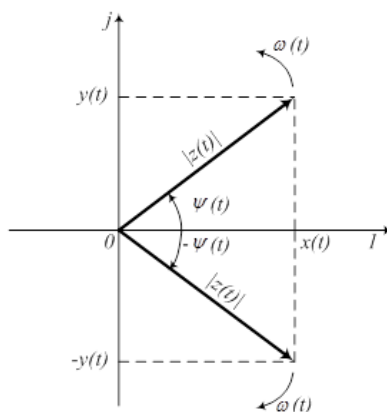


Рис. 1.1. Интерпретация комплексных сигналов

Проекции этого вектора на оси абсцисс и ординат определяют соответственно действительную и мнимую составляющие комплексного сигнала.

При изменении времени вектор сигнала будет вращаться на плоскости против часовой стрелки с изменяющимися угловой скоростью и модулем. Комплексно-сопряженный сигнал также представляется вектором на этой плоскости и расположен симметрично относительно оси абсцисс. При изменении времени он будет вращаться по часовой стрелке.

Комплексные экспоненциальные сигналы представляются векторами постоянной длины, равной амплитуде сигнала, и вращаются на плоскости с постоянной угловой скоростью, численно равной круговой частоте  $\omega$  (рис. 1.2). Число оборотов вращения таких векторов в единицу времени (за секунду) совпадает с линейной частотой сигнала. Действительные и мнимые составляющие экспоненциального сигнала являются периодическими функциями и число их периодов в единицу времени будет также однозначно связано с частотой сигнала.

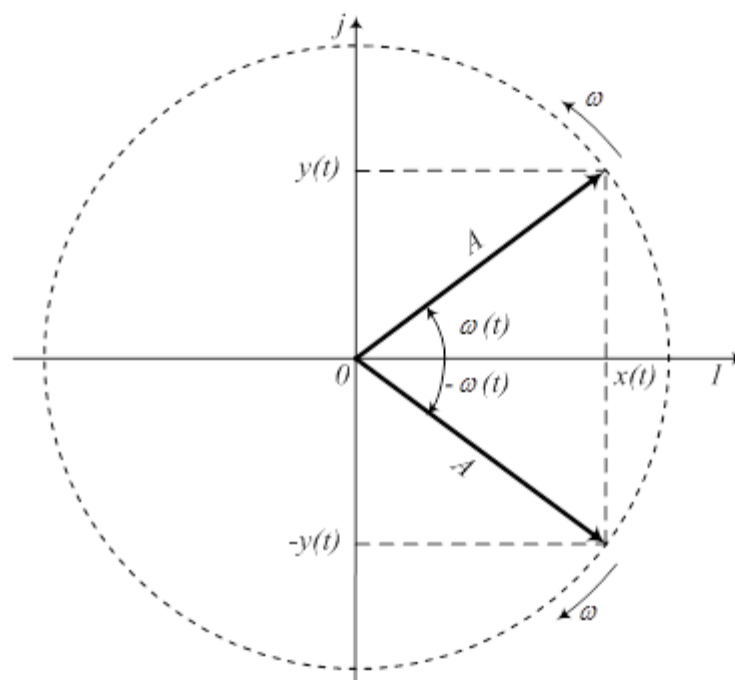


Рис. 1.2. Геометрическая интерпретация комплексных экспоненциальных сигналов

Таким образом, для комплексных экспоненциальных сигналов возможны две эквивалентные трактовки частоты: 1) в виде скорости изменения фазы (числа оборотов за единицу времени) и 2) в виде числа периодов изменения его мнимой и действительной составляющих за ту же единицу времени.

По характеру изменения сигналы делятся на детерминированные и случайные. По своему смысловому определению детерминированные сигналы должны означать полностью известные сигналы на всем интервале их

определения. Однако такие сигналы не несут новой информации и находят применение только в контроле и диагностике ЭВМ и систем обработки. Реальные сигналы всегда являются в какой-то мере неопределенными. Поэтому в дальнейшем при обработке сигналов под *детерминированными* сигналами понимаются такие, для которых известны законы их изменения во времени, но параметры, являясь также детерминированными, заранее могут быть неизвестными. Определение этих параметров и составляет существо ряда задач обработки сигналов.

Под *случайными* сигналами в общем случае понимаются такие, для которых ни функции их изменения, ни параметры не известны, а известны только их статистические характеристики. Их математической моделью являются случайные функции. Примером этих сигналов могут служить различного рода помехи и шумы, возникающие в системах измерения и передачи сигналов. Наряду с такими сигналами в теории обработки используются и *псевдослучайные* сигналы, которые описываются детерминированными функциями времени со случайными параметрами.

И детерминированные, и случайные сигналы в свою очередь могут быть непрерывными и дискретными. *Непрерывным* считается сигнал, определенный в любой точке интервала определения его аргумента. Такой сигнал задан на *несчетном множестве* временных точек (их нельзя пронумеровать). На рис. 1.3 приведены графики изменения непрерывных сигналов на двустороннем интервале  $[t_{min}, t_{max}]$ , причем к непрерывному относится и кусочно-непрерывный сигнал рис. 1.3б, функция изменения которого имеет разрывы первого рода. В этом случае пользуются более полным и математически строгим понятием *континуального* сигнала.

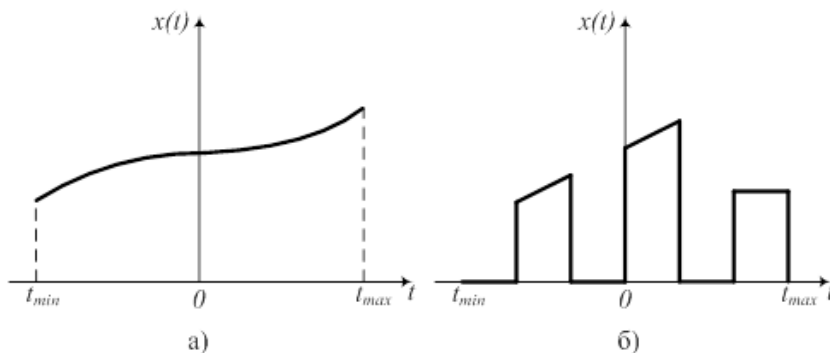


Рис. 1.3. Графики изменения непрерывных сигналов

Непрерывный сигнал называют еще *аналоговым*, подчеркивая тем самым, что он аналогичен отображаемому процессу. Кроме того, физически такой сигнал воспроизводится обычно с помощью элементов аналоговой техники.

Любой непрерывный сигнал  $x(t)$  можно представить в виде суммы четной ( $x_q(t)$ ) и нечетной ( $x_n(t)$ ) частей

$$x(t) = x_q(t) + x_n(t), \quad (1.4)$$

которые для сигналов с двусторонним интервалом определения находятся по формулам:

$$\begin{aligned}x_q(t) &= [x(t) + x(-t)]/2, \\x_n(t) &= [x(t) - x(-t)]/2.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Здесь  $x(-t)$  – сигнал, получаемый зеркальным отражением сигнала  $x(t)$  относительно оси ординат.

*Дискретным* называется сигнал, заданный только для фиксированных значений аргумента, т.е. заданный на *счетном множестве* точек. Между этими значениями сигнал не определен. Такой сигнал можно рассматривать либо как функцию  $x(t_i)$  временного момента  $t_i = i\Delta t$ , где  $\Delta t$  определяет расстояние между двумя соседними временными точками, либо как функцию  $x(i)$  номера временного момента  $i$ . Значения, которые принимает дискретный сигнал, называют еще *отсчетами*. Если отсчеты располагаются на равном расстоянии друг от друга, то  $\Delta t$  постоянно и дискретный сигнал называется *решетчатым*. Номер отсчета  $i$  принимает значение натурального ряда чисел, причем в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  для сигналов с бесконечным дискретным интервалом определения, либо в пределах от  $N_{\min}$  до  $(N_{\max} - 1)$  для финитных дискретных сигналов, где  $N_{\min}$  и  $N_{\max}$  определяют соответственно нижнюю и верхнюю границу конечного интервала определения. Обычно бывает полезным приведение финитных сигналов путём перенумерации отсчетов к интервалу  $[0, N)$ , где  $N = N_{\max} - N_{\min}$ . На рис. 1.4. приведен решетчатый дискретный сигнал на одностороннем интервале  $[0, N)$ .

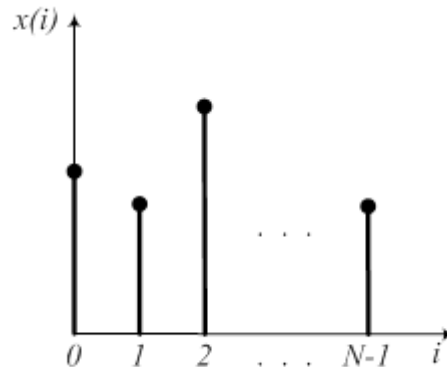


Рис. 1.4. Дискретный сигнал

На практике дискретные сигналы получают преимущественно из непрерывных. Процедура извлечения отсчетов дискретного сигнала из непрерывного называется *дискретизацией по времени*. Величину  $\Delta t$  в этом случае называют *интервалом (шагом) дискретизации*. Если  $\Delta t$  постоянно, дискретизацию считают *равномерной*. Её результатом является решетчатый сигнал. Равномерная дискретизация наиболее просто реализуется практически.

Полученные отсчёты дискретного сигнала  $x(i)$  для последующей обработки в ЭВМ квантуются по уровню, в результате чего получается *цифровой* сигнал. Поскольку квантование по уровню является нелинейной процедурой, то в общем случае результаты операций над дискретными сигналами не будут совпадать с результатами тех же операций над цифровыми

сигналами. Расхождение результатов уменьшается с увеличением разрядности представления отсчетов цифрового сигнала.

Каждому дискретному сигналу могут соответствовать сколь угодно много непрерывных, совпадающих с ним в отсчетах, что говорит о многозначности задачи восстановления непрерывных сигналов по дискретным отсчетам. Такие непрерывные сигналы называются *огибающими* для дискретного сигнала. Простейшей огибающей является ступенчатый сигнал. Дискретные сигналы так же могут быть представлены в виде сумм либо четной и нечетной частей, либо постоянной и переменной составляющих.

**ТЕМА №2.** Методы представления и преобразования сигналов. Математическое описание сигналов. Динамическое представление сигналов, свертки. Интерполяция, аппроксимация и экстраполяция. Матричное, полиномиальное и Z - представление сигналов.

При разработке алгоритмов обработки обычно требуется не просто обозначение сигнала, а его аналитическое описание. Форм аналитического представления сигналов, использующих различные *математические модели* сигналов, широкое множество. Выбор конкретной модели определяется особенностями решаемой задачи обработки. Основным требованием к модели является её адекватность самому сигналу и условиям решаемых задач. Если модель дает приближенное описание сигнала, то учитывается также точность такого описания.

Совокупность форм аналитического описания сигналов, основанная на использовании различных функций времени, получила название представления сигналов во *временной области*. Некоторые из таких форм будут рассмотрены далее в этой главе. Наряду с ними широко применяются и модели, использующие другие области представления сигналов.

Математическими моделями взаимосвязанных сигналов являются функциональные преобразования (или просто преобразования) сигналов. *Функциональное преобразование* определяет характер функциональной связи двух или нескольких сигналов. В общей форме оно может быть выражено следующей формулой:

$$Y = F[X],$$

где функциональный оператор  $F$  обозначает закон, согласно которому любой совокупности сигналов  $X$  может быть поставлена в соответствии определенная совокупность сигналов  $Y$ . В частном случае совокупности сигналов  $X$  и  $Y$  могут содержать по одному сигналу. Оператор  $F$  можно рассматривать также в качестве описания алгоритма преобразования сигналов  $X$  в сигналы  $Y$ .

Если оператор  $F$  удовлетворяет *условиям линейности*, то преобразование является *линейным*, в противном случае оно относится к классу *нелинейных* преобразований. Условий линейности два:

а) аддитивность

$$F[x_1(t) + x_2(t)] = F[x_1(t)] + F[x_2(t)],$$

б) однородность

$$F[\lambda x(t)] = \lambda F[x(t)],$$

где  $\lambda$  – произвольное число. В том случае, если  $\lambda$  – целое число, второе условие по смыслу совпадает с первым, так как

$$\lambda x(t) = \sum_{i=1}^{\lambda} x(t).$$

Оба условия линейности можно объединить в одно равенством:

$$F[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1 F[x_1(t)] + \lambda_2 F[x_2(t)].$$

Линейными операторами являются умножение на постоянное число, дифференцирование, суммирование и интегрирование:

$$y(t) = \lambda x(t), \quad y(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + \lambda_2 \frac{dx_2(t)}{dt},$$

$$\int [\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] dt = \lambda_1 \int x_1(t) dt + \lambda_2 \int x_2(t) dt.$$

В тоже время, например, операции логарифмирования и возведения в степень не обладают свойством линейности, так как

$$\ln[x_1(t) + x_2(t)] \neq \ln x_1(t) + \ln x_2(t),$$

$$[x_1(t) + x_2(t)]^2 \neq x_1^2(t) + x_2^2(t).$$

Нелинейной является, как уже отмечалось ранее, и операция квантования непрерывного сигнала по уровню.

Линейные операторы находят широкое применение при решении различных задач, в том числе и задач обработки сигналов. Объясняется это по меньшей мере тремя причинами. Во-первых, многие фундаментальные законы физики являются линейными. Во-вторых, многие задачи могут в первом приближении рассматриваться как линейные. Наконец, последняя и, по-видимому, главная причина распространения линейных задач заключается в сравнительной простоте и доступности методов их решения.

Число реально используемых линейных функциональных операторов ограничено. Поэтому не удивительно, что многие алгоритмы обработки сигналов содержат одни и те же операторы интегрирования и суммирования. Примерами линейных преобразований могут служить уже встречавшиеся ранее аналитические зависимости для вычисления автокорреляционных и взаимокорреляционных функций непрерывных и дискретных сигналов.

Линейные преобразования не следует путать с *линейной зависимостью* сигналов, которая образуется с помощью простейших линейных операций – умножения на постоянное число и суммирования:

$$x(t) = X(0)\varphi_0(t) + X(1)\varphi_1(t) + \dots + X(r)\varphi_r(t) = \sum_{k=0}^r X(k)\varphi_k(t). \quad (2.1)$$

Эта сумма носит название *линейной комбинации*. Таким образом, сигнал  $x(t)$  линейно зависит от сигналов  $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$ , если он может быть представлен в виде линейной комбинации этих сигналов. Величины  $X(k)$  являются здесь константами. В простейшем случае мы имеем линейную зависимость двух сигналов  $x(t) = X\varphi(t)$ . Здесь  $X$  – постоянное число.

Перенеся  $x(t)$  в правую часть равенства (2.1) и изменив обозначения постоянных коэффициентов, получим новую линейную комбинацию, которая показывает равноправность всех сигналов, входящих в нее:

$$Ax(t) + A(0)\varphi_0(t) + A(1)\varphi_1(t) + \dots + A(r)\varphi_r(t) = 0. \quad (2.2)$$



Следовательно, можно говорить, что любой из заданных сигналов связан с другими линейной зависимостью. Однако это будет справедливо лишь в том случае, если во всех точках заданного интервала изменения времени линейная комбинация (2.2) не является тривиальной, т.е. хотя бы два коэффициента из ряда  $A, A(0), A(1), \dots, A(r)$  не равны нулю. В противном случае, когда равенство (2.2) удовлетворяется только при  $A=A(0)=A(1)=\dots=A(r)=0$ , сигналы  $x(t), \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$  являются *линейно независимыми*.

Примером линейно зависимых сигналов могут служить:

$$\begin{aligned}x(t) &= 4\sin \omega t, \\ \varphi_0(t) &= 2\sin \omega t + \cos \omega t, \\ \varphi_1(t) &= \cos \omega t.\end{aligned}$$

Из этих сигналов можно составить нетривиальную линейную комбинацию:

$$x(t) - 2\varphi_0(t) + 2\varphi_1(t) = 0.$$

Отсюда может быть найдена линейная зависимость сигнала  $x(t)$  от  $\varphi_0(t)$  и  $\varphi_1(t)$ :

$$x(t) = 2\varphi_0(t) - 2\varphi_1(t).$$

Простейшими примерами линейно независимых сигналов могут служить сигналы  $t$  и  $t^2$ ,  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ . Действительно, в каждой паре один сигнал не может быть получен из другого умножением на постоянное вещественное число или, что то же самое, равенства

$$\begin{aligned}A(1)t + A(2)t^2 &= 0, \\ A(1)\sin \omega t + A(2)\cos \omega t &= 0\end{aligned}$$

могут выполняться только при  $A(1) = A(2) = 0$ .

Покажем, что всякие ортогональные сигналы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  всегда являются линейно независимыми. Для этого сначала допустим, что это не так и существует линейная зависимость  $x_2(t) = Ax_1(t)$ . Посмотрим, при каком условии эти сигналы могут быть ортогональными.

Умножим обе части равенства на  $x_1(t)$  и проинтегрируем их в пределах интервала  $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ , на котором заданы эти два сигнала,

$$\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x_1(t)x_2(t)dt = A \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x_1^2(t)dt.$$

При ортогональности сигналов левая часть этого выражения должна равняться нулю. Так как интеграл от положительной функции  $x_1^2(t)$  может быть равен нулю только, если функция равна нулю, то получим условие ортогональности

$$x_1(t) = 0.$$

Таким образом, наше предположение неверно и ортогональные сигналы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  должны быть линейно независимыми.

Может показаться, что если какой-нибудь сигнал  $y(t)$  получен из другого сигнала  $x(t)$  в результате линейного преобразования, то эти сигналы находятся в

линейной зависимости. Но это не так: линейное преобразование не обязательно устанавливает линейную зависимость между образом и прообразом.

В качестве примера рассмотрим линейное преобразование, заключающееся в том, что сигнал задерживается на время  $\tau$ :

$$y(t) = x(t - \tau).$$

Пусть такому преобразованию подвергается импульсный сигнал длительностью  $\tau_u < \tau$  (рис. 2.1).

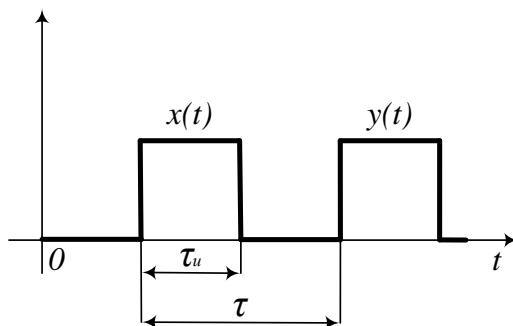


Рис. 2.1. Задержка сигнала по времени

Сигналы  $y(t)$  и  $x(t)$  в этом случае не перекрываются во времени, следовательно, они ортогональны и линейно независимы.

Рассмотрим задержку другого сигнала  $x(t) = \cos \omega t$ , где  $\omega = 2\pi/T$ , на время  $\tau = T/4$ :

$$y(t) = \cos \omega \left( t - \frac{T}{4} \right) = \sin \omega t.$$

Здесь линейное преобразование в виде задержки также создало ортогональный, а стало быть, и линейно независимый сигнал по отношению к сигналу  $x(t)$ . Изменим время задержки и пусть оно будет равно  $\tau = T/2$ . Тогда

$$y(t) = \cos \omega \left( t - \frac{T}{2} \right) = -\cos \omega t.$$

Теперь  $x(t)$  и  $y(t)$  — линейно зависимы (и даже когерентны). Следовательно, линейную зависимость сигналов не следует связывать с линейными преобразованиями.

Линейная независимость сигналов широко используется при аналитическом описании сигналов. В частности, она лежит в основе интерполирующих и аппроксимирующих многочленов, применяющихся при представлении непрерывных и дискретных сигналов.

Наиболее простой и известной формой аналитического описания сигналов во временной области является их представление с помощью одной какой-нибудь функции на интервале определения, например,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$  и т.п. Однако такой способ не всегда возможен на практике.

Более сложным является описание сигнала в виде суммы некоторых элементарных функций, «включаемых» в нужные моменты времени. Такое описание получило название *динамического* представления и возможно на

основе двух видов элементарных разрывных функций: функций единичного скачка и дельта-функций. Рассмотрим эти функции.

Функция единичного скачка  $\sigma(t)$  является разрывной функцией, в точке  $t = 0$  скачком меняющей значение от 0 до +1. В нулевой точке для определенности функцию считают либо непрерывной справа, либо принимают равной полусумме её значений слева и справа от точки разрыва, т.е. принимают равной  $1/2$ . Мы будем использовать чаще всего первый вариант, поэтому

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Эту функцию называют еще функцией *включения*. Такое название объясняется тем, что умножение  $\sigma(t)$  на какой-либо сигнал равносильно включению этого сигнала в момент времени  $t = 0$ . Функцию единичного скачка можно сдвигать по оси времени:  $\sigma(t - \tau)$ . Умножение сигнала на сдвинутую функцию  $\sigma(t - \tau)$  эквивалентно его включению в момент времени  $t = \tau$ .

С помощью функций единичного скачка достаточно просто описываются импульсные сигналы. Так, например, сигнал, имеющий вид прямоугольного импульса

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

где  $x_0$  – амплитуда импульса, можно записать следующим образом:

$$x(t) = x_0 [\sigma(t - t_1) - \sigma(t - t_2)]. \quad (2.4)$$

Процесс образования сигнала  $x(t)$  из двух сдвинутых функций единичного скачка изображен на рис. 2.2.

Дельта-функция  $\delta(t)$  представляет собой импульс бесконечно малой длительности, имеющий в точке  $t=0$  бесконечно большую амплитуду и площадь, равную единице:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ и } t > 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

В теории обработки сигналов определение  $\delta(t)$  обычно дополняют еще двумя условиями, которые не противоречат её классическому определению, используемому в математике. Этими условиями являются:

а) четность:  $\delta(t) = \delta(-t)$ ,

б) единичная средняя мощность на бесконечном интервале времени:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta^2(t) dt = 1.$$

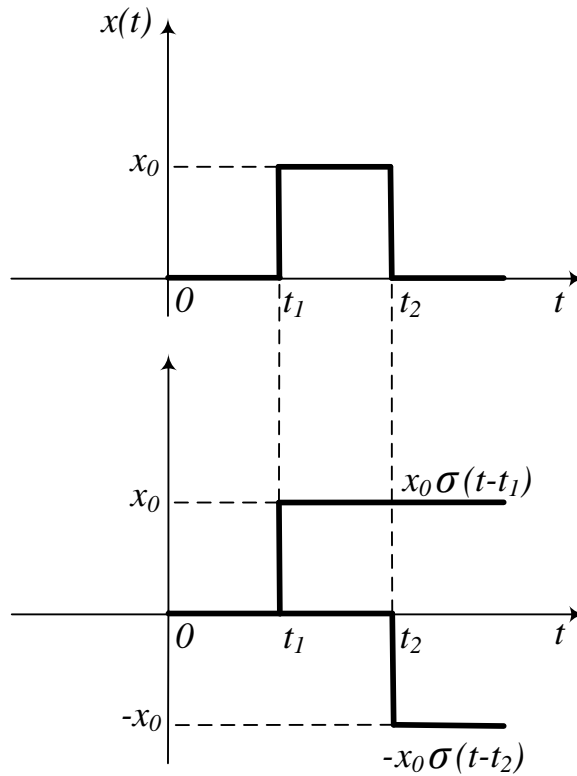


Рис. 2.2. Образование импульсного сигнала  
из двух функций единичного скачка

Дельта-функция – это производная от функции единичного скачка, т.е.  $\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$ . Поэтому, если считать функцию  $\sigma(t)$  выражением некоторого сигнала, то дельта-функция  $\delta(t)$  является характеристикой скорости изменения этого сигнала. Из-за такого различия в природе  $\sigma(t)$  и  $\delta(t)$  они имеют и различные размерности: если, например,  $\sigma(t)$  является безразмерной, то  $\delta(t)$  будет иметь размерность 1/с. Однако при представлении сигналов широко используют и безразмерную дельта-функцию, хотя, строго говоря, это будет уже другая разрывная функция, по форме совпадающая с дельта-функцией.

Дельта-функцию также можно сдвигать по оси времени на произвольный интервал  $\tau$ :  $\delta(t-\tau)$ . В этом случае особенности функции будут проявляться не в нулевой момент времени, а в момент времени  $t=\tau$ .

На бесконечном интервале времени мощность дельта-функции считается конечной величиной. В то же время на этом интервале, как и на любом другом, она имеет бесконечную энергию. Две дельта-функции, сдвинутые на разные интервалы времени, всегда ортогональны:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t-\tau_1) \delta(t-\tau_2) dt = \begin{cases} 0, & \tau_1 \neq \tau_2, \\ 1, & \tau_1 = \tau_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Дельта-функция является каузальным сигналом, так как для нее  $\delta(t)=0$  при  $t < 0$ .

Остановимся теперь на динамическом представлении сигналов. Рассмотрим произвольный сигнал  $x(t)$ , определенный на полубесконечном интервале  $[0, \infty)$ . Заменим этот сигнал его ступенчатой огибающей  $x(i\Delta t)$  с шагом  $\Delta t$ . Её в свою очередь можно рассматривать как совокупность бесконечного числа соприкасающихся прямоугольных импульсов одинаковой длительности  $\Delta t$  и с амплитудами  $x(i\Delta t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Каждый  $i$ -й такой импульс в соответствии с (2.4) можно выразить через сдвинутые функции единичного скачка

$$x(i\Delta t)[\sigma(t-i\Delta t) - \sigma(t-(i+1)\Delta t)].$$

Тогда сигнал  $x(t)$  можно приближенно записать в виде бесконечной суммы:

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^{\infty} x(i\Delta t)[\sigma(t-i\Delta t) - \sigma(t-(i+1)\Delta t)]. \quad (2.7)$$

Произведем перестановку слагаемых в выражении (2.7) и преобразуем его к следующему виду

$$x(t) \approx x(0)\sigma(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [x(i\Delta t) - x((i-1)\Delta t)]\sigma(t-i\Delta t),$$

а теперь каждое слагаемое бесконечной суммы в последнем выражении умножим и поделим на величину  $i\Delta t$ . После этого устремим шаг  $\Delta t$  к 0. При этом  $i\Delta t$  будет стремиться к дифференциалу  $d\tau$ , отношение  $[x(i\Delta t) - x((i-1)\Delta t)]/i\Delta t$  — к производной  $dx(\tau)/d\tau$ , а бесконечная сумма — к интегралу. В результате будет получено такое описание непрерывного сигнала

$$x(t) = x(0)\sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} \sigma(t-\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Это и есть динамическое представление сигнала на основе функций единичного скачка. Для его использования необходимо знание производной сигнала.

Вновь вернемся к бесконечной сумме (2.7). Не меняя порядка следования слагаемых в сумме, сразу умножим и разделим каждое из них на величину  $i\Delta t$ . Затем опять устремим  $\Delta t$  к 0. В результате предельного перехода получим

$$x(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) \frac{d\sigma(t-\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Учитывая, что производная от функции единичного скачка есть дельта-функция, приходим к динамическому представлению сигнала на основе дельта-функций:

$$x(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau. \quad (2.9)$$

Аналогичную запись можно получить и для сигнала с двухсторонним бесконечным интервалом определения, а также для сигналов с конечными интервалами определения  $[t_{\min}, t_{\max}]$ .

Динамическое представление на основе дельта-функций является интегральным представлением непрерывного сигнала через сам сигнал, через

его отдельные мгновенные значения. Действительно, для  $\tau = t$  из (2.9) получаем

$$x(t) = x(t) \int_0^{\infty} \delta(t-t) dt = x(t) \int_0^{\infty} \delta(0) dt = x(t).$$

Следует иметь в виду, что  $\delta(0)$  здесь не обозначает значение  $\delta(t)$  при  $t = 0$ , а обозначает перемещающуюся по оси времени («скользящую») дельта-функцию, у которой разрыв происходит в текущий момент времени  $t$ . Левее и правее этого момента  $\delta(0)$  везде равна нулю. Поэтому интеграл  $\int_0^{\infty} \delta(0) dt$ , соответствующий площади дельта-функции, равен единице и значения сигналов совпадают. В этом проявляется *избирательное* свойство дельта-функции.

Динамическое представление можно применить и к дискретным сигналам. Для этого необходимо определить дискретную элементарную функцию, которая служила бы аналогом дельта-функции. Такой функцией является единичная дискретная функция

$$\delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0, \\ 0 & \text{при } i \neq 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

При её использовании решетчатый сигнал  $x(i)$  на полубесконечном дискретном интервале  $[0, \infty)$  представляется следующим образом:

$$x(i) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \delta(i-k). \quad (2.11)$$

Единичная дискретная функция также обладает избирательным свойством. Для финитных дискретных сигналов верхний предел суммирования в (2.11) будет конечным.

Можно получить еще одну форму динамического представления сигнала, использующую обе разрывные функции. Для этого разобьем заданный сигнал  $x(t)$ , определенный на интервале  $[0, \infty)$ , на две части:

$x_1(t)$  с интервалом  $[0, t)$  и  $x_2(t)$  с интервалом  $[t, \infty)$ . Очевидно, что

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Представим обе части в динамическом виде на основе дельта-функций:

$$x_1(t) = \int_0^t x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau,$$

$$x_2(t) = \int_t^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau.$$

В сигнале  $x_2(t)$  интегрирование можно распространить на всю полуось  $[0, \infty)$ , если подинтегральное выражение умножить на функцию  $\sigma(t-\tau)$ . Тогда, благодаря избирательному свойству дельта-функции, получим

$$x_2(t) = x(t) \sigma(t-t) = x(t) \sigma(0).$$

Здесь  $\sigma(0)$  также означает скользящую функцию единичного скачка с разрывом в текущий момент времени  $t$ , левее которого  $\sigma(0)$  везде равна нулю, а правее – единице.

В результате суммирования сигналов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  приходим к следующему выражению для сигнала  $x(t)$ :

$$x(t) = x(t)\sigma(0) + \int_0^t x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

Интегральное представление вида (2.12) носит название *интеграла Дюамеля*.

Динамическое представление на основе дельта-функции является частным случаем более общего описания сигналов с помощью свертки. *Свертка* представляет собой способ аналитического выражения одного сигнала  $y(t)$  через другой сигнал  $x(t)$  и для непрерывных финитных сигналов имеет следующий интегральный вид:

$$y(t) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(\tau)F(t-\tau) d\tau, \quad (2.13)$$

где  $F(t-\tau)$  может являться либо некоторой математической функцией, либо сигналом. В последнем случае с помощью свертки один сигнал выражается через два других сигнала.

Свертка в виде (2.13) удовлетворяет всем аксиомам линейности и поэтому является не только способом аналитического описания сигналов, но и линейным преобразованием сигналов. Свойства такого преобразования полностью определяются его *ядром*  $F(t-\tau)$ .

Смысл преобразования типа интегральной свертки можно пояснить следующим образом. Она описывает математическую операцию, которая состоит в том, что сигнал  $x(t)$  «развертывается» во времени с помощью функции (другого сигнала)  $F(t-\tau)$ . Другими словами, в каждый момент времени  $t$  функция  $x(t)$  просматривается через неоднородное «окно», которое движется с постоянной скоростью вдоль оси  $\tau$ . Неоднородность окна определяется законом изменения ядра  $F(\tau)$ . Если  $F(\tau) = \delta(\tau)$ , то таким окном будет бесконечно узкая щель. Рассматривая через нее сигнал  $x(\tau)$  мы будем в каждый момент  $\tau = t$  видеть только значение сигнала  $x(t)$ , поэтому в этом случае  $y(t) = x(t)$ . В этом проявляется избирательное свойство дельта-функции.

В тех случаях, когда ядро  $F(\tau)$  будет иметь ненулевые значения и в других точках, преобразование дает другой результат, так как значение сигнала  $y(t)$  будет определяться не только значением сигнала  $x(t)$  в момент  $\tau = t$ , а и его предыдущими значениями. Это уже *преобразование с памятью* – оно учитывает не только настоящее сигнала, но и его прошлое.

Если ядро свертки является сигналом, то свертка становится подобной взаимокорреляционной функции по энергии. Различие состоит только в направлении временного сдвига. При  $F(\tau) = x(\tau)$  свертка подобна автокорреляционной функции.

С математической точки зрения функции  $x(\tau)$  и  $F(\tau)$  в (2.13) равноправны, поэтому справедлива и такая запись интегральной свертки:

$$y(t) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} F(\tau) x(t-\tau) d\tau. \quad (2.14)$$

Для комплексных сигналов свертка определяется следующим образом:

$$y(t) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t) F^*(t-\tau) d\tau, \quad (2.15)$$

где  $F^*(t-\tau)$  есть комплексная функция, комплексно сопряженная с функцией  $F(t-\tau)$ .

Операция интегральной свертки при бесконечном интервале интегрирования  $(-\infty, \infty)$  обладает свойствами, которые во многом сходны с свойствами операции умножения в обычной алгебре, поэтому её для краткости можно обозначать символом, напоминающим символ умножения:

$$y(t) = x(t) * F(t). \quad (2.16)$$

Она удовлетворяет свойствам

- распределительности:

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t),$$

- ассоциативности:

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t),$$

- коммутативности:

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t).$$

Здесь  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  – произвольные сигналы с одним интервалом определения  $(-\infty, \infty)$ . В случае конечного интервала интегрирования свойства ассоциативности и коммутативности для свертки в общем случае не выполняются.

Свертка двух сигналов обладает определенной симметрией. Если из двух сигналов оба являются четными или нечетными, то их свертка всегда есть четная функция времени:

$$x_1(t) * x_2(t) = x_1(-t) * x_2(-t).$$

Если же один из сигналов – четный, а другой – нечетный, то их свертка всегда есть нечетная функция времени:

$$x_1(t) * x_2(t) = x_1(-t) * [-x_2(-t)] = -[x_1(-t) * x_2(-t)]$$

Для сигналов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , представленных в виде суммы четной и нечетной частей:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1ч}(t) + x_{1н}(t), \\ x_2(t) &= x_{2ч}(t) + x_{2н}(t), \end{aligned}$$

их свертка равна

$$x_1(t) * x_2(t) = [x_{1ч}(t) * x_{2ч}(t)] + [x_{1ч}(t) * x_{2н}(t)] + [x_{1н}(t) * x_{2ч}(t)] + [x_{1н}(t) * x_{2н}(t)].$$

Из этого соотношения следует, что свертка сигнала со своим зеркальным отображением на любом интервале времени равна



$$x(t) * x(-t) = [x_u(t) * x_u(t)] - [x_n(t) * x_n(t)].$$

Такая свертка – четная функция времени, так как она образуется путем суммирования четных функций.

Для дискретных сигналов с бесконечным интервалом определения свертка имеет вид следующего линейного оператора:

$$y(i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)F(i-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k)x(i-k). \quad (2.17)$$

Для финитных дискретных сигналов различают два типа дискретных сверток: круговую и линейную.

*Круговая* свертка решетчатых сигналов с интервалом определения  $[0, N)$  равна

$$y(i) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)F(i-k) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)x(i-k), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.18)$$

и содержит конечное число значений. При её вычислении сигнал  $x(i)$  и ядро  $F(i)$  вне интервала определения искусственно периодически продолжаются. Поэтому свертка определяет свертку сигналов, как бы заданных в  $N$  равноотстоящих точках на окружности. Отсюда следует и название такой свертки. В силу периодического доопределения финитных сигналов её еще называют и *периодической (циклической)*. Если сигнал  $x(i)$  и функция ядра  $F(i)$  изначально являются периодическими с периодом  $N$ , то специальное доопределение сигналов не требуется.

Круговой (циклический) сдвиг отсчетов  $F(i-k)$  или  $x(i-k)$  в (2.18) можно математически отразить заменой операции обычного вычитания индексов  $i$  и  $k$  операцией их вычитания по модулю  $N$ , т.е.  $(i-k) \pmod{N}$ , которая выполняется по правилу

$$(i-k) \pmod{N} = \begin{cases} i-k \text{ при } (i-k) \geq 0, \\ N+i-k \text{ при } (i-k) < 0. \end{cases}$$

Тогда круговую свертку финитных сигналов можно вычислить по формуле

$$y(i) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)F[(i-k) \pmod{N}] = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)x[(i-k) \pmod{N}].$$

Смысл дискретной круговой свертки можно пояснить также, как смысл свертки непрерывных сигналов. В каждый момент дискретного времени  $i$  сигнал  $x(i)$  просматривается через решетчатое «окно», которое скользит вдоль оси  $i$ . Для периодических сигналов ось  $i$  – дискретная прямая, а для непериодических финитных – окружность. Форма решетчатого окна определяется функцией ядра  $F(i)$ .

Возможна еще одна форма аналитического описания сигналов, использующая линейную комбинацию типовых функций. В этом случае сигнал представляется многочленом времени

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)\varphi_k(t), \quad (2.20)$$

где  $X(k)$  – постоянные коэффициенты, а  $\varphi_k(t)$  – некоторые известные функции, составляющие упорядоченную систему  $\{\varphi_k(t)\}$ . Упорядоченность функций подразумевает наличие у них какого-то признака (номера, показателя степени и т.п.), по которому можно отличить предыдущую функцию в системе от последующей. Представление сигнала в виде (2.24) называют его *разложением* по системе функций  $\{\varphi_k(t)\}$ .

Ограничение числа членов многочлена (2.24) до  $r+1$  приводит к приближенному разложению сигнала

$$x(t) \approx x_r(t) = \sum_{k=0}^r X(k) \varphi_k(t). \quad (2.21)$$

В зависимости от того, как производится приближенное представление вида (2.25), оно называется *интерполяцией* или *аппроксимацией*. Различие между ними заключается в следующем.

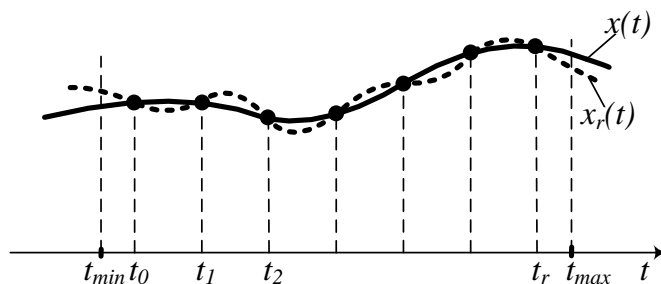


Рис. 2.3. Интерполяция сигнала

При интерполяции (рис. 2.3) требуется найти функцию  $x_r(t)$ , т.е. совокупность её коэффициентов  $\{X(k)\}$ , так чтобы она совпадала со значениями сигнала  $x(t)$  в заданных  $r+1$  точках:  $t_0, t_1, \dots, t_r$ , называемых *узлами* интерполяции. При аппроксимации (рис. 2.4) такие точки не задаются и требуется найти функцию  $x_r(t)$ , которая на заданном интервале  $[t_{\min}, t_{\max})$  наименее отклоняется от  $x(t)$ . По этой причине аппроксимацию сигнала называют еще его *приближением*.

На практике задачи интерполяции и аппроксимации возникают, если сигнал  $x(t)$  получен экспериментально и задан в виде таблицы или графика, а также в том случае, когда сигнал задан в виде сложного аналитического выражения и для упрощения решения задачи целесообразно представить его в виде линейной комбинации (2.25). Кроме того, интерполяция сигналов широко используется при восстановлении непрерывных сигналов по их дискретным значениям.

Для определения коэффициентов  $X(k)$  многочлена (2.25) при интерполяции необходимо составить систему из  $r+1$  уравнений:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_r(t_0) = \sum_{k=0}^r X(k) \varphi_k(t_0), \\ x(t_1) &= x_r(t_1) = \sum_{k=0}^r X(k) \varphi_k(t_1), \\ &\dots\dots\dots \\ x(t_r) &= x_r(t_r) = \sum_{k=0}^r X(k) \varphi_k(t_r). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Системы функций  $\{\varphi_k(t)\}$  могут быть самыми различными, однако задача интерполяции значительно упрощается, если система  $\{\varphi_k(t)\}$  состоит из линейно независимых функций. На практике широкое распространение получили системы степенных функций (полиномиальная интерполяция) и тригонометрических функций (гармоническая интерполяция).

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^r X(k)t^k. \quad (2.23)$$

Этот многочлен, удовлетворяющий системе уравнений (2.26), носит название интерполяционного полинома Лагранжа. Если узлы интерполяции находятся на равном расстоянии друг от друга, то полином Лагранжа превращается в более простой интерполяционный полином Ньютона. Наконец, при неограниченном увеличении числа узлов интерполяции ( $r \rightarrow \infty$ ) полином Ньютона в пределе превращается в сходящийся степенной ряд Тейлора, сумма которого  $x_r(t)$  будет совпадать с  $x(t)$  во всех точках заданного интервала времени  $[t_{min}, t_{max}]$ . Следует, однако, отметить, что такое разложение сигнала возможно только в том случае, если на заданном промежутке времени сигнал  $x(t)$  является аналитическим, т.е. если его можно неограниченно дифференцировать.

При гармонической интерполяции соответствующий многочлен имеет вид

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^r a(k) \cos(\omega_k t - \psi_k). \quad (2.24)$$

С его помощью можно произвести интерполяцию сигнала  $x(t)$  на  $2r+1$  узлах интерполяции. Действительно, выражение (2.28) можно представить в виде

$$x_r(t) = a(0) + \sum_{k=1}^r [A(k) \cos \omega_k t + B(k) \sin \omega_k t], \quad (2.25)$$

где  $A(k) = a(k) \cos \psi_k$ ;  $B(k) = a(k) \sin \psi_k$ . В этом многочлене  $2r + 1$  неизвестных коэффициентов и для их определения необходимо составить уравнения для того же количества узлов интерполяции.

При равноотстоящих узлах интерполяции и неограниченном возрастании их числа ( $r \rightarrow \infty$ ) этот многочлен переходит в тригонометрический ряд Фурье. В заданном интервале времени  $[t_{min}, t_{max})$  ряд Фурье дает точное описание сигнала на участках его непрерывности. В этом случае говорят, что ряд  $x_r(t)$  *сходится* на интервале  $[t_{min}, t_{max})$  к сигналу  $x(t)$ . Такое представление можно получить не всегда, а лишь в том случае, когда сигнал удовлетворяет так называемым условиям Дирихле или другим более легким условиям.

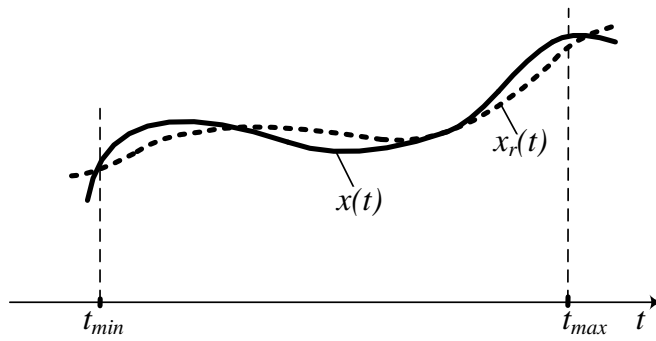


Рис. 2.4. Аппроксимация сигнала

При аппроксимации сигналов коэффициенты многочлена находятся из условия минимизации критерия приближения. Критерии приближения могут быть разными, так как в выражение «наименьшее отклонение» или «наилучшее приближение» можно вкладывать самый различный смысл. Важнейшей характеристикой аппроксимации является её точность. Поэтому, если в качестве количественной меры аппроксимации использовать абсолютную погрешность

$$\Delta(t) = x(t) - x_r(t)$$

или её дисперсию

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \Delta^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \left[ x(t) - \sum_{k=0}^r X(k) \varphi_k(t) \right]^2 dt, \quad (2.26)$$

то на их основе можно сформировать по меньшей мере три критерия аппроксимации. При первом из них требуют, чтобы абсолютная погрешность аппроксимации равнялась нулю на всем интервале  $[t_{\min}, t_{\max})$ , кроме отдельных его точек. Такая аппроксимация получила название *приближения почти всюду* и возможна далеко не всегда. При втором критерии выдвигается требование, чтобы максимальная величина абсолютной погрешности аппроксимации была минимальной в заданном интервале времени  $[t_{\min}, t_{\max})$  по сравнению с такого же рода величиной при любом другом выборе коэффициентов многочлена  $x_r(t)$ :

$$\max_{t_{\min} \leq t \leq t_{\max}} |\Delta(t)| = \min. \quad (2.27)$$

Этот вид аппроксимации носит название *равномерного приближения* или *приближения по минимаксному критерию*.

Теория равномерного приближения была создана Чебышевым. Им доказано, что при равномерном приближении многочленом  $r$ -го порядка (2.25) погрешность  $\Delta(t)$  будет отклоняться на интервале  $[t_{\min}, t_{\max})$  от нуля попеременно то в одну, то в другую сторону  $r+2$  раз, причем все максимальные отклонения этой погрешности будут одинаковы (рис. 2.5) и принадлежать  $r+2$  последовательно расположенным временным точкам (точкам альтернанса) интервала определения.

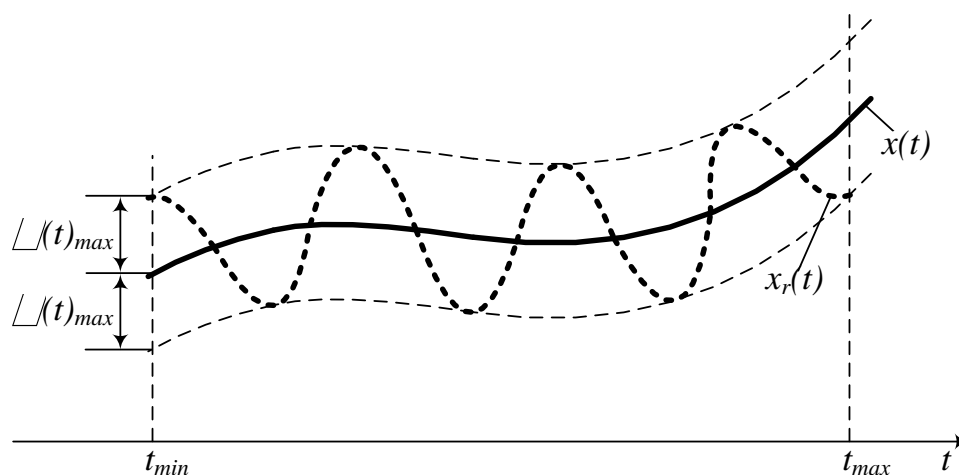


Рис. 2.5. Равномерная аппроксимация сигнала

Как правило, аналитически многочлен равномерного приближения определить невозможно. Наиболее эффективным методом численного решения задачи чебышевской аппроксимации является алгоритм Ремеза. Суть этого алгоритма сводится к последовательной модификации коэффициентов аппроксимирующего многочлена до тех пор, пока с заданной степенью точности не оказываются выполненными условия Чебышева. Более подробно алгоритм Ремеза будет рассмотрен в главе 8 применительно к задаче синтеза избирательных фильтров.

Смысл третьего вида аппроксимации состоит в минимизации дисперсии (или среднеквадратической погрешности), которая соответствует мощности погрешности аппроксимации:

$$\sigma^2 = \min. \quad (2.28)$$

Такая аппроксимация носит название *приближения в среднеквадратическом*. Иногда её называют *приближением в среднем*. Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае приближение в среднем соответствует минимизации другого критерия, а именно, средней погрешности аппроксимации:

$$\frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} |\Delta(t)| dt = \min.$$

Для сигналов с бесконечным интервалом определения вместо приближения в среднеквадратическом может быть использовано *приближение по энергии погрешности* с критерием

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \Delta^2(t) dt = \min.$$

При конечном интервале определения сигнала приближение по энергии погрешности не отличается от среднеквадратического приближения. Поэтому их оба часто называют приближением в среднеквадратическом.

Приближение в среднеквадратическом широко распространено на практике. Объясняется это тем, что критерии мощности или энергии погрешности учитывают интегральный эффект – погрешность, накопленную на

интервале определения сигнала, а накопление погрешности свойственно многим техническим системам. В ряде приложений критерий мощности или энергии лучше соответствует физическому смыслу изучаемых явлений. Наконец, и это может быть самое главное, теория, основанная на критериях мощности или энергии погрешности, хорошо развита и имеет наиболее простой вид.

Эта теория включает ряд методов, позволяющих определять коэффициенты аппроксимирующего многочлена. Наиболее известным из них является метод *наименьших квадратов*, в котором выполнение условия (2.32) достигается нахождением коэффициентов  $X(k)$  путем решения следующей эквивалентной системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=0}^r X(k) \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \varphi_m(t) \varphi_k(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t) \varphi_m(t) dt, \quad m = 0, 1, \dots, r. \quad (2.29)$$

Уравнения этой системы получаются в результате дифференцирования выражения для дисперсии (2.26) по каждому искомому коэффициенту  $X(m)$ ,  $m = 0, 1, \dots, r$  и приравнивания полученного результата нулю. При известных функциях  $\{\varphi_k(t)\}$  задача аппроксимации в соответствии с (2.29) становится чисто вычислительной задачей. Её решение упрощается, если для приближения используются многочлены, основанные на системе линейно-независимых функций, например, степенные и тригонометрические многочлены.

Важно отметить, что при повышении порядка аппроксимирующего многочлена приближение не всегда улучшается, однако, если функции  $\varphi_k(t)$  удовлетворяют дополнительному условию ортогональности

$$\frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ P_k, & k = m, \end{cases} \quad (2.30)$$

где  $P_k$  есть мощность  $k$ -ой функции:

$$P_k = \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \varphi_k^2(t) dt, \quad (2.31)$$

то с увеличением  $r$  погрешность аппроксимации всегда уменьшается. При этом многочлен  $x_r(t)$  приближается к аппроксимируемому сигналу и при  $r \rightarrow \infty$  совпадает с ним в смысле принятого критерия сходимости.

Наряду с рассмотренными критериями в математике известны и другие критерии и виды аппроксимации.

Задачу аппроксимации можно поставить и решить и для дискретных сигналов. В этом случае функции многочлена также должны быть дискретными  $\{\varphi_k(i)\}$  и их моменты отсчетов должны совпадать с моментами отсчетов самого сигнала. При этом аппроксимирующий многочлен также становится дискретным

$$x_r(i) = \sum_{k=0}^r X(k) \varphi_k(i), \quad (2.32)$$

а два последних критерия аппроксимации принимают следующий вид:

$$\max_{0 \leq i \leq N-1} |x(i) - x_r(i)| = \min, \quad (2.33)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} [x(i) - x_r(i)]^2 = \min. \quad (2.34)$$

Процедура решения задач дискретной аппроксимации фактически не изменяется по сравнению с процедурой решения задач аппроксимации непрерывных сигналов, только операция интегрирования заменяется на операцию суммирования. Так при использовании метода наименьших квадратов решение задачи дискретной среднеквадратической аппроксимации получается из решения следующей системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=0}^r X(k) \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_m(i) \varphi_k(i) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \varphi_m(i), \quad m = 0, 1, \dots, r, \quad (2.35)$$

являющейся дискретным аналогом системы (2.29).

В рассмотренной постановке аппроксимация обеспечивала одинаковую точность приближения на всем интервале определения сигнала. Если же точность приближения на различных участках интервала определения должна быть разной, то это достигается введением специальной неотрицательной *весовой функции*  $q(t)$  (для непрерывных сигналов) или  $q(i)$  (для дискретных сигналов) и следующей записью критериев аппроксимации:

при непрерывной аппроксимации:

$$\max_{t_{\min} \leq t < t_{\max}} \{q(t) |x(t) - x_r(t)|\} = \min, \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} q(t) [x(t) - x_r(t)]^2 dt = \min, \quad (2.37)$$

при дискретной аппроксимации:

$$\max_{0 \leq i \leq N-1} \{q(i) |x(i) - x_r(i)|\} = \min, \quad (2.38)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} q(i) [x(i) - x_r(i)]^2 = \min. \quad (2.39)$$

Общий принцип задания значений *весовой функции* состоит в следующем: чем точнее должна выполняться аппроксимация на конкретном участке интервала определения, тем большее значение должна принимать *весовая функция* на этом участке. При чебышевской аппроксимации для отдельных  $j$ -х участков интервала времени задаются значения абсолютных погрешностей  $\Delta_j$  такие, чтобы на этих участках выполнялось неравенство

$$|x(t) - x_r(t)| \leq \Delta_j$$

для непрерывной аппроксимации, либо неравенство

$$|x(i) - x_r(i)| \leq \Delta_j$$

для дискретной аппроксимации. Тогда для каждого  $j$ -го участка *весовая функция* принимается равной  $R/\Delta_j$ , где  $R$  — произвольная константа (нормирующий множитель), общая для всех участков интервала определения.

Точное решение задачи экстраполяции невозможно, поскольку вне конечного интервала определения сигнал не известен. Для её приближенного решения используются *гипотезы* (предположения) о законе изменения сигнала во времени вне заданного временного интервала. Естественной гипотезой является предположение о том, что вне интервала определения сигнал сохраняет тот же закон изменения, что и внутри интервала. В этом случае при известном законе изменения экстраполяция сигнала не вызывает трудностей. Если же закон изменения сигнала заранее не известен либо сложен, то задача экстраполяции совмещается с задачей аппроксимации. При этом с помощью аппроксимации определяется закон изменения сигнала в виде аппроксимирующего многочлена, а затем осуществляется его экстраполяция на любой момент времени  $\tau$  вне интервала определения:

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^r X(k) \varphi_k(\tau). \quad (2.40)$$

Рассматривая интерполяцию, аппроксимацию и экстраполяцию, мы говорили преимущественно о сигналах. Однако эти операции можно применять и к математическим функциям, не являющимися сигналами, в том числе и к характеристикам сигналов. Интерполяционный, аппроксимирующий и экстраполирующий многочлены удовлетворяют всем аксиомам линейности, поэтому их тоже можно отнести к классу линейных преобразований.

Каждый отсчет дискретного сигнала является вещественным либо комплексным числом. Финитный дискретный сигнал содержит конечный набор таких чисел. В математике существует ряд способов компактного описания совокупности однородных элементов. Одним из них, находящим широкое применение в цифровой обработке, является матричное представление. Приведем основные сведения из теории матриц и проиллюстрируем возможности этой теории при описании дискретных сигналов и их линейных преобразований.

*Прямоугольной матрицей  $A$  размера  $m \times n$  или  $m \times n$  матрицей* называется таблица чисел, над которыми выполнимы и однозначны операции сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевое число:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Числа таблицы, составляющие матрицу, называются её *элементами*. Каждый элемент может быть представлен в двухиндексном обозначении  $a_{ij}$ , где первый индекс  $i$  всегда указывает номер строки таблицы, а второй индекс  $j$  – номер её столбца, на пересечении которых расположен данный элемент. Поэтому возможно и более простое обозначение матрицы

$$A = [a_{ij}], \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$



При  $m=n$  матрица называется *квадратной*, а при  $n=1$  или  $m=1$  она вырождается соответственно в *матрицу-столбец* или *матрицу-строку* и отображает одномерный массив (*вектор*) чисел. Каждой квадратной матрице  $A_n$  порядка  $n$  соответствует *определитель*  $|A|$ , образованный из её элементов

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Математически определитель представляет собой число, образованное из элементов матрицы по следующим правилам:

Определитель  $n$ -го порядка равен алгебраической сумме  $n!$  членов;

Каждый член представляет собой произведение  $n$  элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца таблицы определителя;

Член берется со знаком плюс, если перестановки, образованные первыми и вторыми индексами элементов  $a_{ij}$ , входящих в произведение, одинаковой четности (либо обе четные, либо обе нечетные) и со знаком минус в противоположном случае.

Отсчеты дискретного сигнала можно рассматривать в качестве коэффициентов степенного полинома некоторой переменной  $z$ . Тогда сам финитный сигнал  $x(i)$ ,  $i=0,1,\dots,N-1$  может быть представлен в виде этого полинома:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) z^i, \quad (2.41)$$

порядок которого однозначно связан с числом  $N$  отсчетов сигнала. Переменная  $z$  в полиноме (2.41) носит формальный характер, может принимать значения, принадлежащие любому множеству чисел, и обозначаться любой другой буквой.

Полиномиальное представление может оказаться полезным при записи линейных преобразований сигналов типа сверток, заменяя их на хорошо известные операции алгебры полиномов. Действительно, если сигнал  $x(i)$ ,  $i=0,1,\dots,N_1-1$  и функцию ядра свертки  $F(i)$ ,  $i=0,1,\dots,N_2-1$  представить в полиномиальном виде

$$X(z) = \sum_{i=0}^{N_1-1} x(i) z^i, \\ F(z) = \sum_{i=0}^{N_2-1} F(i) z^i,$$

то произведение этих полиномов

$$Y(z) = X(z) F(z) \quad (2.42)$$

дает полином

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{N_1+N_2-2} y(i) z^i, \quad (2.43)$$

коэффициенты которого  $y(i)$  совпадают со значениями линейной свертки (2.19) сигнала  $x(i)$  с функцией  $F(i)$ .

Полиномиальная запись сигнала давала возможность  $N$ -точечную выборку дискретного сигнала представлять в виде единого математического объекта, над которым возможно выполнение различных математических операций по известным правилам. Наряду с ней в математике существует еще одна форма представления функций в виде степенного ряда комплексной переменной  $z$  как с положительными, так и отрицательными степенями. Такое представление получило название  $z$ -преобразования (его еще называют дискретным преобразованием Лапласа) и может быть использовано для описания и исследования сигналов и его характеристик. Оно относится к классу линейных преобразований, поскольку удовлетворяет всем требованиям линейности.

Для действительного сигнала  $x(i)$ , заданного на бесконечном интервале определения  $(-\infty, \infty)$ ,  $z$ -преобразование определяется следующим образом:

$$X(z) = Z\{x(i)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)z^{-i}. \quad (2.44)$$

Аналогично записывается  $z$ -преобразование и для комплексных сигналов. Функцию  $X(z)$  называют  $z$ -образом сигнала  $x(i)$ . Преобразование (2.81) имеет смысл для тех значений  $z$ , при которых степенной ряд сходится. Здесь приведем только ряд общих результатов.

Для физических нереализуемых сигналов  $x(i)$ , определенных на левом полубесконечном интервале (т.е.  $-\infty < i < 0$ ), ряд  $X(z)$  сходится во всех точках, лежащих в круге радиуса  $R$ , величина которого зависит от положения особых точек  $X(z)$ , называемых *полюсами* (полюса - это значения  $z$ , при которых знаменатель  $X(z)$  обращается в нуль). Для физически реализуемых дискретных сигналов  $x(i)$ , определенных на правом полубесконечном интервале  $(0, \infty)$ ,  $X(z)$  сходится везде вне круга радиуса  $R$ . Для таких сигналов

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(i)z^{-i}. \quad (2.45)$$

Соотношение (2.82) называют иногда *односторонним  $z$ -преобразованием*. Для финитных сигналов  $x(i)$  с  $N_1 < i < N_2$  ( $N_1 < N_2$ ), где  $N_1$  и  $N_2$  конечны,  $X(z)$  сходится в  $z$ -плоскости везде, за исключением, может быть, точек  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Путем изменения нумерации отсчетов сигнал  $x(i)$  с  $N_1 \leq i < N_2$  всегда можно свести к финитному сигналу  $x(i)$  с  $0 \leq i < N$ , где  $N = N_2 - N_1$ . Такой сигнал можно рассматривать как частный случай сигнала с полубесконечным интервалом (при нулевых значениях отсчетов для  $i \geq N$ ).

Приведем без доказательств основные свойства  $z$ -преобразования, используемые в теории сигналов.

1. Линейность. Если  $X_1(z)$  и  $X_2(z)$  являются  $z$ -преобразованиями сигналов  $x_1(i)$  и  $x_2(i)$ , то при любых действительных  $a$  и  $b$   $z$ -преобразование сигнала  $ax_1(i) + bx_2(i)$  равно  $aX_1(z) + bX_2(z)$ .

2. Сдвиг (задержка) сигналов. Если сигнал  $x(i)$  имеет  $z$ -преобразование  $X(z)$ , то  $z$ -преобразование сигнала  $x(i - i_0)$  (сдвинутого по оси  $i$  на величину  $i_0$ ) равно  $z^{-i_0} \cdot X(z)$ . Это свойство особенно удобно для описания сигналов, сдвинутых во времени, и используется при переходе от описания сигнала в виде разностного уравнения к его  $z$ -преобразованию и наоборот. Это свойство еще называют *теоремой о сдвиге*.

3. Перемножение сигналов. Если сигналы  $x_1(i)$  и  $x_2(i)$  имеют  $z$ -образы  $X_1(z)$  и  $X_2(z)$ , то сигнал  $x_3(i) = x_1(i) \cdot x_2(i)$  имеет  $z$ -преобразование

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v) X_2(z/v) v^{-1} dv, \quad (2.46)$$

где  $C$  - замкнутый контур в комплексной  $v$ -плоскости, охватывающий все особые точки функции  $X_1(v) X_2(z/v) v^{-1}$ , лежащие в окружности с центром в точке 0 и с радиусом, равным  $|z|$ .

4. Свертка сигналов. Если дискретные сигналы  $x(i)$  и  $y(i)$  имеют  $z$ -образы  $X(z)$  и  $Y(z)$  и связаны соотношением типа свертки

$$y(i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(i-m) F(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) F(i-m), \quad (2.47)$$

где  $F(i)$  - функция ядра свертки с  $z$ -преобразованием  $F(z)$ , то

$$Y(z) = X(z) F(z). \quad (2.48)$$

Это свойство  $z$ -преобразований называют еще *теоремой о свертке*.

Все рассмотренные свойства  $z$ -преобразования присущи и одностороннему  $z$ -преобразованию. Некоторое отличие имеется в записи теоремы о сдвиге, которая для одностороннего  $z$ -преобразования представляется следующим образом:

$$Y(z) = z^{-i_0} X(z) + x(-i_0) + x(-i_0 + 1)z^{-1} + \dots + x(-1)z^{-(i_0-1)},$$

где  $x(-i_0), \dots, x(-1)$  - значения сигнала  $x(i)$  для  $i < 0$  (начальные условия). Если сигнал  $x(i)$  физически реализуемый (т.е. все  $x(i)$  для  $i < 0$  равны 0), то запись теоремы о сдвиге для одностороннего  $z$ -преобразования совпадает с ее записью для общего  $z$ -преобразования. Для физически реализуемых сигналов суммирование в (2.47) начинается с  $m = 0$ .

**ТЕМА №3.** Спектральное представление сигналов. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье. Системы базисных функций. Автокорреляционная функция и энергетический спектр. Свойства спектров мультипликативных базисов.

Рассмотрим подробнее среднеквадратическую аппроксимацию действительных непрерывных сигналов с помощью многочленов, в которых система выбранных функций  $\{\varphi_k(t)\}$  удовлетворяет условию ортогональности. Такой многочлен будет также называться *ортогональным*. Именно этот случай соответствует представлению сигналов в гильбертовом действительном функциональном пространстве  $L_T^2$  с ортогональным базисом, в качестве которого выступает система функций  $\{\varphi_k(t)\}$  многочлена.

Пусть интервал определения сигналов  $[t_{\min}, t_{\max})$  является конечным, т.е.  $T < \infty$ . Тогда приближение по мощности погрешности будет равносильно приближению по энергии погрешности. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать преимущественно среднеквадратический критерий. Минимум среднеквадратического критерия для произвольных функций  $\varphi_k(t)$  достигается при нахождении коэффициентов аппроксимирующего многочлена  $X(k)$  из решения системы уравнений (2.33). Для ортогонального многочлена условие ортогональности (2.34) базисных функций позволяет решение системы (2.33) получить в следующей более простой форме записи:

$$X(k) = \frac{1}{T \cdot P_k} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t) \varphi_k(t) dt, \quad (3.1)$$

поскольку

$$\frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt = 0, \quad k \neq m.$$

Если подставить значения коэффициентов  $X(k)$ , записанные с помощью формулы (3.1), в выражение для дисперсии (мощности) погрешности аппроксимации (2.30), то получим, что

$$\sigma^2 = P - \sum_{k=0}^r X^2(k) P_k, \quad (3.2)$$

где  $P$  и  $P_k$  есть мощности сигнала и  $k$ -й базисной функции соответственно. Отсюда следует *неравенство Бесселя*

$$P \geq \sum_{k=0}^r X^2(k) P_k, \quad (3.3)$$

которое свидетельствует о том, что приближенная копия сигнала  $x_r(t)$ , получаемая в результате аппроксимации, будет всегда иметь меньшую мощность, чем оригинал.

Отметим два важных свойства аппроксимации многочленами, составленными из ортогональных функций. Формула (3.1) обеспечивает наилучший выбор коэффициентов  $X(k)$  в том смысле, что при любом другом выборе среднеквадратическая погрешность будет больше. Пусть например, производится аппроксимация того же сигнала с помощью другого многочлена

$$x_{1r}(t) = \sum_{k=0}^r X_1(k) \phi_k(t).$$

Мощность погрешности определяется выражением (2.30), которое при замене  $X(k)$  на  $X_1(k)$  и последующем преобразовании запишется в следующем виде:

$$\sigma^2 = P - 2 \sum_{k=0}^r X_1(k) \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t) \phi_k(t) dt + \sum_{k=0}^r X_1^2(k) P_k.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t) \phi_k(t) dt = X(k) P_k,$$

получим

$$\sigma^2 = P - 2 \sum_{k=0}^r X_1(k) X(k) P_k + \sum_{k=0}^r X_1^2(k) P_k.$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$\sigma^2 = P - \sum_{k=0}^r X^2(k) P_k + \sum_{k=0}^r [X_1(k) - X(k)]^2 P_k.$$

Отсюда видно, что погрешность будет минимальной, если  $X_1(k) = X(k)$ , и её минимальное значение определяется (3.2).

Из (3.1) следует, что величина коэффициентов не зависит от порядка многочлена  $r$ , поэтому если прибавить к аппроксимирующему многочлену новые слагаемые, то величины всех ранее вычисленных коэффициентов не изменятся, а дисперсия погрешности  $\sigma^2$  в соответствии с (3.2) уменьшится.

Очевидно, что среднеквадратическая аппроксимация имеет смысл тогда, когда существует выражение (3.2) для мощности погрешности, т.е. если мощность сигнала  $x(t)$  и функций  $\phi_k(t)$  на интервале аппроксимации имеет конечную величину ( $P < \infty$ ,  $P_k < \infty$ ).

Все результаты, вытекающие из алгебраического рассмотрения, полностью согласуются с результатами геометрической трактовки сигналов в гильбертовом пространстве  $L_T^2$ . В этом случае система ортогональных функций  $\{\phi_k(t)\}$  может рассматриваться в качестве базиса пространства и образовывать его декартову систему координат. Само условие ортогональности базисных функций можно записать в виде скалярного произведения двух базисных векторов  $\phi_k$  и  $\phi_m$ :

$$(\phi_k, \phi_m) = \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \phi_k(t) \phi_m(t) dt = P_k \delta_{k,m} \quad (3.4)$$

Дискретные сигналы  $x(i)$ , определенные на конечном множестве из  $N$  точек, представляются в евклидовом  $l_N^2$  функциональном пространстве с ортогональным базисом  $\{\varphi_k(i)\}$ . В таком пространстве скалярное произведение понимается в смысле конечного суммирования, поэтому теория этого пространства может быть построена на основе теории гильбертова пространства с заменой в соответствующих формулах интегралов на конечные суммы. Многочлен разложения дискретного сигнала конечной энергии или мощности по полной системе ортогональных дискретных базисных функций  $\{\varphi_k(i)\}$  имеет вид конечного ряда

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(i). \quad (3.14)$$

Уменьшение числа членов в (3.14) до величины  $r < N$  приводит к многочлену

$$x_r(i) = \sum_{k=0}^r X(k) \varphi_k(i), \quad (3.15)$$

который аппроксимирует исходный сигнал со среднеквадратической погрешностью

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=r+1}^{N-1} X^2(k) P_k},$$

для действительного сигнала и

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=r+1}^{N-1} X(k) X^*(k) P_k}$$

для комплексного сигнала, которая будет минимальной, если его коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

- для действительного пространства

$$X(k) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{P_k} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \varphi_k(i), \quad (3.16)$$

- для комплексного пространства

$$X(k) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{P_k} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \varphi_k^*(i). \quad (3.17)$$

В этих формулах величины  $P_k$  являются мощностью действительной

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_k^2(i) \quad (3.18)$$

или комплексной

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_k(i) \varphi_k^*(i) \quad (3.19)$$

$k$ -й базисной функции  $\varphi_k(i)$ .

Условия ортогональности для этих функций имеют следующий вид:

$$(\varphi_k, \varphi_m) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_k(i) \varphi_m(i) = P_k \delta_{k,m}, \quad (3.20)$$

$$(\varphi_k, \varphi_m^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_k(i) \varphi_m^*(i) = P_k \delta_{k,m}, \quad (3.21)$$

а равенства Парсеваля записываются следующим образом:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x^2(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X^2(k) P_k, \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) x^*(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) X^*(k) P_k. \quad (3.23)$$

В евклидовом пространстве норма и метрика также могут быть выражены через коэффициенты разложения сигнала, причем соответствующие формулы для действительного пространства легко получаются из выражений (3.7) и (3.8) заменой в них бесконечного предела суммирования на конечную величину  $N-1$ . Для комплексного пространства аналогичные формулы могут быть получены на основе общих выражений (2.106) и (2.107) подстановкой в них вместо сигнала  $x(i)$  его разложения (3.14) и учетом условия ортогональности (3.21).

При увеличении числа членов дискретного аппроксимирующего многочлена (3.15) дисперсия погрешности аппроксимации уменьшается и при  $r=N$  погрешность становится равной нулю. Поэтому в формулах для многочлена разложения (3.14) и его коэффициентов (3.16) и (3.17)  $x(i)$  означает один и тот же сигнал. В этом состоит одно из принципиальных отличий конечномерного пространства от бесконечномерного пространства. В формулах коэффициентов (3.1) и (3.11) равенство является тождественным по определению: необходимо так определить коэффициенты  $X(k)$ , чтобы разложение сигнала было возможным.

Рассмотрим некоторые полезные свойства сигналов, входящих в пространства  $L_T^2$  и  $l_N^2$ . Формулировку этих свойств дадим применительно к действительным пространствам по мощности. Все они в равной мере будут относиться и к действительным пространствам по энергии, а также к комплексным пространствам и по мощности, и по энергии.

1. Произведение двух интегрируемых (суммируемых) с квадратом сигналов есть абсолютно интегрируемая (суммируемая) функция. Это непосредственно следует из неравенств:

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)|^2 &> 0, \\ |x_1(t) x_2(t)| &\leq x_1^2(t) + x_2^2(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} |x_1(t) x_2(t)| dt < \infty.$$

Аналогично и для дискретных сигналов

$$\sum_{i=0}^{N-1} |x_1(i) \cdot x_2(i)| < \infty.$$

2. Сумма двух сигналов, принадлежащих пространствам  $L_T^2$  или  $l_N^2$ , также принадлежит этим пространствам. Действительно,

$$\begin{aligned} [x_1(t) + x_2(t)]^2 &\leq x_1^2(t) + 2|x_1(t)x_2(t)| + x_2^2(t), \\ [x_1(i) + x_2(i)]^2 &\leq x_1^2(i) + 2|x_1(i)x_2(i)| + x_2^2(i). \end{aligned}$$

Поэтому, в силу свойства 1:

$$\begin{aligned} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} [x_1(t) + x_2(t)]^2 dt &< \infty, \\ \sum_{i=0}^{N-1} [x_1(i) + x_2(i)]^2 &< \infty. \end{aligned}$$

3. Сигнал из  $L_T^2(l_N^2)$ , умноженный на произвольное действительное число, принадлежит к  $L_T^2(l_N^2)$ .

Многочлен разложения, удовлетворяющий условиям ортогональности, в литературе называется *рядом Фурье в произвольном ортогональном базисе*. В его основе лежит полная система ортогональных базисных функций, упорядоченных с помощью индекса  $k$ . Эти базисные функции являются функциями двух переменных: дискретной переменной  $k$  и непрерывной переменной  $t$ . Поэтому удобно обозначить их в виде  $\varphi(k, t)$ . Соответственно коэффициенты  $X(k)$  ряда Фурье будут функциями дискретной переменной  $k$ . Учитывая это и сохранив общий двусторонний интервал определения сигналов, получим следующие выражения для ряда Фурье и коэффициентов разложения:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} X(k) \varphi(k, t), \\ X(k) &= \frac{1}{P_k} \cdot \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t) \varphi(k, t) dt, \\ X(k) &= \frac{1}{P_k} \cdot \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t) \varphi^*(k, t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Наличие двух формул для вычисления коэффициентов ряда Фурье в (3.24) связана с возможностью применения этих выражений для разложения как действительных, так и комплексных сигналов.

Ряд Фурье и формулы вычисления его коэффициентов (3.24) удовлетворяют всем условиям линейных преобразований, поэтому их называют еще *преобразованиями Фурье непрерывных сигналов*. При этом сам ряд Фурье называют *обратным преобразованием Фурье*, а формулы вычисления его коэффициентов  $X(k)$  - *прямым преобразованием Фурье*. Преобразования Фурье устанавливают взаимнооднозначное соответствие между сигналом и коэффициентами его Фурье-разложения. Поэтому эти коэффициенты могут быть использованы для аналитического описания сигналов. Их совокупность называется *спектром* сигнала. Спектр непрерывных сигналов с ограниченными интервалами определения всегда будет дискретной функцией переменной  $k$ , т.е. носит *линейчатый* характер.



Произведение  $X(k)\varphi(k,t)$  называется *спектральной составляющей*. Ряд Фурье представляет сигнал в виде суммы спектральных составляющих или, что то же самое, в виде элементарных сигналов  $\varphi(k,t)$ , взятых с весом  $X(k)$ .

Взаимооднозначное соответствие между сигналом и его спектром, обеспечиваемое преобразованиями Фурье, говорит о математическом равноправии функций  $x(t)$  и  $X(k)$  как различных форм аналитического выражения сигнала. Это подтверждается и симметрией выражений прямого и обратного преобразований Фурье. То, что в одном из них производится суммирование, а в других – интегрирование, не имеет принципиального значения, так как это аналогичные операции для функции дискретной переменной  $X(k)$  и функции непрерывной переменной  $x(t)$ . Физическая эквивалентность спектрального и временного представлений сигнала подтверждается равенствами Парсеваля (3.6) и (3.13), поскольку в левой части этих равенств записана мощность сигнала при его представлении с помощью математической функции времени, а в правой части – та же мощность при представлении сигнала с помощью спектров.

Из равенства Парсеваля, кроме того, следует, что так как мы рассматриваем сигналы с конечной мощностью  $P < \infty$ , то бесконечные суммы в правой части равенств должны быть сходящимися. Все слагаемые этих сумм положительны, поэтому их сходимость может быть обеспечена только в том случае, если коэффициенты Фурье с повышением номера (порядка) базисной функции стремятся к нулю:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X(k) = 0. \quad (3.25)$$

Представление сигналов в виде их спектров будем в дальнейшем называть представлением в *спектральной области*. Разделение описаний сигналов на временную и спектральную области может оказаться полезным в тех случаях, когда требуется различать эти две родственные формы аналитического описания сигналов. Они действительно являются родственными, поскольку, как будет показано далее в §4.1, представление сигнала с помощью функций времени может рассматриваться как частный случай спектрального представления по системе специальных базисных функций.

Переход в спектральную область не меняет типа функционального пространства и не влияет на его свойства. Однако, если такой переход все же выполнен, то метрические характеристики пространства можно вычислить через спектральные составляющие, а не через значения самого сигнала, т.е. не восстанавливая сам сигнал (см. предыдущий параграф).

Геометрическая трактовка сигналов позволяет привести более общие формулы записи преобразований Фурье с использованием операций скалярных произведений:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= (X(k), \varphi(k, t))_k, \\ X(k) &= (x(t), \varphi(k, t))_t / P_k, \\ X(k) &= (x(t), \varphi^*(k, t))_t / P_k. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Индекс  $k$  в первом из выражений (3.26) означает, что в нем используется скалярное произведение в смысле суммирования по переменной  $k$ , а индекс  $t$  в двух следующих выражениях говорит о том, что в них скалярное произведение понимается в смысле интегрирования по переменной  $t$ .

Развернутые выражения (3.24) и более сжатые выражения (3.26) составляют математическую основу *скалярного способа* описания преобразований Фурье.

Один и тот же сигнал может быть разложен в ряд Фурье по различным системам базисных функций, или, что одно и то же, рассмотрен в различных системах координат. При этом внутренние закономерности сигнала не могут нарушаться при изменении системы координат, поскольку свойства вектора не могут зависеть от его проекций. Свойства функционального пространства  $L_T^2$  инвариантны относительно системы базисных функций и одинаково описываются в любом базисе. Однако свойства спектра сигнала могут зависеть от базисной системы, так как свойства проекций вектора связаны с используемой системой координат.

Система базисных функций, составляющая основу спектрального анализа, должна удовлетворять ряду специальных требований. Ранее мы уже указывали на некоторые из них. Теперь приведем их все, объединив в общий перечень.

1. Это должна быть система линейно независимых функций, так как если какие-либо функции будут связаны линейной зависимостью, как например,  $\varphi(k, t) = c \varphi(m, t)$ , то соответствующие члены ряда Фурье могут быть объединены

$$X(k)\varphi(k, t) + X(m)\varphi(m, t) = [X(k) \cdot c + X(m)]\varphi(m, t).$$

2. Система  $\{\varphi(k, t)\}$  должна быть упорядоченной, т. е. в системе всегда должен присутствовать признак (показатель степени, номер и т.п.), по которому можно отличить предыдущую функцию от последующей.

3. Каждая базисная функция должна описываться переменной с размерностью времени и иметь интервал определения, совпадающий с интервалом определения сигнала. Если изначально это не выполняется, то необходимо осуществить согласование осей и интервалов изменения базисных функций и сигналов. Наличие этого требования связано с тем фактом, что абсолютное большинство известных базисных функций получено при решении математических задач, не связанных с обработкой сигналов, описывается безразмерными переменными и имеет различные интервалы определения.

Согласование осей и интервалов изменения легко достигается простым линейным преобразованием переменных базисной функции и сигнала. Если, например, базисная функция зависит от переменной  $v$ , т.е.  $\varphi(k, v)$ , и определена

на интервале  $[v_{\min}, v_{\max})$ , то приведение её к функции  $\varphi(k, t)$  с интервалом  $[t_{\min}, t_{\max})$  можно осуществить подстановкой:

$$v = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}} t + \frac{v_{\min} t_{\max} - v_{\max} t_{\min}}{t_{\max} - t_{\min}}. \quad (3.27)$$

В силу линейности подстановки (3.27) справедливость её достаточно проверить на граничных значениях  $t$ . При  $t = t_{\min}$  переменная  $v = v_{\min}$ , а при  $t = t_{\max}$  выполняется равенство  $v = v_{\max}$ .

4. Базисные функции  $\{\varphi(k, t)\}$  на интервале определения должны иметь конечную мощность  $P_k < \infty$ . Это связано с тем, что каждая из них является одним из возможных сигналов, принадлежащих пространству  $L_T^2$ , а именно сигналом, вектор которого совпадает с координатной осью. Поэтому они должны удовлетворять свойствам того пространства сигналов, в котором используются. Если же используется пространство по энергии, то базисные функции должны будут иметь конечную энергию.

5. Базисные функции, используемые в комплексном функциональном пространстве  $L_T^2$ , также должны быть комплексными:

$$\varphi(k, t) = \text{Re}[\varphi(k, t)] + j \text{Im}[\varphi(k, t)]$$

6. Система базисных функций должна быть ортогональной на интервале определения сигналов. Условие ортогональности заключается в равенстве нулю взаимной мощности или взаимной энергии двух различных базисных функций. Для пространства по мощности эти условия для действительных и комплексных сигналов имеют вид выражений (3.4) и (3.10) соответственно. Любую систему линейно независимых функций можно ортогонализировать, т.е. преобразовать в ортогональную систему с помощью известной процедуры Грама-Шмидта [59]. Интервал определения ортогональных базисных функций называют также *интервалом ортогональности*.

7. Базисные функции, используемые в преобразованиях Фурье, могут быть *нормированными* по мощности или энергии. Это означает, что мощность или энергия каждой базисной функции системы равна единице. Нормированные ортогональные базисные функции называют еще *ортонормированными*. Именно такие функции создают в функциональном пространстве декартову систему координат в виде орт, т.е. векторов единичной длины.

Любую систему ортогональных функций можно сделать ортонормированной. Для этого достаточно каждую базисную функцию поделить на корень квадратный из её мощности или энергии. Пусть имеем, например, систему ненормированных базисных функций  $\{\varphi(k, t)\}$  с мощностями  $P_k$ . Разделим и умножим каждое слагаемое обратного преобразования Фурье по этой системе на  $\sqrt{P_k}$ :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) \sqrt{P_k} \cdot \frac{\varphi(k, t)}{\sqrt{P_k}} = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) \psi(k, t).$$

Тогда новая система функций  $\{\psi(k, t)\}$  будет уже нормированной, так как мощность каждой её функции

$$Q_k = \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \psi^2(k, t) dt = \frac{1}{P_k} \cdot \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \varphi^2(k, t) dt = 1,$$

а коэффициенты  $Y(k)$  будут коэффициентами разложения сигнала по этой системе. Таким образом,

$$\psi(k, t) = \frac{1}{\sqrt{P_k}} \varphi(k, t), \quad Y(k) = X(k) \sqrt{P_k}.$$

Аналогичные формулы будут справедливы и при нормировке по энергии.

Требование нормированности базисных функций не является обязательными.

8. Для того чтобы по выбранной базисной системе функций можно было разложить любой сигнал из заданного множества, необходимо, чтобы она была полной.

Число линейно независимых функций в полной системе должно быть равно размерности рассматриваемого множества сигналов, т.е. количеству чисел, с помощью которых можно выбрать любой сигнал из этого множества. К такой полной системе ортогональных функций нельзя добавить ни одной новой функции, которая была бы ортогональна одновременно ко всем другим функциям данной системы.

Когда рассматривается множество непрерывных сигналов произвольной формы, то их размерность бесконечно велика, и в этом случае базисная система функций, используемая для разложения сигналов, должна содержать также бесконечно большое число линейно независимых функций.

Установить непосредственно полноту базисной системы, сопоставив её размерность с размерностью рассматриваемого множества сигналов, невозможно, потому что и та, и другая бесконечно велики. Поэтому при спектральном анализе установление факта полноты ортогональной базисной системы производится путем проверки её на выполнение равенства Парсеваля.

Если ортогональная система окажется неполной, то по ней уже нельзя разложить любой сигнал (например, сигнал, совпадающий с ортогональной функцией, отсутствующей в системе). По неполной системе функций можно разложить только сигналы, на которые накладываются определенные ограничения, выделяющие их из множества сигналов в особое подмножество (например, подмножество четных или нечетных сигналов). Можно доказать, что всякая неполная система является частью некоторой полной системы и что ее всегда можно дополнить, включив в нее новые функции.

9. При разложении непрерывных сигналов (т.е. сигналов, заданных во всех точках временной оси на интервале их определения) базисная система должна также состоять из непрерывных функций. При разложении дискретных сигналов, заданных в фиксированных точках временной оси, базисные функции должны быть тоже дискретными и заданными в тех же точках.

10. Базисные функции могут обладать свойством *мультипликативности*. Это свойство проявляется в том, что вместе с двумя функциями  $\varphi(m, t)$  и  $\varphi(n, t)$  мультипликативная система  $\{\varphi(k, t)\}$  содержит и их произведение

$$\varphi(\lambda, t) = \varphi(m, t) \cdot \varphi(n, t),$$

причем переменные  $\lambda, m$  и  $n$  связаны между собой в общем случае обобщенной операцией сложения, являющейся базовой операцией мультипликативности:

$$\lambda = m(+ )n$$

и реализуемой в различных системах по-разному (например, в системах, составленных из комплексных экспоненциальных функций, - это обычное арифметическое сложение, в системах, составленных из функций Уолша, - это поразрядное сложение по модулю два, а в системах функций Виленкина-Крестенсона – поразрядное сложение по произвольному модулю).

Любая упорядоченная система  $\{\varphi(k, t)\}$  является системой функций двух переменных – дискретной  $k$  и непрерывной  $t$ , поэтому особенно интересен случай, когда мультипликативность базисной системы проявляется сразу по обоим переменным. Примерами таких дважды мультипликативных систем могут служить системы, образованные из уже упоминавшихся комплексных экспоненциальных функций и функций Уолша (см. главу 4).

Общим свойством любой ортонормированной мультипликативной системы  $\{\varphi(k, t)\}$  является то, что модули всех функций из таких систем одинаковы и равны единице и если система является комплексной, то

$$1/\varphi(k, t) = \varphi^*(k, t).$$

Кроме того, для комплексных систем

$$\varphi(k, t) \varphi^*(m, t) = \varphi(k(-)m, t), \quad (3.28)$$

где  $(-)$  является обозначением обобщенной операции вычитания (обратной по отношению к операции сложения  $(+)$ ).

Мультипликативность не является обязательным свойством базисных систем, однако играет важную роль в спектральном анализе. Для дискретных систем мультипликативность является достаточным условием существования в них быстрых алгоритмов вычисления преобразований Фурье.

Полных и ортогональных систем базисных функций может существовать бесконечно большое количество, поскольку различных декартовых систем координат, повернутых друг относительно друга в многомерном пространстве, может быть построено сколь угодно много. Однако если принять определенные правила внутренней организации базисных функций в системе, то число структурно различных базисных систем может стать конечным. Поясним сказанное.

Известно, что любой сигнал может быть представлен в виде совокупности четных и нечетных составляющих. Базисная функция  $\varphi(k, t)$ , определенная на симметричном интервале  $[-T/2, T/2]$ , является элементарным сигналом и тоже разделяется на четную и нечетную части. Выполнив такую операцию деления над всеми функциями системы, можно затем объединить

в единое целое отдельно четные составляющие  $\{\psi(k, t)\}$  и нечетные составляющие  $\{H(k, t)\}$  этих функций. При этом будут получены две базисные системы, которые, следуя Трахтману А.М., назовем *простыми* [59].

Простые системы будут полными и ортогональными на одностороннем интервале  $[0, T/2)$  и пригодны для разложения сигналов с тем же интервалом определения. Спектры таких сигналов по этим системам также назовем простыми.

Реальные сигналы всегда имеют конечный интервал определения. Однако в теоретических разработках широко используются и сигналы, определенные на полубесконечном или бесконечном интервалах. При спектральном разложении таких сигналов могут быть использованы как базисные функции с бесконечным, так и с конечным интервалом ортогональности.

Наиболее просто осуществляется разложение сигналов с бесконечным интервалом определения и конечной энергией, входящих в пространство  $L^2$  по энергии, по системе базисных функций с конечной энергией на бесконечном интервале ортогональности:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) \varphi(k, t), \\ X(k) &= \frac{1}{E_{\varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi(k, t) dt, \\ E_{\varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(k, t) dt. \end{aligned}$$

При комплексном характере базисных функций второе и третье выражения приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{E_{\varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi^*(k, t) dt, \\ E_{\varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k, t) \varphi^*(k, t) dt. \end{aligned}$$

Ясно, что базисные функции в этом случае должны достаточно быстро убывать со временем и их ортогональность понимается в смысле ортогональности по энергии. Спектр сигнала при этом носит такой же дискретный характер, какой он имел при разложении сигнала с конечным интервалом определения.

Использование базисных функций с конечным интервалом ортогональности для разложения сигналов с бесконечным интервалом времени возможно при выполнении определенных условий. Определим эти условия.

Любая базисная система функций  $\{\varphi(k, t)\}$  является дискретной, так как является функцией порядка  $k$ , принимающего значения натурального ряда чисел. Оперировать порядком  $k$  удобно, если сигнал определяется на конечном интервале времени. Однако понятие порядка становится неудобным и даже теряет свой смысл, если интервал определения сигнала становится бесконечным, а базисная система функций имеет конечный интервал

ортогональности. Поэтому при разложении сигнала  $x(t)$ , заданного на полубесконечном  $[0, \infty)$  или бесконечном  $(-\infty, \infty)$  интервале времени, приходится вводить вместо порядка  $k$  более удобную величину – *обобщенную частоту*  $f$ , а вместо коэффициента разложения  $X(k)$  – *спектральную плотность*  $X(f)$ .

Понятие спектральной плотности можно ввести формально и при разложении сигнала на конечном интервале времени, хотя в этом случае вполне возможно обходиться и без него. Тем не менее введение спектральной плотности полезно при больших интервалах определения сигнала. Без этого понятия нельзя вообще обойтись при рассмотрении предельного перехода к бесконечному интервалу времени.

Смысл понятий спектральной плотности и частоты поясним на примере полубесконечного одностороннего интервала времени  $[0, \infty)$ . Не составляет никакого труда таким же образом рассмотреть любой другой интервал определения сигнала. Допустим, что имеется финитный сигнал  $x(t)$ , заданный в интервале  $[0, t_{\max})$ , причем  $t_{\max} < T/2$ , и требуется произвести его разложение в ряд Фурье на интервале  $[0, T/2)$ . Это означает, что к сигналу добавляется справа нулевой участок на интервале  $[t_{\max}, T/2)$ . Условие финитности сигнала нам нужно временно, чтобы упростить рассуждения. Поскольку в дальнейшем мы перейдем к случаю  $T \rightarrow \infty$ , то это условие позднее можно будет отбросить как ненужное.

Пусть в нашем распоряжении имеется базисная система  $\{\varphi(k, \nu)\}$  некоторой формальной переменной  $\nu$  с интервалом ортогональности  $[0, L/2)$ . Чтобы разложить сигнал  $x(t)$  по такой системе, необходимо согласовать оси и интервалы сигнала и базисных функций. Это равносильно равномерному «растяжению» функции  $\varphi(k, \nu)$ , произведенному таким образом, чтобы интервалы определения сигнала и ортогональности базисных функций совместились. Последнее достигается заменой переменной  $\nu$  новой переменной  $t$ :

$$t = \frac{T}{L} \nu. \quad (3.29)$$

Формула (3.45) легко получается из общей формулы преобразования переменных (3.27). При растяжении функции  $\varphi(k, \nu)$  её мощность остается неизменной, а энергия изменяется.

Рассмотрим аппроксимацию сигнала  $x(t)$  рядом Фурье с  $n+1$  членами

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n X(k) \varphi(k, t). \quad (3.30)$$

Сумма членов такого усеченного ряда  $x_n(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  будет сходиться к сигналу  $x(t)$  в среднеквадратическом смысле.

Если такая аппроксимация приемлема при каком-либо  $T/2$ , то после увеличения этого интервала она уже не будет нас устраивать. Дело в том, что после растяжения функций  $\varphi(k, t)$  число знакоперемен, приходящееся на

интервал  $[0, t_{\max})$ , в котором сосредоточен сигнал, уменьшится, а значит функция высшего удерживаемого порядка  $\varphi(n, t)$  уже не будет в состоянии воспроизвести те быстрые изменения сигнала, которые она воспроизводила до растяжения.

Поэтому, чтобы обеспечить аппроксимацию сигнала с одной и той же точностью при различных длительностях интервала  $[0, T/2)$ , необходимо одновременно с растяжением базисных функций увеличивать число этих функций в усеченном ряде Фурье. По-видимому, желаемый результат будет достигнут, если поддерживать отношение  $n/T$  более или менее постоянным, что обеспечивает приблизительное постоянство числа знакоперемен функций высшего удерживаемого порядка  $\varphi(n, t)$  на интервале определения сигнала. Слова более или менее и приблизительно применены здесь потому, что  $n$  меняется дискретно, в то время как интервал  $T/2$  мы можем изменить и плавно. Однако при больших  $T/2$  это теряет свое значение.

Необходимость привлечения для аппроксимации сигнала с неизменной точностью все новых и новых функций из базисной системы можно объяснить еще и тем, что мы осуществляем аппроксимацию не только самого сигнала, но и добавленного к нему нулевого сигнала на участке  $t_{\max} < t < T/2$ , который по мере увеличения  $T/2$  удлиняется.

Итак, чем больше длина интервала  $T/2$ , тем более необходимое число спектральных коэффициентов. По мере возрастания  $T/2$  одновременно уменьшаются коэффициенты разложения. Последнее суждение понятно и из энергетических соображений. Так как на участке  $[0, t_{\max})$  финитный сигнал остается неизменным то при увеличении интервала  $[0, T/2)$  средняя мощность сигнала падает. Одновременно приходится увеличивать число составляющих спектра, поэтому для того чтобы не нарушалось равенство Парсеваля, необходимо уменьшать интенсивность составляющих спектра, т.е. их величину. В пределе при  $T/2 \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow \infty$  мы получим бесконечно протяженный спектр с бесконечно малыми интервалами между составляющими и с бесконечно малыми величинами коэффициентов разложения.

При представлении сигналов в функциональном пространстве  $L^2$  такой подход соответствует переходу от конечномерного (евклидова) пространства к бесконечномерному (гильбертову) пространству с одновременным уменьшением до нуля всех проекций вектора сигнала.

Как видим, при разложении сигнала на бесконечном интервале времени при старых понятиях встречаются большие трудности. Для того, чтобы избавиться от таких неприятных понятий, как базисная функция бесконечного порядка и нулевой коэффициент разложения (нулевой не по номеру, а по величине), необходимо сжать спектр по оси абсцисс и растянуть его по оси ординат. Это можно сделать, введя новые понятия: обобщенную частоту  $f$  и спектральную плотность  $X(f)$ .

Начнем с обобщенной частоты, которую определяют так:

$$f = \frac{k}{T}.$$



Теперь при  $T/2 \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow \infty$  максимальная частота  $f_{\max} = n/T$  может оставаться конечной величиной, если при этом отношение  $n/T$  поддерживается постоянным. В отличие от порядка  $k = fT$ , принимающего только целочисленные значения, частота  $f$  может в зависимости от  $T$  принимать любые значения, однако они всегда составляют упорядоченную последовательность:

$$f = 0, \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$$

Каждое такое число при  $T/2 < \infty$  однозначно определяет некоторую функцию  $k$ -го порядка из базисной системы

$$\{\varphi(k, \nu)\} = \left\{ \varphi\left(fT, \frac{L}{T}t\right) \right\}.$$

Обобщенная частота имеет ясный смысл. Это – половина среднего числа знакоперемен базисной функции в 1 секунду на интервале ортогональности. Если базисные функции периодические, то  $f$  – это среднее число периодов, приходящийся на интервал в 1 секунду.

Знакоперемены базисных функций не обязательно расположены равномерно, тем не менее частота этих функций всегда имеет определенное значение. Поскольку все частоты кратны величине  $1/T$ , назовем её основной частотой и обозначим

$$F = \frac{1}{T}. \quad (3.48)$$

Тогда частоты различных функций системы  $\{\varphi(f, t)\}$  будут равны  $f = 0, F, 2F, \dots$ . Это значит, что частотный интервал между соседними составляющими спектра равен  $F$ .

Таким образом, введение понятия частоты позволило сохранить постоянной ширину спектра сигнала при его аппроксимации с постоянной точностью, несмотря на изменение длительности интервала определения  $T/2$ .

Рассмотрим теперь коэффициенты разложения. Они будут равны

$$X(k) = \frac{1}{P_k} \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \varphi(k, t) dt$$

или

$$X_f(f) = \frac{1}{P_f} \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \varphi(f, t) dt.$$

Эти коэффициенты уменьшаются при увеличении  $T$  за счет множителя  $2/T$ . Действие этого множителя можно нейтрализовать переходом к спектральной плотности:

$$X(f) = X_f(f) \cdot T = \frac{2}{P_f} \int_0^{T/2} x(t) \varphi(f, t) dt. \quad (3.31)$$

Если учесть (3.30), то можно записать, что

$$X(f) = \frac{X_f(f)}{F},$$

откуда следует, что спектральная плотность – это коэффициент разложения, отнесенный к частотному интервалу между составляющими спектра.

При увеличении интервала  $T/2$  исходный линейчатый спектр сигнала сгущается, так как основная частота  $F$  падает и в пределе при  $T \rightarrow \infty$  он превращается в непрерывный спектр. При этом огибающая спектра не меняет свою форму. Ширина спектра по частоте определяется величиной  $f_{\max} = nF = n/T$ , которая при заданной точности аппроксимации не зависит ни от  $T$  ни от  $n$  (конечно, если  $n$  достаточно велико).

Дискретные преобразования Фурье устанавливают взаимоднозначное соответствие между дискретными сигналами и их спектрами. При этом следует сразу подчеркнуть, что дискретный спектральный анализ не является дискретной формой непрерывного анализа (такой анализ, приспособленный к обработке непрерывных сигналов на цифровых ЭВМ, также существует), а является во многих отношениях своеобразной областью теории сигналов со своими особенностями и закономерностями. В то же время непрерывный анализ может рассматриваться, при некоторых условиях, как предельный случай дискретного анализа.

Финитные действительные дискретные сигналы  $x(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , конечной энергии или мощности можно геометрически интерпретировать в виде векторов в евклидовом функциональном пространстве  $l_N^2$  размерности  $N$ , причем пространства по энергии и мощности в этом случае совпадают, так как мощность и энергия таких сигналов различаются в конечное число раз. Проекции (спектр)  $X(k)$  сигнала в системе координат, образованной из действительных функций  $\varphi(k, i)$ , могут быть определены по формуле

$$X(k) = \frac{1}{P_k} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \varphi(k, i), \quad (3.32)$$

а сам сигнал восстановлен по этим проекциям в соответствии с выражением

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi(k, i). \quad (3.33)$$

Зависимости (3.32) и (3.33) определяют *прямое и обратное дискретные преобразования Фурье*. Для комплексного базиса пара дискретных преобразований Фурье приобретает вид:

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{P_k} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \varphi^*(k, i), \\ x(i) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi(k, i). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Используемые в дискретных преобразованиях Фурье базисные функции так же являются дискретными и удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(k, i) \varphi(m, i) = P_k \delta_{k,m} \quad (3.35)$$

или

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(k, i) \varphi^*(m, i) = P_k \delta_{k, m}, \quad (3.36)$$

а моменты времени их отсчётов должны совпадать с моментами отсчётов анализируемого сигнала. Мощность базисных функций  $P_k$ , используемая в выражениях (3.32) - (3.36), равна:

- для действительного базиса

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi^2(k, i), \quad (3.37)$$

- для комплексного базиса

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(k, i) \varphi^*(k, i). \quad (3.38)$$

Двойная мультипликативность базисных функций позволяет записать для их спектров ряд важных свойств, которые в литературе обычно формулируют в виде специальных теорем. При этом, не ограничивая общности, рассмотрим только спектры комплексных базисных функций, определенных на конечных интервалах времени длительностью  $T$ . Конечность интервала накладывает дополнительное ограничение на базовую операцию мультипликативности: она должна быть замкнутой, в соответствии с чем ее результат над любыми моментами времени, принадлежащими  $T$ , также должен принадлежать этому же интервалу. Такому условию удовлетворяют, например, операции модулярного сложения и вычитания, характерные для систем комплексных экспоненциальных функций, функций Уолша и более общих функций Виленкина-Крестенсона.

Чтобы объединить доказательство свойств спектров непрерывных и дискретных базисных функций, воспользуемся общей записью преобразований Фурье в виде скалярных произведений, где под переменной  $t$  будем понимать теперь как непрерывное, так и дискретное время. В последнем случае фактически  $t=i$ ,  $T=N$  и скалярное произведение понимается в смысле конечного суммирования, в результате чего реализуется дискретное преобразование Фурье. Следует иметь в виду, что в скалярных произведениях имеется определенная математическая асимметрия: внутри двух последних используется нормирующий множитель  $1/T$ , в то время как в первом произведении такой множитель отсутствует. При выводе свойств спектров удобно этот множитель вынести за знак скалярного произведения. В этом случае пару преобразований Фурье в комплексном базисе можно записать в следующей компактной форме:

$$x(t) = (X(k), \varphi(k, t))_k, \\ X(k) = \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t), \varphi^*(k, t))_t,$$

где, как и ранее, скалярные произведения в зависимости от характера изменения  $t$ , понимаются как в смысле бесконечного суммирования и интегрирования, так и в смысле конечного суммирования. С помощью таких

скалярных произведений можно более компактно записать также и обобщенную свертку, и обобщенную автокорреляционную функцию:

$$x_1(t) ** x_2(t) = (x_1(\tau), x_2(t(-)\tau))_{\tau},$$

$$R_p(\tau) = \frac{1}{T} (x(t), x(t(+)\tau))_t.$$

Перейдем теперь непосредственно к свойствам спектров, оформив их в виде соответствующих теорем.

1. Теорема об обобщенном сдвиге. Спектр сигнала, сдвинутого по оси времени с помощью операции обобщенного сдвига на величину  $\tau$ , равен спектру исходного сигнала, умноженному на значения базисных функций в момент времени  $\tau$ .

Доказательство. Пусть сигнал  $x(t)$  имеет в базисе  $\{\varphi(k, t)\}$  спектр  $\{X(k)\}$ , а сигнал  $y(t)$  получается из сигнала  $x(t)$  путем прямого обобщенного сдвига последнего по оси времени на время  $\tau$ , т.е.  $y(t) = x(t(+)\tau)$ . Тогда спектр сигнала  $y(t)$  можно записать следующим образом:

$$Y(k) = \frac{1}{T \cdot P_k} (y(t), \varphi^*(k, t))_t = \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t(+)\tau), \varphi^*(k, t))_t.$$

Умножим правую часть этого выражения на произведение  $\varphi^*(k, \tau) \cdot \varphi(k, \tau)$ , численно равное 1, а затем внесем функцию  $\varphi^*(k, \tau)$  под знак скалярного произведения, что возможно, поскольку  $\varphi^*(k, \tau)$  не зависит от времени  $t$ . Тогда, с учетом свойства мультипликативности базиса получим

$$Y(k) = \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t(+)\tau), \varphi^*(k, t) \varphi^*(k, \tau))_t \cdot \varphi(k, \tau) =$$

$$= \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t(+)\tau), \varphi^*(k, t(+)\tau))_t \cdot \varphi(k, \tau) = X(k) \varphi(k, \tau).$$

В случае обратного обобщенного сдвига  $(-)$  сигнала  $x(t)$  сигнал  $y(t) = x(t(-)\tau)$  и его спектр может быть приведен к аналогичному виду:

$$Y(k) = \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t(-)\tau), \varphi^*(k, t(-)\tau))_t \cdot \varphi(k, \tau) = X(k) \varphi^*(k, \tau).$$

При выводе этого выражения под знак скалярного произведения вносится уже функция  $\varphi(k, \tau)$  и используется свойство мультипликативности базиса в форме записи.

Теорема доказана. Из нее следует, что обобщенный сдвиг сигнала по оси времени приводит к модуляции его спектра базисными функциями: при прямом сдвиге — комплексными функциями, а при обратном — комплексно-сопряженными.

2. Теорема об умножении сигнала на базисную функцию (теорема о модуляции). Умножение сигнала на базисную функцию приводит к обобщенному сдвигу его спектра.

Доказательство. Если сигнал  $y(t) = x(t) \varphi(m, t)$ , то его спектр

$$Y(k) = \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t) \varphi(m, t), \varphi^*(k, t))_t = \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t), \varphi^*(k, t) \cdot \varphi(m, t))_t =$$

$$= \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t), \varphi^*(k(-)m, t))_t = X(k(-)m).$$

Если сигнал  $y(t) = x(t) \varphi^*(m, t)$ , то для него  $Y(k) = \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t) \varphi^*(m, t), \varphi^*(k, t))_t =$

$$= \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t), \varphi^*(m, t) \varphi^*(k, t))_t = \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t), \varphi^*(k(+)m, t))_t = X(k(+)m).$$

Теорема доказана. Из нее следует, что при модуляции сигнала базисной функцией сам спектр сигнала не изменяется, но меняется порядок следования его составляющих по закону обобщенной базовой операции мультипликативности.

3. Теорема о свертке. Спектр сигнала, являющегося результатом обобщенной свертки двух других сигналов, равен с точностью до постоянного множителя произведению спектров этих сигналов.

Доказательство. Пусть сигнал  $y(t)$  есть обобщенная свертка вида двух сигналов  $x(t)$  и  $u(t)$  со спектрами  $X(k)$  и  $U(k)$  соответственно. Ее можно записать в виде скалярного произведения

$$y(t) = (x(\tau), u(t(-)\tau))_\tau.$$

Тогда спектр сигнала  $y(t)$

$$Y(k) = \frac{1}{T \cdot P_k} (y(t), \varphi^*(k, t))_t = \frac{1}{T \cdot P_k} ((x(\tau), u(t(-)\tau))_\tau, \varphi^*(k, t))_t.$$

Умножим внутреннее скалярное произведение правой части этого выражения на величину  $T \cdot P_k \varphi^*(k, \tau) \varphi(k, \tau) / (T \cdot P_k)$ , равную единице. Тогда можно записать, что

$$Y(k) = \frac{1}{T \cdot P_k} (x(\tau), \varphi^*(k, \tau))_\tau \cdot \frac{1}{T \cdot P_k} (u(t(-)\tau), \varphi^*(k, t) \varphi^*(k, \tau))_t \cdot T \cdot P_k =$$

$$= \frac{1}{T \cdot P_k} (x(\tau), \varphi^*(k, \tau))_\tau \cdot \frac{1}{T \cdot P_k} (u(t(-)\tau), \varphi^*(k, t(-)\tau))_t \cdot T \cdot P_k.$$

Но здесь первое скалярное произведение является спектром сигнала  $x(t)$ , а второе – спектром сигнала  $u(t)$ . Поэтому

$$Y(k) = T X(k) U(k) P_k.$$

Теорема доказана. Это свойство может быть эффективно использовано для вычисления свертки. Для ортонормированных базисов все  $P_k = 1$  и запись (3.94) этого свойства упрощается.

4. Теорема о корреляции. Спектр обобщенной автокорреляционной функции сигнала с точностью до постоянного множителя равен произведению комплексно-сопряженных спектров этого сигнала.

Доказательство. В этом случае сигнал

$$y(\tau) = \frac{1}{T} (x(t), x(t(+) \tau))_t$$

и его спектр

$$Y(k) = \frac{1}{TP_k} ((x(t), x(t(+)\tau))_t, \varphi^*(k, \tau))_\tau.$$

Умножив этот спектр на величину  $P_k \varphi^*(k, t) \varphi(k, t) / P_k = 1$ , после необходимых преобразований получим

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t), \varphi(k, t))_t \cdot \frac{1}{T \cdot P_k} (x(t(+)\tau), \varphi^*(k, t(+)\tau))_\tau \cdot P_k = \\ &= P_k X^*(k) X(k) = P_k |X(k)|^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**5. Теорема об умножении сигналов.** Спектр сигнала – произведения двух других сигналов равен обобщенной свертке спектров этих сигналов.

Доказательство. Пусть сигнал  $y(t)$  является произведением двух сигналов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  со спектрами  $X_1(k)$  и  $X_2(k)$  соответственно. Тогда его спектр можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} Y(k) &= \frac{1}{T \cdot P_k} (x_1(t) \cdot x_2(t), \varphi^*(k, t))_t = \frac{1}{T \cdot P_k} ((X_1(m), \varphi(m, t))_m \cdot x_2(t), \varphi^*(k, t))_t = \\ &= (X_1(m), \frac{1}{T \cdot P_k} (x_2(t), \varphi^*(k, t) \varphi(m, t))_t)_m = \\ &= (X_1(m), \frac{1}{T \cdot P_k} (x_2(t), \varphi^*(k(-)m, t))_t)_m = \\ &= (X_1(m), X_2(k(-)m))_m. \end{aligned}$$

Последнее выражение и есть обобщенная свертка спектров  $X_1(k)$  и  $X_2(k)$  с операцией в виде обратной операции мультипликативности. Теорема доказана. Ее можно обобщить на случай произвольного числа сомножителей. Однако в этом случае придется ввести понятие многомерной свертки.

**5. Теорема об энергетическом спектре сигнала.** Энергетический спектр сигнала в обобщенном мультипликативном базисе не изменяется при обобщенном сдвиге сигнала.

Доказательство. Обозначим энергетические спектры несдвинутого  $x(t)$  и сдвинутого  $y(t) = x(t(-)\tau)$  сигналов в виде  $S_x(k)$  и  $S_y(k)$  соответственно. Тогда имеем

$$S_y(k) = \frac{1}{T} Y(k) \cdot Y^*(k).$$

Но по теореме об обобщенном сдвиге сигнала

$$Y(k) = X(k) \varphi^*(k, \tau),$$

$$Y^*(k) = X^*(k) \varphi(k, \tau).$$

Здесь  $X(k)$  и  $Y(k)$  есть соответственно спектры сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$ . Учитывая это, получим

$$S_y(k) = \frac{1}{T} X(k) X^*(k) \varphi^*(k, \tau) \varphi(k, \tau) = \frac{1}{T} X(k) X^*(k) = S_x(k).$$

Теорема доказана. Она свидетельствует об инвариантности энергетического спектра сигнала к его обобщенному сдвигу по оси времени.

**ТЕМА №4.** Преобразование Фурье в классических базисах. Системы дельта-функций, единичных функций и функций Котельникова. Тригонометрические системы базисных функций. Системы комплексных экспоненциальных и полиномиальных базисных функций. Преобразования Хартли, Уолша и Хаара.

Спектры, связанные с различными базисными системами функций, обладают рядом общих свойств, обусловленных свойствами используемого функционального пространства. К таким свойствам относятся, например, линейчатость спектра, его сходимости к нулю, связь спектра с распределением энергии или мощности сигнала. Кроме них спектру могут быть присущи индивидуальные свойства, отражающие специфические особенности конкретных базисных систем. К их числу можно отнести наличие нулевых составляющих в спектре, формульное описание спектров конкретных сигналов, возможность построения быстрых вычислительных процедур для анализа спектра и т.п. Такие локальные свойства могут иметь весьма важное значение для обработки сигналов, поскольку благодаря им удастся находить новые методы решения традиционных задач обработки, а так же ставить и решать новые задачи обработки сигналов. Кроме того, локальные свойства спектров могут влиять на реализационные характеристики спектральных алгоритмов обработки, связанные с их точностью и вычислительной сложностью.

Учитывая то, что систем базисных функций может быть бесчисленное количество, становится ясным, что выбор базиса при спектральном представлении сигналов является серьезной математической и прикладной задачей. Общей единой методики синтеза базисных систем не существует. Ряд из них явились результатом решения математических и физических задач, не связанных со спектральной обработкой. Примером могут служить системы тригонометрических и полиномиальных функций, являющихся решением соответствующих дифференциальных уравнений. Однако существуют и другие способы построения базисов. Учитывая сказанное, имеет смысл рассмотреть наиболее распространенные системы базисных функций. В этой главе остановимся на системах, применение которых давно стало классикой спектральной обработки.

Начнем с систем, которые можно построить на основе дельта-функций. Две дельта-функции  $\delta(t-\tau_1)$  и  $\delta(t-\tau_2)$ , сдвинутые на различное расстояние по оси времени, являются ортогональными. Система таких функций  $\{\delta(t-\tau)\}$ , сдвинутых относительно друг друга на бесконечно малые интервалы времени, будет полной ортонормированной базисной системой, пригодной для разложения сигналов произвольной формы на любом интервале их определения. При этом, в силу непрерывности переменных  $t$  и  $\tau$ , преобразования Фурье по таким функциям будут носить интегральный

характер и, например, для конечного интервала  $[t_{\min}, t_{\max}]$  принимают следующий вид:

$$x(t) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} X(\tau) \delta(t - \tau) d\tau,$$

$$X(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t) \delta(t - \tau) dt. \quad (4.1)$$

Здесь  $X(\tau)$  является спектральной плотностью сигнала в базисе дельта-функций.

Если учесть избирательное свойство дельта-функций и единичное значение их площади, то из последнего выражения можно получить, что

$$X(\tau) = x(\tau) \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \delta(t - \tau) dt = x(\tau), \quad (4.2)$$

т.е. в этом базисе спектральная плотность сигнала совпадает с самим сигналом. Отсюда следует, что представление сигнала во временной области является частным случаем более общего представления в спектральной области. Следовательно, результаты решения задач обработки спектральными методами в произвольном базисе будут носить обобщенный характер. Из них, используя конкретные базисные системы, можно получать различные частные решения, в том числе и во временной области.

Если учесть равенство (4.2) в обратном преобразовании Фурье (4.1), то получим, что

$$x(t) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

т.е. обратное интегральное преобразование Фурье в базисе сдвинутых дельта-функций совпадает с динамическим описанием сигнала на основе дельта-функций. Это говорит о математическом единообразии отдельных форм аналитического описания сигналов.

Можно построить еще одну базисную систему, обладающую теми же свойствами, что и система, использующая дельта-функции. Введем непрерывную единичную функцию  $\nu(t)$ , представляющую собой импульс бесконечно малой длительности с единичными амплитудой, площадью и мощностью

$$\nu(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \nu(t) dt = 1, \quad (4.4)$$



$$P = \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} v^2(t) dt = 1. \quad (4.5)$$

Система из бесконечного числа таких функций  $\{v(t-\tau)\}$ , сдвинутых на бесконечно малое время относительно друг друга, будет ортонормированной и полной. Интегральные преобразования Фурье по этим функциям будут аналогичны интегральным преобразованиям Фурье в базисе дельта-функций:

$$x(t) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} X(\tau) v(t-\tau) d\tau,$$

$$X(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x(t) v(t-\tau) dt.$$

Используя введенное определение функции  $v(t)$  (4.3), а также нормированность ее площади к единице (4.4), из последнего выражения не трудно получить равенство (4.2), подтверждающее совпадение временного и спектрального способов описания сигналов и в этом базисе.

Системы, построенные на основе дельта-функций и единичных функций, являются формальными. Это следует из того факта, что любую из этих функций можно представить в виде полусуммы простых четных  $\mathcal{C}(t, \tau)$  и нечетных  $\mathcal{H}(t, \tau)$  функций, вид которых зависит от интервала определения.

На основе четных и нечетных систем простых функций  $\{\mathcal{C}(t, \tau)\}$  и  $\{\mathcal{H}(t, \tau)\}$  можно построить также и другие родственные системы. Составные системы  $\{\mathcal{C}(t, \tau), \mathcal{H}(t, \tau)\}$  тривиальны. Разложение сигнала по этим системам есть просто сумма разложений четной и нечетной частей сигнала по системам  $\{\mathcal{C}(t, \tau)\}$  и  $\{\mathcal{H}(t, \tau)\}$  соответственно. Комплексные базисные системы будут иметь следующий вид:

$$\{\varphi(t, \tau) = \left\{ \frac{\delta(t-\tau) + \delta(t+\tau)}{2} + j \frac{\delta(t-\tau) - \delta(t+\tau)}{2} \right\},$$

$$\{\varphi(t, \tau) = \left\{ \frac{v(t-\tau) + v(t+\tau)}{2} + j \frac{v(t-\tau) - v(t+\tau)}{2} \right\}$$

и могут быть представлены еще в показательной и тригонометрической формах записи. Составные и комплексные системы на основе дельта-функций и единичных функций не нашли практического применения.

Существует еще одна система базисных функций, для которой выполняется совпадение спектрального и временного представлений сигналов. Эта система используется для разложения сигналов с ограниченным частотным спектром  $[-\omega_b, \omega_b]$ , определенных в общем случае на бесконечном интервале времени  $(-\infty, \infty)$ . Она строится на основе функций Котельникова

$$\varphi(k, t) = \frac{\sin \omega_s (t - k\pi / \omega_s)}{\omega_s (t - k\pi / \omega_s)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.6)$$

Эти функции ортогональные, но не нормированы. Их норма равна  $\pi/\omega_s$ . Бесконечная совокупность таких функций образует базис Котельникова в линейном функциональном  $L_E^2$  пространстве низкочастотных сигналов с частотными спектрами, ограниченными сверху значением  $\omega_s$ . Каждая функция  $\varphi(k, t)$  этого базиса называется еще отсчетной функцией.

Коэффициенты ряда Фурье в этом базисе равны

$$X(k) = \frac{\omega_s}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{\sin \omega_s(t - k\pi / \omega_s)}{\omega_s(t - k\pi / \omega_s)} dt = x(k\pi / \omega_s),$$

поэтому сам ряд Фурье принимает вид ряда Котельникова

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin \omega_s(t - k\pi / \omega_s)}{\omega_s(t - k\pi / \omega_s)}. \quad (4.7)$$

Отличие представлений сигналов с помощью рядов Фурье в рассмотренных базисах состоит в следующем. Если использовать системы дельта-функций или единичных функций и принять в них  $\tau = k\Delta t$ , то с помощью соответствующих рядов Фурье можно восстановить однозначно функцию

сигнала  $x(t)$  только в точках  $t_k = k\Delta t$ . Для восстановления сигнала во всех временных точках необходимо устремить  $\Delta t$  к 0. Это будет соответствовать неограниченному спектру сигнала. Для ограниченного спектра такой выбор интервала  $\Delta t$  избыточен. Его можно выбрать по формуле Котельникова равном  $\pi / \omega_s$  и затем рядом Котельникова представить сигнал  $x(t)$  с любой требуемой точностью на всем временном интервале. Связано это с тем, что ряд Котельникова является интерполирующим рядом, который в точках  $tk = k\pi / \omega_s$

точно совпадает с значениями сигнала  $x(k\pi / \omega_s)$ , а в промежутке между ними обеспечивает аппроксимацию сигнала теоретически с любой степенью точности. Поэтому этот ряд можно использовать для восстановления непрерывного сигнала по заданным его отсчетным значениям, выбранным в моменты, кратные  $k\pi / \omega_s$ . Ряды Фурье по системам дельта- и единичных функций интерполирующими свойствами не обладают.

Рассмотренные системы базисных функций пригодны для представления непрерывных сигналов. Для спектрального анализа дискретных решетчатых сигналов можно использовать системы дискретных дельта-функций и единичных функций, получаемых дискретизацией соответствующих непрерывных функций. Для этого необходимо из систем дельта-функций или единичных функций выбрать  $N$  первых функций со значениями  $\tau = k\Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  на всем интервале определения длительностью  $T$ . При этом величины  $N$  и  $T$  должны быть связаны соотношением  $T = N\Delta t$ . Кроме того, при дискретизации дельта-функций амплитуда получаемых дискретных функций принимается равной единице. В результате в обоих случаях будет получена

одна и та же система дискретных единичных функций  $\{\delta(i-k)\}$ , о которых мы уже говорили в § 2.2.

Функции  $\delta(i-k)$  являются ненормированными. Их мощность равна

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta^2(i-k) = \frac{1}{N}.$$

Пара дискретных преобразований Фурье в базисе  $\{\delta(i-k)\}$  имеет следующий вид

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \delta(i-k),$$

$$X(k) = \frac{1}{P_k \cdot N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \delta(i-k),$$

Учитывая, что функции  $\delta(i-k)$  отличны от нуля только в точке  $i=k$ , где они равны единице, то из последнего выражения следует, что

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \delta(i-k) = x(k).$$

Таким образом, в базисе дискретных единичных функций спектр дискретного сигнала совпадает с самим сигналом, поэтому временное представление дискретных сигналов также можно рассматривать как частный случай спектрального представления по системе функций  $\{\delta(i-k)\}$ .

Система базисных функций  $\{\delta(i-k)\}$  является формальной системой.

Простые синусные  $\left\{ \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right\}$  и косинусные  $\left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right\}$  системы ортогональны друг другу на интервале длительностью  $T$  в силу свойств их четности. По этой же причине каждая из простых систем будет также ортогональна на двойном интервале  $T$ . Поэтому неполные на интервале  $T$  простые системы будут дополнять друг друга и образуют составную полную тригонометрическую систему

$$\left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right\} = 1, \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \sin\left(\frac{4\pi}{T} t\right), \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right), \dots$$

Эта система является периодической с периодом  $T$  и ненормированной, поскольку мощность  $P_k$  каждой ее  $k$ -й функции для  $k = 1, 2, \dots$  равна 0,5. Мощность же функции с номером  $k=0$  равна 1. Поэтому ряд Фурье и формулы вычисления спектра в этой системе принимают следующий вид:

$$x(t) = X_q(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ X_q(k) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + X_H(k) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right], \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} X_q(0) &= \frac{1}{T} \int_T x(t) dt, \\ X_q(k) &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \\ X_H(k) &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt, \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Пределы интегрирования в формулах (4.16) зависят от вида интервала определения сигнала. Для двустороннего интервала  $[-T/2, T/2]$  оно выполняется в пределах от  $-T/2$  до  $T/2$ , а для одностороннего интервала  $[0, T]$  – в пределах от 0 до  $T$ . Общий спектр  $X(m)$  сигнала в этом базисе формируется из чередующейся последовательности спектров четных и нечетных базисных функций:

$$\{X(m)\} = \{XЧ(k), XН(k)\} = \{XЧ(0), XН(1), XЧ(1), XН(2), XЧ(2), \dots\}.$$

Приведенную последовательность простых базисных функций в полной составной тригонометрической системе часто записывают в другом порядке:

$$\left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right\} = 1, \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right), \sin\left(\frac{4\pi}{T} t\right), \dots$$

При этом, естественно, меняется порядок следования простых спектров в общем спектре сигнала. Обычно это не имеет принципиального значения, т.к. не меняет общей записи ряда Фурье. Поэтому оба вида представления составной тригонометрической системы одинаково допустимы.

Каждая  $k$ -я комплексная экспоненциальная функция (ЭФ)  $\exp\left(j \frac{2\pi}{T} kt\right)$ , определенная на интервалах  $[-T/2, T/2]$  или  $[0, T]$  длительностью  $T$ , образуется из соответствующих простых гармонических функций

$$\exp\left(j \frac{2\pi}{T} kt\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right), \quad (4.17)$$

где  $j = \sqrt{-1}$ , а запись вида  $\exp(ja)$  соответствует записи комплексной

экспоненты  $\left\{ \exp\left(j \frac{2\pi}{T} kt\right) \right\}$ . Система насчитывающая счетное бесконечное множество таких функций (в самом общем случае  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), будет полной и ортогональной. Она будет также нормированной системой, т.к. мощность любой ее функции единична. Последнее следует из того факта, что мощность

комплексной функции  $\exp\left(j \frac{2\pi}{T} kt\right)$  при  $k \neq 0$  равна сумме мощностей ее действительной и мнимой частей, которые в свою очередь равны по 0,5. При  $k=0$  ЭФ является действительной функцией, принимает только единичные значения и ее мощность также равна 1.

Функции (4.17) удовлетворяют условиям мультипликативности с операцией в виде обычного сложения:

$$\exp\left(j\frac{2\pi}{T}kt\right)\exp\left(j\frac{2\pi}{T}mt\right)=\exp\left(j\frac{2\pi}{T}(k+m)t\right),$$

$$\exp\left(j\frac{2\pi}{T}kt\right)=1/\exp\left(-j\frac{2\pi}{T}kt\right).$$

Здесь  $\exp\left(-j\frac{2\pi}{T}kt\right)$  является комплексно-сопряженной базисной функцией.

Систему ЭФ (4.24) можно записать в виде функции частоты  $f=k/T$

$$\exp(j2\pi ft)=\cos(2\pi ft)+j\sin(2\pi ft). \quad (4.18)$$

В выражение (4.18) переменные  $f$  и  $t$  входят симметрично, в виде произведения  $ft$ . Тем не менее они изменяются по-разному: время  $t$  – непрерывно и определено на конечном интервале, а частота  $f$  – дискретна и задана на бесконечном интервале. Вследствии этого система  $\{\exp(j2\pi ft)\}$  при разложении сигналов на конечном интервале имеет различные свойства по осям  $t$  и  $f$ : она периодическая по оси  $t$

$$\exp(j2\pi f(t+T))=\exp(j2\pi ft)\cdot\exp(j2\pi fT)=\exp(j2\pi ft)$$

и непериодическая по оси  $f$ .

Каждая ЭФ является комплексной экспонентой, поэтому ее модуль равен 1, а фаза  $\theta(k,t)=2\pi kt/T=2\pi ft$ . Так как система ЭФ по частоте не является периодической, то каждому значению частоты соответствует единственная функция  $\exp(j2\pi ft)$ . При этом обе трактовки частоты: как скорость изменения фазы и как число знакоперемен действительной или мнимой части функции на интервале длительностью  $T/2$  совпадают.

Преобразования Фурье в базисе ЭФ имеют следующий вид:

- прямое

$$X(k)=\frac{1}{T}\int_T x(t)\exp\left(-j\frac{2\pi}{T}kt\right)dt, \quad k=0, 1, \dots, \quad (4.19)$$

- обратное

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} X(k)\exp\left(j\frac{2\pi}{T}kt\right) \quad (4.20)$$

и устанавливают математическую эквивалентность между сигналом  $x(t)$  и его комплексным частотным спектром  $X(k)$ . Равенство Парсеваля при этом записывается так:

$$\frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt=\sum_{k=0}^{\infty}|X(k)|^2=\sum_{k=0}^{\infty}X(k)X^*(k), \quad (4.21)$$

где  $X^*(k)$  – комплексно-сопряженный спектр сигнала. Пределы интегрирования в выражениях (4.19) и (4.21) задаются областью определения сигнала. Для сходимости комплексного ряда Фурье (4.27) характерны все те же особенности, что были отмечены ранее относительно сходимости тригонометрического ряда Фурье (4.15).

Аналогом комплексных экспоненциальных функций в дискретном анализе будут служить дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ)

$$\text{def}(k, i) = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} ki\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} ki\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N} ki\right), \quad (4.22)$$

где обе переменные  $k$  и  $i$  принимают целочисленные значения:  $k=0, 1, \dots, N-1$ , а  $i=0, 1, \dots, N-1$  либо  $i=-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \dots, \frac{N}{2}-1$ . Эти функции легко получаются из непрерывных ЭФ с помощью той же процедуры дискретизации, что была использована в тригонометрическом базисе, либо путем подстановки в (4.17)  $t=i\Delta t$  и  $T=N\Delta t$ .

ДЭФ также является комплексной функцией. Ее модуль равен 1, а фаза  $\theta(k, i) = 2\pi ki/N$  полностью определяет все свойства функции. Приведем основные из них.

1. ДЭФ является функцией двух равноправных переменных  $k$  и  $i$ , и любые выводы относительно одной из них справедливы и для другой. Это свойство иногда называют еще свойством *двойственности* ДЭФ. Из него следует, что матрица значений ДЭФ должны быть симметрической.

2. ДЭФ – периодическая функция с периодом  $N$  как по времени, так и по частоте:

$$\text{def}(k, i \pm N) = \text{def}(k, i); \quad \text{def}(k \pm N, i) = \text{def}(k, i).$$

Это позволяет обычное сложение в ДЭФ заменять на циклическое (по модулю  $N$ ).

3. Система ДЭФ дважды мультипликативна с базовой операцией в виде циклического сложения:

$$\text{def}(k, i)\text{def}(m, i) = \text{def}(k + m, i),$$

$$\text{def}(k, i)\text{def}(k, m) = \text{def}(k, m + i).$$

Именно это свойство используется при выводе алгоритмов быстрого преобразования Фурье.

4. Среднее значение всех ДЭФ, кроме нулевой, равно нулю. Это следует из равенства:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \text{def}(k, i) = \frac{\exp(j2\pi k) - 1}{N \exp(j2\pi k / N) - 1}, \quad k \neq 0.$$

Среднее значение нулевой функции равно 1.

5. Система ДЭФ ортонормирована:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \text{def}(k, i)\text{def}^*(m, i) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

6. Система ДЭФ является полной, поскольку она содержит  $N$  линейно-независимых взаимоортogonalных функций.

7. ДЭФ с номером  $N-k$  является комплексно-сопряженной ДЭФ с номером  $k$ , причем расположены эти функции симметрично на интервале  $N$ , т.к. числа  $N$  и  $k$  являются противоположными по модулю  $N$ . Это свойство следует из периодичности ДЭФ относительно индекса  $k$ :

$$def(N-k, i) = def(-k, i) = def^*(k, i) .$$

8. Любая полная система ДЭФ состоит из определенного числа пар комплексно-сопряженных функций, количество которых зависит от  $N$ . При четном  $N$  система ДЭФ состоит из двух действительных функций  $def(0, i)$  и  $def(N/2, i)$  и  $(N/2)-1$  пар комплексно-сопряженных функций. При нечетном  $N$  она содержит только одну действительную функцию  $def(0, i)$ , а остальные  $N-1$  функций образуют  $(N-1)/2$  комплексно-сопряженных пар.

Справедливость этого свойства следует из предыдущего свойства.

Систему ДЭФ также удобно задавать с помощью матрицы  $D$  значений ее функций. При этом полезно ввести обозначение

$$W_N = \exp\left(j \frac{2\pi}{N}\right),$$

при котором

$$def(k, i) = W_N^{ki}.$$

В этом случае, например, при  $i=0, 1, \dots, N-1$

$$D = \{def(k, i)\} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \dots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}.$$

Нулевая строка и нулевой столбец этой матрицы содержат только единичные элементы, т.к.  $W_N^0 = 1$ .

Поскольку ДЭФ являются  $N$ - периодическими, то эту матрицу можно переписать с минимальными фазами, образуящиеся после вычитания из произведения  $ki$  целого числа  $N$ . В этом смысле предыдущее представление матрицы ДЭФ следует считать представлением с *полными* фазами.

Аналогичными способами можно задать систему ДЭФ и на двустороннем интервале при  $i=-N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1$ .

Система Уолша-Хармута  $\{har(k, z)\}$ . Функции Уолша в этой системе располагаются в порядке увеличения числа знакоперемен на интервале определения. Эту систему также можно получить из системы Уолша-Пэли. При этом номер соответствующий функции Уолша системы Пэли равен коду Грея двоичного кода заданного номера функции Уолша системы Хармута. Код Грея образуется последовательным суммированием по модулю 2 соседних разрядов двоичного разложения, начиная с младшего:  $\langle k_m \rangle = k_m + k_{m+1} \pmod{2}$ ,  $m=1, 2, \dots, n$ ,  $k_{n+1}=0$ , где сложение по модулю два выполняется по правилам:  $0+0=0$ ;  $1+0=1$ ;  $0+1=1$ ;  $1+1=0$ . С учетом этого систему Хармута аналитически можно записать в виде:

$$har(k, z) = \prod_{m=1}^{\infty} [r(m, z)]^{\langle k_m \rangle} = (-1)^{\sum_{m=1}^{\infty} \langle k_m \rangle z_m}, \quad (4.23)$$

$$har(k, z) = \prod_{m=1}^n [r(m, z)]^{<k_m>} = (-1)^{\sum_{m=1}^n <k_m> z_m}.$$

Все три системы взаимосвязаны друг с другом, поскольку содержат одни и те же функции Уолша. Поэтому при конечном  $n$  их можно построить, используя одну систему (например, Пэли) в качестве базовой. В табл. 4.1. указаны номера функций Уолша системы Пэли, которые нужно использовать при построении систем Адамара и Хармута для  $N=8$ . Такие таблицы можно использовать при синтезе генераторов функций Уолша.

Таблица 4.1

Номер функции в системе	Номера функций Пэли		Номер функции в системе	Номера функций Пэли	
	для системы Адамара	для системы Хармута		для системы Адамара	для системы Хармута
000=0	000=0	000=0	100=4	001=1	110=6
001=1	100=4	001=1	101=5	101=5	111=7
010=2	010=2	011=3	110=6	011=3	101=5
011=3	110=6	010=2	111=7	111=7	100=4

Своим названием система Хармута обязана Х.Хармуту (H.Harmuth), который совместно с Ф.Пихлером получил ее диадной (двухзначной) модуляцией функций тригонометрической системы. Она является составной системой, т.к. в ней четные функции (относительно середины интервала определения) чередуются с нечетными. В этом смысле она подобна тригонометрической системе и для подчеркивания этого подобия авторы использовали специальное обозначение четных и нечетных функций, созвучных с аналогичными обозначениями тригонометрических функций:  $\{har(k, z)\} = \{cal(p, z); sal(p, z)\}$  (буквы  $s$  и  $c$  взяты из обозначения тригонометрических функций, а буквосочетание  $al$  – из записи фамилии Уолша - Walsh).

$$\begin{aligned} \text{При этом } cal(p, z) &= har(2p, z), & p &= 0, 1, \dots, \\ sal(p, z) &= har(2p-1, z), & p &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$



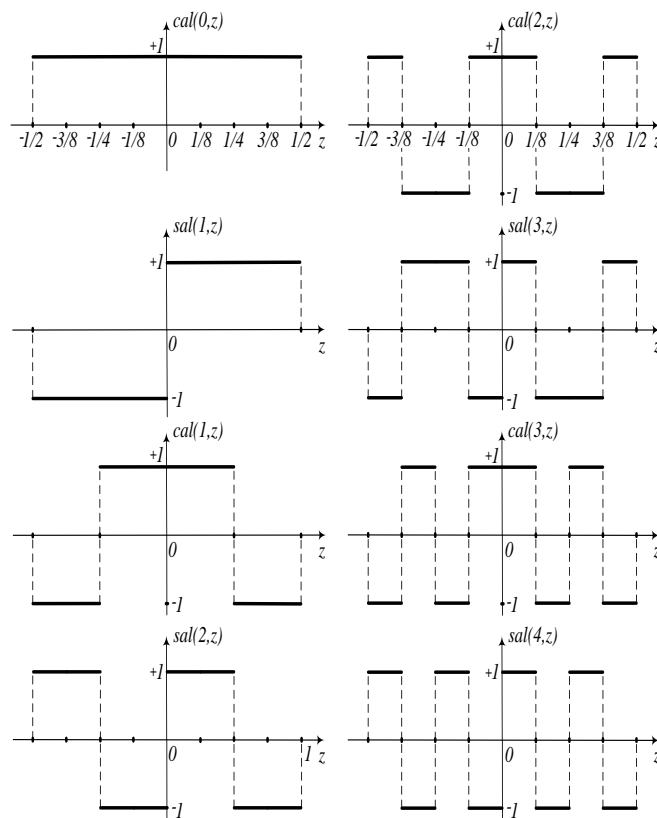


Рис. 4.1. Система функций Уолша-Хармута для  $N=8$  и  $z \in [-0,5; 0,5)$

Несмотря на то, что система Хармута является составной системой, номер  $p$  простых функций  $cal(p,z)$  и  $sal(p,z)$  в ней не имеет физического смысла частоты изменения, но соответствует частоте следования. Поэтому система Хармута упорядочена не по частоте, а по секвенте. Применение функций  $cal(p,z)$  и  $sal(p,z)$  позволило Хармуту создать свою теорию секвентного анализа, похожую на теорию частотного анализа, хотя и имеющую ряд принципиальных отличий.

Простые четные  $cal(p,z)$  и нечетные  $sal(p,z)$  функции могут быть использованы и для образования формальной и комплексной базисных систем на основе функций Уолша. Однако такие системы не получили широкого развития.

Так как все рассмотренные системы используют одни и те же функции Уолша, но в различной последовательности, то с общей точки зрения для представления математических функций и сигналов они равноправны. Различие этих систем может проявляться при формулировании отдельных свойств конкретных сигналов.

Приведем основные свойства непрерывных функций Уолша, образующих перечисленные базисные системы. Без потери общности рассмотрим только функции, определенные на интервале  $[0,1)$ . Так как свойства справедливы для всех систем Уолша, воспользуемся общим обозначением функций Уолша в виде  $wal(k,z)$ .

1. Ортогональность. Функции Уолша ортогональны на интервале их определения. Для них справедливо равенство

$$\int_0^1 wal(k, z) wal(m, z) dz = \delta_{k,m}.$$

2. Нормированность. Функции Уолша нормированы при любом  $k$ , так как

$$\int_0^1 [wal(k, z)]^2 dz = 1.$$

3. Периодичность. Любая функция Уолша есть периодическая функция с периодом, равным единице:

$$wal(k, z \pm 1) = wal(k, z).$$

4. Модуль и среднее функций Уолша. Так как функции Уолша принимают только значения  $\pm 1$ , то модуль функций Уолша равен единице, а среднее значение функций Уолша для всех  $k \neq 0$  равно нулю, т.е.:

$$|wal(k, z)| = 1; \int_0^1 wal(k, z) dz = 0.$$

5. Симметрия (двойственность). Так как  $k$  и  $z$  входят в выражения для функций Уолша (4.65), (4.67) и (4.70) в виде суммы произведений, которая не меняется при замене  $m$  на  $n+1-m$ , то любые выводы относительно переменной  $z$  справедливы и для переменной  $k$ , и наоборот. Исходя из этого, для функций Уолша выполняется равенство

$$wal(k, z) = wal(zN, k / N). \quad (4.25)$$

Для нормированного аргумента  $i/N$  запись свойства симметрии упрощается

$$wal(k, i / N) = wal(i, k / N). \quad (4.26)$$

6. Мультипликативность. Произведение двух функций Уолша равно другой функции этой же системы:

$$wal(k, z) \cdot wal(p, z) = wal(q, z), \quad (4.27)$$

причем

$$q = k(+)p. \quad (4.28)$$

Здесь  $(+)_2$  означает операцию поразрядного суммирования двоичных кодов чисел  $k$  и  $p$  по модулю два. Таким образом, для функций Уолша операцией мультипликативности является операция поразрядного сложения по модулю два. В комплексном экспоненциальном базисе такой операцией было обычное сложение. Интересным является так же и то, что в тригонометрических базисах свойством мультипликативности обладает только одна комплексная система, в то время как в системах Уолша мультипликативны действительные системы Пэли, Адамара и Хармута.

7. Порядок и ранг функций Уолша. Функции Уолша и их спектры бывает удобным характеризовать двумя параметрами, связанными с двоичным разложением их номеров. Первый из них определяет максимальный номер

ненулевого двоичного разряда  $k$  и называется *порядком* ( $P$ ). Второй параметр – *ранг* ( $R$ ) функции Уолша – показывает число двоичных разрядов, в которых число  $k$  содержит единицы. Так, например, функция  $wal(5, z) = wal(101, z)$  является функцией Уолша третьего порядка и второго ранга, т.е. для нее  $P=3$ , а  $R=2$ . Функции Радемахера, входящие в состав систем Уолша, в системах Пэли и Адамара являются функциями первого ранга.

Все рассмотренные базисные системы Уолша могут быть использованы для спектрального представления интегрируемых или интегрируемых с квадратом непрерывных сигналов  $x(t)$  с односторонним или двухсторонним конечным интервалом определения. Для этого необходимо переменную  $z$  по алгоритму (3.27) преобразовать в переменную  $t$ . Для сигналов  $x(t)$  с  $t \in [0, T)$  или  $t \in [-T/2, T/2)$  такое преобразование дает один и тот же результат:  $z = t/T$ . Поэтому для них непрерывный ряд Фурье-Уолша имеет следующий вид:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) wal(k, t/T),$$

где спектр Уолша  $X(k)$  равен

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_T x(t) wal(k, t/T) dt.$$

Здесь интегрирование ведется в пределах от 0 до  $T$  либо от  $-T/2$  до  $T/2$ . При этом равенство Парсеваля можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} X^2(k).$$

$$\text{Усеченный ряд Уолша } x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) wal(k, t/T)$$

при  $N \rightarrow \infty$  обладает равномерной и среднеквадратической сходимостью и может быть использован для аппроксимации сигналов, описываемых интегрируемыми или интегрируемыми с квадратом функциями. Особенно удобно использовать ряды Уолша для представления сигналов с разрывами первого рода (например, сигналов в виде прямоугольных импульсов), поскольку в этом случае отсутствуют погрешности аппроксимации, связанные с явлением Гиббса.

Так как функции Уолша имеют  $N$  участков знакопостоянства, то, например, формулу (4.83) можно преобразовать так:

$$X(k) = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) wal(k, t/T) dt = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{N-1} wal(k, i/N) \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt,$$

где  $t_i$  и  $t_{i+1}$  задают  $i$ -й подинтервал интервала определения ( $i$  – номер подинтервала). Обозначив  $\Phi(t) = \int x(t) dt$ , получим

$$X(k) = \frac{1}{T} \Phi\left(\frac{T}{N}\right) - \frac{1}{T} \Phi(0) + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N-1} wal(k, i/N) \{ \Phi[T(i+1)/N] - \Phi[Ti/N] \}.$$

Раскроем сумму в данном выражении и изменим порядок суммирования, тогда

$$X(k) = -\frac{1}{T}\Phi(0) + \frac{1}{T}\Phi(T/N)[wal(k,0) - wal(k,1/N)] + \dots \\ \dots + \frac{1}{T}\Phi[(N-1)T/N][wal(k,(N-2)/N) - wal(k,(N-1)/N)] + \\ + \Phi(T)wal(k,(N-1)/N).$$

В этой зависимости  $wal(k,(N-1)/N)$  – значение функции Уолша на последнем подинтервале. Для системы Пэли это значение при четном ранге  $k$  равно  $+1$ , а при нечетном равно  $-1$ . С учетом этого спектральный коэффициент Уолша-Пэли ранга  $r$

$$X(k(R=r)) = -\frac{1}{T}\Phi(0) + \frac{(-1)^r}{T}\Phi(T) + \frac{2}{T}\sum_{i=1}^{N-1}\Phi(Ti/N)\Gamma_i,$$

где

$$\Gamma_i = pal(k,(i-1)/N) - pal(k,i/N)$$

и равно  $+1$ , если функция  $pal(k,i/N)$  в точке  $i/N$  меняет знак с « $+$ » на « $-$ », равно  $-1$ , если функция  $pal(k,i/N)$  в точке  $i/N$  меняет знак с « $-$ » на « $+$ », и равно  $0$ , если данная функция в этой точке знака не меняет.

Нормированные функции Хаара являются многозначными функциями. Поэтому для практики спектральной обработки более удобными оказываются ненормированные функции Хаара, принимающие всего три простейших значения:  $0$ ,  $+1$  и  $-1$ . Такие функции аналитически задаются следующим выражением:

$$h(o,z) \equiv 1; h(k,z) = h(\gamma,m,z) = \begin{cases} +1 & \text{при } 2m2^{-(\gamma+1)} \leq z < (2m+1)2^{-(\gamma+1)}, \\ -1 & \text{при } (2m+1)2^{-(\gamma+1)} \leq z < (2m+2)2^{-(\gamma+1)}, \\ 0 & \text{при остальных } z \end{cases}$$

и имеют знакопеременный характер, причем во внутренних точках разрывов первого рода принимаются непрерывными справа.

Функции Хаара (4.116) ортогональны, т.к.

$$\int_0^1 h(k,z)h(p,z)dz = 0$$

при  $k \neq p$ . Мощности нулевой и первой функций равны по единице, а мощности остальных функций равны

$$P_k = P_{\gamma,m} = 2^{-\gamma}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Из этого выражения следует, что в пределах каждой группы собраны функции Хаара одинаковой мощности.

**ТЕМА №5.** Ортогональные преобразования в обобщенных базисах. Функции и преобразования Виленкина-Крестенсона. Обобщенные функции Крестенсона, Хаара. Теоретико-числовые преобразования. Системы дискретных базисных функций на основе чисел Фибоначчи. Обобщенные преобразования Фурье.

Функции Виленкина-Крестенсона (ВКФ) представляют собой кусочно-постоянные  $p$ -значные ( $p$  – целое положительное число) комплексные функции, определенные на интервалах  $[0, 1)$  и  $[-0,5; 0,5)$ . Аналитическое описание ВКФ  $Wal(k, z)$  непосредственно связано с представлением ее номера  $k$  и аргумента  $z$  в позиционной системе счисления с основанием  $p$  и зависит от способа этого представления. Если, например, при  $z \in [0, 1)$

$$k = \sum_{m=1}^{\infty} k_m p^{m-1} = \dots k_3 k_2 k_1, \quad (5.1)$$

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} z_m p^{-m} = 0, z_1 z_2 z_3 \dots,$$

где  $k_m$  и  $z_m$  – обозначения  $m$ -х разрядов  $p$ -ичных кодов чисел  $k$  и  $z$  соответственно ( $k_m, z_m = 0, 1, \dots, p-1$ ), то

$$Wal(k, z) = \exp\left(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^{\infty} k_m z_m\right), j = \sqrt{-1}. \quad (5.2)$$

Как следует из этого выражения, ВКФ представляет собой не одну базисную функцию, а семейство функций, отличающихся значением модулярного параметра  $p$  (основания системы счисления). При  $p=2$  функция  $\exp(j\pi) = -1$  и ВКФ переходит в функцию Уолша. По этой причине ВКФ можно рассматривать как *обобщение функций Уолша* на  $p$ -значный случай и использовать для их обозначения обозначения функций Уолша, но с заглавной буквы.

Ограничивая число разрядов в разложениях  $k$  и  $z$  (5.1) до конечной величины  $n$ , с помощью формулы (5.2) можно получить первые  $N=p^n$  непрерывные функции Виленкина-Крестенсона. При этом все функции будут иметь  $N$  участков постоянства, на которых их действительные и мнимые части могут принимать  $p$  различных значений. В этом случае удобно воспользоваться нормированными значениями аргумента  $z=i/N$ , где  $i$  будет являться номером участка постоянства интервала определения функции ( $i=0, 1, \dots, N-1$ ). Номер  $i$  можно представить с помощью его  $p$ -ичного кода

$$i = \sum_{m=1}^n i_m p^{m-1} = i_n i_{n-1} \dots i_2 i_1. \quad (5.3)$$

Нетрудно заметить, что систематические записи кодов чисел  $z$  и  $i$  отличаются инверсным порядком следования разрядов (см. (5.1) и (5.3)). Это связано с различием в диапазонах изменения этих чисел ( $i$  – целое, а  $z$  – дробное). Если данное обстоятельство учесть, то ВКФ с нормированным аргументом можно сразу выразить через разряды числа  $i$  без промежуточного перехода от  $i$  к  $z$ :

$$Wal(k, i / N) = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k_m i_{n+1-m}) = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k_{n+1-m} i_m). \quad (5.4)$$

Справедливость второй формулы в выражении (5.4) следует из того факта, что сумма произведений в экспоненте (5.4) не меняется при замене  $m$  на  $n+1-m$ . В этом проявляется свойство двойственности ВКФ, речь о котором пойдет ниже. Вторая формула записи ВКФ с нормированным аргументом чаще используется в литературе.

Из ВКФ (5.2) и (5.4) особое значение приобретают функции с одним значащим разрядом  $k_m=1$  в номере  $k$ . Эти функции определяются только  $p$ -ичным разложением своего аргумента. Подобным свойством в обычных функциях Уолша обладали функции Радемахера, поэтому такие функции можно считать *обобщенными функциями Радемахера*  $R(m, z)$  и  $R(m, i/N)$ :

$$R(m, z) = \exp(j \frac{2\pi}{p} z_m), \quad m=1, 2, \dots, \quad (5.5)$$

$$R(m, i / N) = \exp(j \frac{2\pi}{p} i_{n+1-m}), \quad m=1, 2, \dots, n.$$

Все ВКФ можно представить в виде произведений обобщенных функций Радемахера, взятых в определенной степени. Это позволяет записывать полные системы ВКФ с различным порядком следования функций.

Если поступить так же, как в обычных функциях Уолша, и представить ВКФ в виде произведения обобщенных функций Радемахера с номерами, совпадающими с номерами значащих разрядов  $p$ -ичного представления  $k$  (не содержащих 0), то будет получена система ВКФ, подобная системе Уолша-Пэли. По аналогии ее обычно называют *системой ВКФ-Пэли*. Она будет иметь следующий аналитический вид:

$$Pal(k, z) = \prod_{m=1}^n [R(m, z)]^{k_m}, \quad (5.6)$$

$$Pal(k, i / N) = \prod_{m=1}^n [R(m, i / N)]^{k_m},$$

а в экспоненциальной форме записи представляется выражениями (5.2) и (5.4). Из нее путем  $p$ -ичной инверсии кодов номеров  $k$  базисных функций можно получить *систему ВКФ-Адамара*

$$Had(k, z) = \prod_{m=1}^n [R(m, z)]^{k_{n+1-m}} = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k_{n+1-m} z_m), \quad (5.7)$$

$$Had(k, i / N) = \prod_{m=1}^n [R(m, i / N)]^{k_{n+1-m}} = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k_m i_m),$$

а используя обобщенный код Грея, – систему ВКФ-Хармута

$$Har(k, z) = \prod_{m=1}^n [R(m, z)]^{<k_m>} = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n <k_m> z_m), \quad (5.8)$$

$$Har(k, z) = \prod_{m=1}^n [R(m, i / N)]^{<k_m>} = \exp(j \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n <k_{n+1-m}> i_m).$$

В формулах (5.8)  $<k_m>$  означает  $m$ -й разряд обобщенного кода Грея числа  $k$ , вычисляемого путем последовательного суммирования по модулю  $p$  соседних разрядов числа  $k$ , начиная с младшего. Правило вычисления разрядов обобщенного кода Грея аналогично правилу вычисления обычного кода Грея и отличается только значением модуля  $p$ . При представлении  $k$  в виде (5.1) с конечным числом разрядов оно записывается так:  $<k_m> = (k_m + k_{m+1}) \bmod p, m = 1, 2, \dots, n$ ; величина  $k_{n+1}$  принимается равной нулю.

При  $p=2$  формулы (5.2), (5.4), (5.6) – (5.8) переходят в формулы обычных функций Уолша с упорядочением Пэли, Адамара и Хармута. При  $p=N$   $p$ -ичные коды чисел  $k$  и  $i$  содержат по одному разряду ( $n=1$ ) и ВКФ при любом способе упорядочения совпадают с функциями комплексной экспоненциальной системы:

$$Wal(k, i / N) = \exp(j \frac{2\pi}{N} k_1 i_1) = \exp(j \frac{2\pi}{N} ki). \quad (5.9)$$

По аналогии с обычными функциями Уолша-Пэли для ВКФ-Пэли также можно ввести понятие ранга, равного числу ненулевых разрядов  $p$ -ичного кода номера функции  $k$ . Номера ВКФ  $r$ -го ранга можно условно обозначить так же, как и для функций Уолша:  $k(R=r)$  и записывать их в следующем виде:

$$k(R=r) = k_{\mu_1} p^{\mu_1-1} + k_{\mu_2} p^{\mu_2-1} + \dots + k_{\mu_r} p^{\mu_r-1}. \quad (5.10)$$

Здесь параметры  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) служат для обозначения номеров значащих (не равных нулю) разрядов  $p$ -ичного кода числа  $k$ , а величины  $k_{\mu_i} = 1, 2, \dots, p-1$  – их значений.

Ранг произведения функций Виленкина-Крестенсона не превышает суммы их рангов. Подобное свойство отмечалось ранее для функций Уолша-Пэли и вытекает из особенности операции сложения по модулю  $p$ .

Для ВКФ-Пэли первого ранга значащим в числе  $k$  будет только один разряд  $\mu_1$ , поэтому  $k(R=1) = k_{\mu_1} p^{\mu_1-1}$ , где  $\mu_1 = 1, 2, \dots, n$ . Но параметр  $\mu_1$  пробегает здесь те же значения, что и номер разрядов  $m$ , и его можно заменить на  $m$ . Кроме того, переменные с индексами  $\{k_{\mu_1}\}$  в этом случае принимают одинаковые значения, поэтому их можно заменить на простую переменную  $\mu$ , записав номер первого ранга в более простом виде:  $k(R=1) = \mu p^{m-1}$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, p-1$ ;  $m = 1, 2, \dots, n$ . Тогда ВКФ-Пэли первого ранга примут следующий вид:

$$\begin{aligned} Pal(\mu p^{m-1}, z) &= \exp(j \frac{2\pi}{p} \mu z_m), \\ Pal(\mu p^{m-1}, i/N) &= \exp(j \frac{2\pi}{p} \mu i_{n+1-m}), \\ \mu &= 1, 2, \dots, p-1; m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Обобщенные функции Радемахера входят в состав ВКФ-Пэли первого ранга и совпадают с функциями  $Pal(\mu p^{m-1}, z)$  и  $Pal(\mu p^{m-1}, i/N)$ , для которых  $\mu=1$ . Поэтому

$$Pal(p^{m-1}, z) = R(m, z), \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} Pal(p^{m-1}, i/N) &= R(m, i/N), \\ Pal(\mu p^{m-1}, z) &= [R(m, z)]^\mu, \\ Pal(\mu p^{m-1}, i/N) &= [R(m, i/N)]^\mu. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Число обобщенных функций Радемахера в системах ВКФ равно  $n$ . При  $p=N$  и  $n=1$  (случай комплексного экспоненциального базиса) функция Радемахера одна. Интересно, что в этом случае все функции системы (кроме нулевой), являются функциями первого ранга.

Функции Виленкина-Крестенсона являются ортонормированными функциями, т.к. для них

$$\int_0^1 Wal(k, z) Wal^*(m, z) dz = \delta_{k,m}; \quad k, m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

( $\delta_{k,m}$  – символ Кронекера,  $Wal^*(m, z)$  – комплексно-сопряженная ВКФ), образуют полные базисные системы и могут быть использованы для спектрального представления математических функций с интегрируемым квадратом, определенных на интервале  $[0, 1)$ . ВКФ являются периодическими функциями с периодом, равным 1, поэтому их можно применить и для разложения функций с любым интервалом определения, длительностью 1, в частности и функций, определенных на симметричном интервале  $[-0,5; 0,5)$ .



Чтобы использовать ВКФ для разложения временных сигналов  $x(t)$ , необходимо переменную  $z$  преобразовать в переменную  $t$ . Для  $z \in [0,1)$  и  $t \in [0,T)$  это делается с помощью простой подстановки  $z=t/T$ . Преобразования Фурье и равенство Парсеваля в этом случае имеют следующий вид:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)Wal(k, t/T), \quad (5.15)$$

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)Wal^*(k, t/T)dt,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)X^*(k). \quad (5.16)$$

Поскольку ВКФ являются комплексными функциями и их спектры  $X(k)$  сигнала  $x(t)$  также комплексные, то в формуле прямого преобразования Фурье и в равенстве Парсеваля использованы комплексно-сопряженные функции  $Wal^*(k, t/T)$  и  $X^*(k)$ .

Для представления дискретных финитных сигналов  $x(i)$  ВКФ должны быть продискретизированы. Наиболее просто это выполняется путем подстановки в аналитические описания непрерывных ВКФ значений  $t=i\Delta t$  и  $T=N\Delta t$  ( $\Delta t$  – шаг дискретизации). В результате будут получены выражения для дискретных ВКФ, совпадающие с формулами (5.4), (5.6), (5.7), (5.8), (5.12) и (5.13), в которых индекс  $i$  будет задавать теперь номер отсчета функции (дискретное время).

Дискретная ВКФ является комплексной функцией с единичным модулем и фазой  $\theta(k,i) = \frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^n k_m i_m$ . Вычитая из  $\theta(k,i)$  целое число раз  $2\pi$ , можно минимизировать фазу ВКФ. При  $k = p^{m-1}$  дискретная ВКФ-Пэли переходит в обобщенную дискретную функцию Радемахера  $R(m,i/N)$ . В любой системе ВКФ содержится  $n$  обобщенных дискретных функций Радемахера. Каждая  $m$ -я функция Радемахера на интервале  $[0, N)$  имеет  $p^{m-1}$  периодов. Фаза такой функции

$$\theta(p^{m-1}, i) = \frac{2\pi}{p} i \quad (5.17)$$

при изменении  $i$  в пределах каждого периода линейно возрастает от 0 до  $2\pi$ .

Если при переходе с одного периода на другой фазу увеличивать на величину  $2\pi$ , то будет получена обобщенная функция Радемахера  $R(m,i/N)$  с полной фазой. Фаза такой функции при изменении  $i$  будет линейно возрастать от 0 до  $2\pi p^{m-1}$ . Обобщенные функции Радемахера с полными фазами позволяют восстановить систему ВКФ с полными фазами по ее записи с минимальными

фазами. ВКФ с полными фазами оказываются весьма полезными при рассмотрении частотных свойств ВКФ.

Дискретные ВКФ удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Wal(k, i/N) Wal^*(m, i/N) = \delta_{k,m}$$

и периодические с периодом  $N$

$$Wal(k, i/N) = Wal(k, (i \pm N)/N).$$

Они обладают свойствами симметрии (двойственности)

$$Wal(k, i/N) = Wal(i, k/N)$$

и двойной мультипликативности с базовой операцией в виде поразрядного сложения по модулю  $p$  :

$$\begin{aligned} Wal(k, i/N) &= 1/Wal^*(k, i/N), \\ Wal(k, i/N) \cdot Wal(m, i/N) &= Wal(q, i/N), \\ Wal(i, k/N) \cdot Wal(i, m/N) &= Wal(i, q/N), \end{aligned} \quad (5.18)$$

где

$$q = k(+)_{p} m$$

есть результат поразрядного сложения по модулю  $p$   $p$ -ичных кодов чисел  $k$  и  $m$ . Среднее значение всех дискретных ВКФ, за исключением нулевой, равно нулю, т.е.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Wal(k, i/N) = 0, \quad k \neq 0.$$

Так как на интервале  $[0, N)$  можно построить только  $N$  дискретных ВКФ, то система таких функций будет полной, поскольку ее нельзя будет дополнить на этом интервале ни одной новой функцией, ортогональной одновременно ко всем остальным функциям. Полные системы дискретных ВКФ можно записать и для других интервалов, длительностью из  $N$  точек, в частности, и для интервала  $[-N/2, N/2)$ .

Дискретные ВКФ, как и любые другие дискретные базисные функции, удобно записывать с помощью матриц. Матрицы ВКФ будут симметрическими и унитарными. Вне зависимости от упорядочения систем эти матрицы обладают рядом характерных свойств. Перечислим основные из них для строк матриц. В силу симметричности этих матриц данные свойства будут справедливы и для столбцов.

1. Матрицы ВКФ содержат ровно  $p$  различных элементов.

2. Элементы нулевой строки матриц равны единице. Действительно при  $k=0$  все  $k_m=0$  и вне зависимости от значений индекса  $i$  суммы произведений в формулах для ВКФ будут также равны нулю и, следовательно, ВКФ  $Wal(0, i/N)=1$ .

3. Для размерности матриц  $N=p^n$ , являющейся нечетным числом (тогда модуль  $p$  тоже является нечетным числом), в матрицах ВКФ нет других строк с действительными элементами. Для случая, когда  $N=p^n$  является четным числом (при этом модуль  $p$  может быть только четным числом), любая строка с

номером  $k$ , у которого разряды  $k_m=0$ ;  $p/2$ , состоит из действительных элементов. Общее число строк с действительными элементами в таких матрицах ВКФ составляет  $2^n$ . В матрицах функций Уолша ( $p=2$ ,  $N=2^n$ ) все строки действительные, а в матрице ДЭФ ( $p=N$ ,  $n=1$ ) действительными являются только две строки с номерами  $k=0$  и  $k=N/2$ .

4. Остальные строки в матрицах ВКФ содержат комплексные элементы, причем они попарно сопряжены. Номера комплексно-сопряженных строк  $k$  и  $k^*$  являются  $p$ -ично противоположными числами, т.е. связаны соотношением

$$k_m^* = (p - k_m)_p = (p - k_m) \pmod{p}. \quad (5.19)$$

Если учесть, что функции Радемахера являются функциями Уолша-Пэли первого ранга, то его можно переписать в следующем виде:

$$h(0, z) = pal(0, z) \equiv 1; \quad (5.20)$$

$$h(2^\gamma + m, z) = \begin{cases} pal(2^\gamma, z) & \text{при } m2^{-\gamma} \leq z < (m+1)2^{-\gamma}, \\ 0 & \text{при остальных значениях } z; \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\gamma = 0, 1, \dots; m = 0, 1, \dots, 2^\gamma - 1.$$

В такой форме записи взаимосвязь между функциями Хаара и Уолша может быть обобщена и из ВКФ-Пэли первого ранга получены базисные функции, которые будут являться обобщением обычных функций Хаара.

Нулевая обобщенная функция Хаара (ОФХ)  $H(0, z)$  принимается равной нулевой ВКФ-Пэли  $Pal(0, z)$  и во всех точках своего интервала определения  $[0, 1)$  равна  $W_p^0 = 1$ . Все остальные функции  $H(k, z)$  с помощью трехмерного представления их номера

$$k = \mu p^\gamma + m, \quad \gamma = 0, 1, \dots; \mu = 1, 2, \dots, p-1; m = 0, 1, \dots, p^\gamma - 1 \quad (5.22)$$

могут быть разбиты на группы и следующим образом выражены через ВКФ-Пэли первого ранга:

$$H(k, z) = H(\mu p^\gamma + m, z) = \begin{cases} Pal(\mu p^\gamma, z) & \text{при } m p^{-\gamma} \leq z < (m+1)p^{-\gamma}, \\ 0 & \text{при остальных значениях } z. \end{cases} \quad (5.23)$$

Параметр  $\gamma$  задает номер группы ОФХ, номер же конкретной функции в группе определяется с помощью индексов  $\mu$  и  $m$ . В обычных функциях Хаара номером функции в группе служил только индекс  $m$ .

Учитывая, что  $Pal(\mu p^\gamma, z) = [R(\gamma + 1, z)]^\mu$ , ОФХ можно выразить непосредственно через обобщенные функции Радемахера, точнее – через соответствующие степени обобщенных функций Радемахера:

$$H(\mu p^\gamma + m, z) = \begin{cases} [R(\gamma + 1, z)]^\mu & \text{при } m p^{-\gamma} \leq z < (m+1)p^{-\gamma}, \\ 0 & \text{при остальных значениях } z. \end{cases} \quad (5.24)$$

Алгоритм вычисления ОФХ в этом случае примет следующий вид записи:

$$H(0, i/N) = Pal(0, i/N) = W_p^0 = 1;$$

$$H(\mu p^\gamma + m, i/N) = \begin{cases} Pal(\mu p^\gamma, i/N) = [R(\gamma + 1, i/N)]^\mu, & m p^{n-\gamma} \leq i < (m+1)p^{n-\gamma}, \\ 0 & \text{при остальных значениях } i; \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\gamma = 0, 1, \dots, n-1; \mu = 1, 2, \dots, p-1; m = 0, 1, \dots, p^\gamma - 1.$$

ОФХ являются ортогональными функциями, поскольку для них

$$\int_0^1 H(k, z) H^*(\lambda, z) dz = 0 \quad \text{при } k \neq \lambda$$

и образуют полную базисную систему, пригодную для представления математических функций  $x(z)$  с интегрируемым квадратом на интервале  $[0, 1)$ . Они не удовлетворяют условию нормированности, поскольку их мощность зависит от номера функции. Это связано с тем, что в системе ОФХ первые  $p$  функций совпадают с первыми функциями системы ВКФ-Пэли, а остальные функции совпадают со значениями ВКФ-Пэли только на соответствующих подинтервалах общего интервала определения. Поэтому только первые  $p$  ОФХ имеют ненулевые значения на всем интервале  $[0, 1)$ . Это нулевая функция  $H(0, z)$  и функции нулевой группы (при  $\gamma = 0$ )  $H(\mu, z)$ . Функции последующих групп ( $\gamma = 1, 2, \dots$ ) имеют участки нулевых значений, длительность которых увеличивается с возрастанием номера группы. Это свойство ОФХ является обобщением аналогичного свойства обычных функций Хаара, где только две первые функции  $h(0, z)$  и  $h(1, z)$  не имеют нулей на интервале  $[0, 1)$ . По этой причине первые  $p$  ОФХ имеют единичную мощность ( $P_0 = P_1 = \dots = P_{p-1} = 1$ ), а мощность остальных функций можно вычислить по формуле

$$P_{\mu p^\gamma + m} = \int_{mp^{-\gamma}}^{(m+1)p^{-\gamma}} |Pal(\mu p^\gamma, z)|^2 dz = p^{-\gamma}.$$

Здесь учтено, что модуль ВКФ равен 1. Мощность ОФХ так же, как и для обычных функций Хаара, в пределах одной группы не меняется, а с увеличением номера группы убывает.

Для представления сигналов, являющихся функциями времени  $x(t)$  с интервалом определения  $[0, T)$ , аргумент  $z$  в ОФХ необходимо подстановкой  $z = t/T$  преобразовать в переменную  $t$ . Пара непрерывных преобразований Фурье-Хаара при этом запишется следующим образом:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) H(k, t/T) = X(0) + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^\gamma-1} X(\mu p^\gamma + m) H(\mu p^\gamma + m, t/T), \quad (5.26)$$

$$X(0) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (5.27)$$

$$X(k) = X(\mu p^\gamma + m) = \frac{p^\gamma}{T} \int_0^T x(t) H^*(\mu p^\gamma + m, t/T) dt = \frac{p^\gamma}{T} \int_{mTp^{-\gamma}}^{(m+1)Tp^{-\gamma}} x(t) Pal^*(\mu p^\gamma, t/T) dt.$$

Равенство Парсеваля также можно представить в трехмерном виде:

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = X(0) X^*(0) + \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^\gamma-1} X(\mu p^\gamma + m) X^*(\mu p^\gamma + m). \quad (5.28)$$

В выражениях (5.27) и (5.28) знаком  $*$  как и ранее отмечены комплексно-сопряженные величины.

Обобщенный ряд Хаара (5.26) обеспечивает равномерную и среднеквадратическую сходимость к сигналу  $x(t)$  и при конечном  $n$  становится усеченным. При его использовании для вычисления конкретного значения сигнала  $x(t_1)$  в произвольной точке  $t_1$  интервала  $[0, T)$  придется по формуле (5.26) суммировать не  $N$  слагаемых, а значительно меньшее их число, равное  $n(p-1)+1$ . Это объясняется тем, что при  $t_1$ , принадлежащему любому интервалу длительностью  $T/N$ , только  $n(p-1)+1$  ОФХ будут отличны от нуля. Это свойство обобщенных рядов Хаара является обобщением подобного свойства обычных усеченных рядов Хаара и делает их более экономичными по сравнению с рядами Виленкина-Крестенсона.

Наличие нулевых значений у ОФХ приводит к тому, что только первые  $p$  коэффициентов обобщенного спектра Хаара  $X(k)$  учитывают поведение сигнала на всем интервале его определения. Все остальные коэффициенты учитывают локальное поведение сигнала и на тем меньшем интервале, чем большее значение индекса  $\gamma$  в номере ОФХ. В этом проявляется избирательный характер обобщенного спектра Хаара, присущий также и обычному спектру Хаара.

Для спектрального анализа дискретных сигналов  $x(i)$  с  $i \in [0, N)$  могут быть использованы только дискретные ОФХ  $H(k, i/N)$ .

Если систему дискретных ОФХ представлять в матричном виде, то для матрицы значений ОФХ можно сформулировать ряд характерных свойств.

1. Матрица ОФХ содержит  $N$  строк и  $N$  столбцов и образуется из  $(p+1)$  различных элементов:  $W_p^0, W_p^1, \dots, W_p^{p-1}, 0$ . Комплексные элементы попарно сопряжены. Нумерация строк и столбцов в матрице начинается с нуля. Каждая ее строка совпадает с соответствующей функцией Хаара.

2. Нулевая строка матрицы ОФХ содержит только элементы  $W_p^0$ , равные 1. Следующие  $(p-1)$  ее строк содержат все различные элементы, кроме нулевых и совпадают со значениями ВКФ-Пэли первого ранга  $Pal(\mu, i/N)$ ,  $\mu=1, 2, \dots, n-1$ . Все последующие строки содержат все элементы, включая и нулевые. Эти строки можно разбить на  $(n-1)$  групп, причем каждая строка, принадлежащая группе с номером  $\gamma$  ( $\gamma=1, 2, \dots, n-1$ ), будет содержать  $p^{n-\gamma}$  ненулевых элементов и, следовательно,  $(p^n - p^{n-\gamma})$  элементов, равных нулю. Общее число нулевых элементов в матрице ОФХ равно  $p^n(p^n - np + n - 1)$ .

3. Сумма элементов всех строк матрицы, кроме нулевой, равна нулю. Сумма элементов нулевой строки равна  $N$ . Это говорит о том, что среднее значение всех ОФХ, кроме нулевой, равно нулю. Среднее значение нулевой функции равно единице.

4. Средние суммы произведений комплексно-сопряженных элементов первых  $p$  строк матрицы ОФХ равны по единице, а остальных строк,

принадлежащих каждой  $\gamma$ -й группе,  $-p^{-\gamma}$ . Отсюда следует, что мощности первых  $p$  ОФХ равны единице, а мощности остальных функций зависят от номера группы, к которой они принадлежат. С увеличением номера группы мощность убывает по закону показательной функции с основанием  $p$ .

5. Матрица ОФХ является унитарной и несимметрической.

Дискретный ряд Фурье в базисе ОФК можно записать в многомерном виде

$$x(i) = X(0) + \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^{\gamma}-1} X(\mu p^{\gamma} + m) H(\mu p^{\gamma} + m, i / N),$$

а для вычисления дискретного обобщенного спектра Хаара использовать следующие соотношения:

$$X(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i); \quad X(\mu p^{\gamma} + m) = \frac{p^{\gamma}}{N} \sum_{i=m p^{n-\gamma}}^{(m+1)p^{n-\gamma}} x(i) \text{Pal}^*(\mu p^{\gamma}, i / N),$$

$$\gamma = 0, 1, \dots, n-1; \mu = 1, 2, \dots, p-1; m = 0, 1, \dots, p^{\gamma}-1.$$

Равенство Парсеваля в дискретном варианте сохраняет многомерный вид:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x^2(i) = X(0) X^*(0) + \sum_{\gamma=0}^{n-1} p^{-\gamma} \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^{\gamma}-1} X(\mu p^{\gamma} + m) X^*(\mu p^{\gamma} + m). \quad (5.29)$$

Дискретный ряд Хаара обладает таким же свойством, что и усеченный непрерывный ряд Хаара, а именно: при его использовании для вычисления значения сигнала в конкретной точке необходимо просуммировать только  $n(p-1)+1$  сомножителей вида  $X(k)H(k, i/N)$ . Это связано с наличием большого числа нулевых значений в ОФХ. Данное свойство существенно повышает вычислительную эффективность базиса дискретных ОФХ, которая еще больше увеличивается за счет существования для него специальных процедур быстрого преобразования Фурье.

ОФХ являются немультимпликативными функциями, поэтому для их спектров не выполняются фундаментальные теоремы спектрального анализа (теоремы о сдвиге, модуляции, свертке и т.д.). Однако обобщенный дискретный спектр Хаара так же, как и его непрерывный аналог, обладает полезным избирательным свойством. Только первые  $p$  его спектральные коэффициенты  $X(0), X(1), \dots, X(p-1)$  носят глобальный характер и учитывают значения сигнала на всем интервале определения. Все остальные коэффициенты используют значения сигнала только на отдельных подинтервалах, длительность которых уменьшается с ростом номера группы функций Хаара, и в этом смысле являются локальными. В частности, спектральные коэффициенты последней группы функций вычисляются только по  $p$  соседним отсчетам сигнала. Свойства спектров конкретных сигналов в базисе ОФК практически не изучены. По аналогии с ВКФ рассмотрим для ОФК только спектры сигналов, описываемых степенными функциями.

Для постоянного сигнала  $x(i)=1$  обобщенный спектр Хаара

$$X^{(0)}(k) = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

и совпадает с соответствующим спектром ВКФ. Такой вид  $X^{(0)}(k)$  следует из свойства о среднем ОФК.

Для линейного сигнала  $x(i)=i$  аналитическая запись обобщенного спектра Хаара зависит от номера  $k$  его спектрального коэффициента. Спектральный коэффициент

$$X^{(1)}(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} iH(0, i/N) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} i = (N-1)/2.$$

Все остальные коэффициенты, соответствующие ОФХ определенных групп, в пределах одной группы имеют равные действительные составляющие и равные модули мнимых составляющих. Сами мнимые составляющие в пределах группы располагаются в кососимметричном порядке:

$$\text{Im}[X^{(1)}(\mu p^\gamma + m)] = -\text{Im}[X^{(1)}((p-\mu)p^\gamma + m)].$$

При этом в случае нечетного значения  $p$  все мнимые составляющие попарно сопряжены, а в случае его четного значения мнимые составляющие коэффициентов с  $\mu = p/2$  к тому же равны нулю. Кроме того, спектральные коэффициенты каждой последующей группы в  $p$  раз меньше соответствующих коэффициентов предыдущей группы, т.е.

$$X^{(1)}(\mu p^{\gamma+1} + m) = X^{(1)}(\mu p^\gamma + m) / p, \quad \gamma = 1, 2, \dots, n-2,$$

что приводит к равенству

$$X^{(1)}(\mu p^\gamma + m) = X^{(1)}(\mu) / p^\gamma, \quad \gamma = 1, 2, \dots, n-1.$$

При построении ортогональных базисных систем на основе ДЭФ

используется комплексная величина  $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ , которая является корнем порядка (степени)  $N$  из единицы по модулю  $N$  (т.к.  $W_N^N \equiv 1 \pmod{N}$ ). Однако корни порядка  $N$  из единицы существуют и в поле целых действительных чисел и их можно использовать для создания целочисленных базисов. Если величина  $\alpha$  является таким корнем, то функции  $\alpha^{ki}$  также образуют ортогональный базис, подобный базису ДЭФ. Базис таких функций лежит в основе так называемых *теоретико-числовых преобразований* (ТЧП), принадлежащих к еще одному классу обобщенных ДПФ.

Прямое и обратное ТЧП определяются выражениями

$$x(i) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \alpha^{ki} \pmod{M},$$

$$X(k) \equiv N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \alpha^{-ki} \pmod{M}$$

и осуществляют взаимнооднозначное соответствие между  $N$ -точечными последовательностями целых чисел  $\{x(i)\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  и  $\{X(k)\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  при выполнении следующих условий: модуль  $M$  является простым числом и не имеет общих сомножителей с  $N$ , число  $N$  является делителем функции Эйлера  $\varphi(N)$  (см. §2.6),  $\alpha$  есть корень порядка  $N$  из единицы по модулю  $M$  и взаимно простое с  $M$ , а числа  $(1-\alpha^k)$  являются взаимно простыми с  $M$  для всех  $k$ , за исключением тех, которые сравнимы с нулем по модулю  $N$ , т.е.  $(N, M) = (\alpha, M) = 1$ ,  $N | \varphi(N)$ ,  $\alpha^k \alpha^{-k} \equiv NN^{-1} \equiv 1 \pmod{M}$ , а  $\alpha^k$  не сравнимо с 1 по модулю  $M$  при  $k < N$ .

В ТЧП величины  $N^{-1}$  и  $\alpha^{-1}$  являются обратными по модулю  $M$  к числам  $N$  и  $\alpha$  соответственно. Число отсчетов  $N$  зависит от  $M$  и для простого  $M$  должно делить  $(M-1)$ , т.е.  $N | (M-1)$ . Таким образом, для любых простых  $M$  можно найти значения  $N$ , при которых существуют ТЧП. После этого остается только определить корень порядка  $N$  из единицы по модулю  $M$  и ТЧП будет задано.

ТЧП по структуре подобны ДПФ. Отличия состоят только в том, что в них в качестве комплексной экспоненты  $W_N$  используется целое число  $\alpha$  и все вычисления выполняются не по модулю  $N$ , а по модулю  $M$ , отличному от  $N$ . Поэтому ТЧП являются вещественными преобразованиями. Поскольку модулярная арифметика не допускает округлений, то вычисления ТЧП осуществляются с высокой инструментальной точностью. Числа  $X(k)$  в ТЧП можно интерпретировать как теоретико-числовой спектр последовательности отсчетов входного сигнала  $x(i)$ .

Базис ТЧП  $\{\alpha^{ki}\}$  аналогичен базису ДЭФ и обладает такими же свойствами. Аналитическая запись этих свойств должна при необходимости учитывать модулярность используемой арифметики. Базис является ортонормированным, т.к.

$$N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha^{ki} \cdot \alpha^{-mi} \equiv \delta_{k,m} \pmod{M} \text{ при } k \neq m.$$

Среднее значение нулевой базисной функции равно единице, а среднее значение остальных функций равно нулю:

$$N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha^{ki} \equiv \begin{cases} 1 \pmod{M} & \text{при } k = 0, \\ 0 \pmod{M} & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Базисные функции являются периодическими с периодом  $N$  по обоим индексам  $k$  и  $i$ :  $\alpha^{(N+k),i} \equiv \alpha^{ki} \pmod{M}$  и  $\alpha^{k(N+i)} \equiv \alpha^{ki} \pmod{M}$ . Это свойство легко доказывается, если учесть, что  $\alpha^{Nn} \equiv 1 \pmod{M}$  при любом целом  $n$ . Из периодичности базиса следует периодичность его спектра  $X(N+k) = X(k)$  и его симметрия  $X(N-k) = X(-k)$ . Для базисных функций справедливы также свойства двойственности и двойной мультипликативности:

$$\alpha^{ki} = \alpha^{ik},$$



$$\alpha^{ki} \cdot \alpha^{mi} = \alpha^{ni}, \text{ где } n \equiv (m+k) \pmod{N},$$

$$\alpha^{ki} \cdot \alpha^{km} = \alpha^{kn}, \text{ где } n \equiv (i+m) \pmod{N}.$$

Последнее свойство может быть использовано для синтеза быстрых процедур вычисления ТЧП.

Энергетические соотношения между  $x(i)$  и  $X(k)$  в ТЧП можно выразить с помощью равенства Парсеваля, которое в этом случае имеет следующий модулярный вид:

$$N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} x^2(i) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X(-k) \pmod{M} \equiv \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X(N-k) \pmod{M}.$$

Здесь спектр  $X(-k) = X(N-k)$  играет ту же роль, что и комплексно-сопряженный спектр в ДПФ. Равенство Парсеваля подтверждает полноту базиса ТЧП и справедливость прямого и обратного ТЧП.

ТЧП можно записать и в матричной форме:

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{T}\mathbf{X} \pmod{M},$$

$$\mathbf{X} \equiv N^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} \pmod{M},$$

где  $\mathbf{T} = [\alpha^{ki}]$  и  $\mathbf{T}^{-1} = [\alpha^{-ki}]$  являются прямой и обратной матрицами ТЧП. Прямая матрица ТЧП

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha^{N-1} & \alpha^{2(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \pmod{M}$$

по структуре близка к матрице  $\mathbf{D}$  ДЭФ и обладает схожими свойствами. Она является ортогональной и симметрической матрицей с  $N$  различными действительными целочисленными элементами, причем нулевая строка и нулевой столбец ее состоят только из единичных элементов, а элементы остальных строк и столбцов равны вычетам числа  $\alpha$  в соответствующей степени по модулю  $M$ . При вычитании из степени числа  $\alpha$  целого числа  $N$  образуется запись матрицы  $\mathbf{T}$ , подобная записи матрицы ДЭФ с минимальными фазами. В этом случае ТЧП будет содержать только элементы  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{N-1}$ . Обратная матрица ТЧП образуется из тех же элементов, но с другим порядком их следования. Так как  $\alpha^{-ki} \equiv \alpha^{(-k)i} \equiv \alpha^{(N-k)i} \pmod{M}$ , то обратная матрица  $\mathbf{T}^{-1}$  легко получается из прямой матрицы  $\mathbf{T}$  простой симметричной перестановкой строк последней (по закону  $N-k$ ). Тогда  $t_{k,i}^{-1} = t_{(N-k),i}$ , где  $t_{k,i}^{-1}$  и  $t_{k,i}$  – элементы обратной и прямой матриц ТЧП соответственно.

Совпадения структур матриц ТЧП и ДПФ приводит к совпадению свойств ТЧП. Для ТЧП выполняются все теоремы спектрального анализа, справедливые для ДПФ, в частности теорема линейности и теоремы о сдвиге,

свертке и корреляции. Временной сдвиг в ТЧП также реализуется с помощью модулярного алгебраического сложения, т.е. является циклическим. Поэтому ТЧП могут рассматриваться в качестве вещественной альтернативы комплексным ДПФ.

Используя ТЧП для обработки реальных сигналов, следует учитывать целочисленный характер ТЧП. Поэтому в общем случае отсчеты сигналов необходимо масштабировать к целочисленному диапазону. Все вычислительные операции в ТЧП должны выполняться в целочисленной модулярной арифметике, сложность которой определяется модулем преобразования  $M$ . От модуля зависит и разрядность машинных слов в ТЧП, при правильном выборе которой расчетные результаты будут совпадать с истинными (иначе они могут оказаться только сравнимыми с ними) и исключаются переполнения разрядной сетки.

Преобразования задают семейство ТЧП, различающихся числами  $\alpha$ , которые в свою очередь зависят от модуля  $M$ . Для упрощения вычислений ТЧП выбирают обычно модули наиболее простого представления. Наилучшее в этом смысле число  $M=2$ . Однако тогда максимальная длина преобразуемой числовой последовательности  $N$  равна 1. Поэтому  $M=2$  и вообще  $M=2^n$  не имеет практического смысла. Аналогично, если  $M$  есть четное число, то один из сомножителей  $M$  равен 2 и максимальная длина последовательности опять равна 1. Следовательно, представляют интерес только нечетные  $M$ . Предъявляемым требованиям удовлетворяют числа  $M = 2^n - 1$  и  $M = 2^n + 1$ .

Рассмотрим сначала числа  $M = 2^n - 1$ . Число  $n$  здесь может быть составным и простым. Наибольшее значение  $N$  будет при простом  $n=p$ , потому что при составном  $n=pt$  число  $2^p - 1$  является множителем числа  $2^n - 1$  и максимальное значение  $N$  не превысит величины, соответствующей  $2^p - 1$ . Таким образом, наибольший интерес представляет случай, когда  $n$  – простое. Целые числа вида  $2^p - 1$ , где  $p$  – простое, есть числа Мерсенна, поэтому ТЧП по модулю чисел Мерсенна называются *теоретико-числовыми преобразованиями Мерсенна* (ТЧПМ).

При любых  $M = 2^p - 1$  (простых и составных) возможно построение двух видов ТЧПМ:  $p$ -точечных (одинарных) и  $2p$ -точечных (удвоенных) ТЧП. Для первых  $\alpha = 2$  и  $N = p$ , поэтому

$$x(i) \equiv \sum_{k=0}^{p-1} X(k) 2^{ki} \pmod{2^p - 1}, \quad (5.91)$$

$$X(k) \equiv p^{-1} \sum_{i=0}^{p-1} x(i) 2^{-ki} \pmod{2^p - 1}.$$

Для вторых  $\alpha = -2$ ,  $N = 2p$  и

$$x(i) \equiv \sum_{k=0}^{2^p-1} X(k)(-2)^{ki} \pmod{(2^p-1)},$$

$$X(k) \equiv (2^p)^{-1} \sum_{i=0}^{2^p-1} x(i)(-2)^{-ki} \pmod{(2^p-1)},$$

где  $(-2)^{-ki} \equiv (-2)^{(2^p-1)ki} \pmod{(2^p-1)}$ . Чаще всего используются ТЧПМ для простых  $M$ , для которых первые 15 значений  $p$  равны: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 31; 61; 89; 107; 127; 521; 1279. В арифметике по модулю чисел Мерсенна, известной как арифметика в обратных кодах, такие сдвиги реализуются с помощью циклических сдвигов двоичного кода на  $n$  разрядов влево. При сложении двух чисел в такой арифметике учитывается перенос из старшего разряда, который суммируется с младшим разрядом. Важной особенностью ТЧПМ является то, что для них разрядность представления данных должна точно равняться числу отсчетов  $p$  и при больших  $p$  также будет большой.

Базис Фибоначчи является полным базисом и может быть использован для спектрального представления любых решетчатых сигналов и функций ограниченной мощности. Дискретные преобразования Фурье и равенство Парсеваля в нем имеют типичный для дискретных базисов вид записи и могут быть получены из общих выражений, если положить в них  $\varphi(k, i) = \text{fib}(k, i)$ . Прямое преобразование Фурье-Фибоначчи можно представить в более удобной для вычислений форме:

$$X(k) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \text{fib}(k, i) = \begin{cases} [\sum_{i=0}^k x(i) f_{i+1} - x(k+1) f_{k+1}] / (f_{k+1} f_{k+3}), & k \neq N-1, \\ [\sum_{i=0}^{N-1} x(i) f_{i+1}] / (f_N f_{N+1}), & k = N-1. \end{cases}$$

Спектр сигнала в базисе Фибоначчи также тесно связан с самими числами Фибоначчи. Приведем два примера спектров Фибоначчи конкретных сигналов.

Все рассмотренные ранее преобразования Фурье определяют взаимоднозначное соответствие между сигналом, заданным непрерывной либо дискретной функцией времени, и его спектром в выбранной базисной системе. Геометрически это соответствует установлению взаимосвязи между вектором сигнала и его проекциями в заданной системе координат. Однако в спектральном анализе возможна более общая постановка, при которой определяется взаимосвязь между различными спектрами одного и того же сигнала. С геометрической точки зрения в этом случае устанавливается взаимосвязь между проекциями вектора сигнала в различных системах координат. Так как при этом сам сигнал остается неизменным, то связь между проекциями (спектрами) можно выразить аналитически.

С целью обобщения теоретических выкладок при выводе формул взаимопреобразования спектров для непрерывных и дискретных сигналов вновь воспользуемся наиболее общей записью преобразований Фурье в виде

скалярных произведений. Пусть в функциональном пространстве с базисами  $\{\varphi(k,t)\}$  и  $\{\psi(m,t)\}$  сигнал  $x(t)$  представляется в виде

$$x(t) = (X_\varphi(k), \varphi(k,t))_k,$$

$$x(t) = (X_\psi(m), \psi(m,t))_m,$$

и имеет спектры

$$X_\varphi(k) = (x(t), \varphi(k,t))_t / P_k^\varphi,$$

$$X_\psi(m) = (x(t), \psi(m,t))_t / P_m^\psi.$$

В этих выражениях  $P_k^\varphi$  и  $P_m^\psi$  означают мощности соответствующих базисных функций, время  $t$  может быть как непрерывным, так и дискретным (в последнем случае фактически  $t=i$ ), а внешние круглые скобки означают скалярное произведение по соответствующей переменной. Если  $t$  непрерывно, то скалярное произведение понимается в смысле интегрирования, при дискретном же характере  $t$  – в смысле суммирования. Нормирующие множители  $1/T$  и  $1/N$ , используемые в обратных преобразованиях для сигналов, определенных на конечных интервалах времени, считаем входящими в запись соответствующих скалярных произведений.

Если спектр  $X_\psi(m)$  сигнала  $x(t)$  известен, то его спектр  $X_\varphi(k)$  можно определить путем подстановки формулы в выражение для  $x(t)$ . Тогда после преобразований получаем, что

$$X_\varphi(k) = (X_\psi(m), \Phi(k,m))_m,$$

где функция двух переменных  $k$  и  $m$

$$\Phi(k,m) = (\psi(m,t), \varphi(k,t))_t / P_k^\varphi$$

является *ядром* линейного преобразования спектра одной базисной системы в спектр другой базисной системы для одного и того же сигнала. Ее называют еще *ядром Фурье*.

Обратный переход от спектра  $X_\varphi(k)$  к спектру  $X_\psi(m)$  можно выполнить по формуле

$$X_\psi(m) = (X_\varphi(k), \Phi^{-1}(m,k))_k,$$

где

$$\Phi^{-1}(m,k) = (\varphi(k,t), \psi(m,t))_t / P_m^\psi$$

есть ядро обратного преобразования спектров. В комплексных базисных системах в выражениях для ядер одна из базисных функций должна быть комплексно-сопряженной:

$$\Phi(k,m) = (\psi(m,t), \varphi^*(k,t))_t / P_m^\varphi,$$

$$\Phi^{-1}(m,k) = (\varphi(k,t), \psi^*(m,t))_t / P_m^\psi.$$

В случае базисов одинаковой мощности ядра прямого и обратного преобразований совпадают.

Таким образом, различные спектры одного и того же сигнала всегда связаны линейным функциональным оператором, который полностью определяется своим ядром Фурье. В свою очередь ядро Фурье определяется только базисами используемого пространства. Выражения представляют собой наиболее общую форму преобразования Фурье. В частном случае, когда один из спектров является сигналом, они совпадают с обычными преобразованиями Фурье. Действительно, так как  $x(t)$  можно рассматривать как спектр в базисе

$$\psi(m, t) = \begin{cases} \delta(t - m\Delta t), \\ \delta(i - m) \end{cases}$$

(в зависимости от того, является сигнал непрерывным либо дискретным), то получаем, что ядро  $\Phi(k, m)$  совпадает с базисной функцией  $\varphi(k, t)$

$$\Phi(k, m) = \varphi(k, t) / P_k^\varphi.$$

При обобщенном преобразовании спектров равенство Парсеваля принимает следующий вид:

$$(X_\varphi(k), X_\varphi(k)P_k^\varphi)_k = (X_\psi(m), X_\psi(m)P_m^\psi)_m.$$

Если хотя бы один из базисов является комплексным, то в последнем выражении один из спектров в соответствующем скалярном произведении должен быть комплексно-сопряженным.

Ядра Фурье имеют простой физический смысл: это спектр одних базисных функций по системе других базисных функций. Функции  $\{\Phi(k, m)\}$ , образующие ядра Фурье, обладают свойствами полноты и ортогональности, т.к.

$$(\Phi(k, t), \Phi(m, t))_t = 0, \quad k \neq m.$$

Поэтому они, в свою очередь, могут быть использованы в качестве базисных функций для спектрального анализа сигналов.

Полная и ортогональная система функций  $\{\Phi(k, m)\}$  по своим общим свойствам ничем не отличается от любой другой системы, пригодной для разложения сигналов. Эта система может быть простой, и тогда она годится для отображения спектров на одностороннем интервале; она может быть составной, формальной и комплексной, и тогда она пригодна для отображения спектров на симметричных интервалах. Используя систему  $\{\Phi(k, m)\}$ , следует, однако, иметь в виду, что ядра Фурье как базисная система функций обладают существенными недостатками, а именно: эти системы не являются мультипликативными и в общем случае несимметрические.

В дискретном варианте обобщенные преобразования Фурье удобно записывать в матричном виде

$$\begin{aligned} X_\varphi &= \Phi X_\psi, \\ X_\psi &= \Phi^{-1} X_\varphi, \end{aligned}$$

где  $X_\varphi$  и  $X_\psi$  — матрицы-столбцы спектров в базисах  $\{\varphi(k, i)\}$  и  $\{\psi(m, i)\}$  соответственно, а  $\Phi$  — матрица ядра Фурье, имеющая в общем случае следующий вид:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi(0,0) & \Phi(0,1) & \dots & \Phi(0,N-1) \\ \Phi(1,0) & \Phi(1,1) & \dots & \Phi(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(N-1,0) & \Phi(N-1,1) & \dots & \Phi(N-1,N-1) \end{bmatrix}.$$

Обобщенные преобразования Фурье могут оказаться полезными при решении задач обработки, связанных с взаимопреобразованием спектров в различных базисах. Эффективность их применения во многом зависит от свойств ядер этих преобразований, которые в свою очередь связаны со свойствами используемых базисных систем. Для систем базисных функций, находящихся наиболее широкое применение в обработке сигналов, свойства ядер хорошо изучены и приведены в литературе.

Ниже в качестве примера рассмотрим ядра Фурье для ЭФ и ВКФ. Ограничимся только дискретным вариантом базисных функций.

При преобразовании спектров из базиса ДЭФ в базис дискретных ВКФ  $\psi(m,i) = \text{def}(m,i)$ , а  $\varphi(k,i) = \text{Wal}(k,i)$ . Ядро Фурье в этом случае в развернутой форме записи представляется следующим образом:

$$\Phi(k,m) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \text{def}(m,i) \text{Wal}^*(k,i) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{mi} \text{Wal}^*(k,i).$$

Поскольку аналитическая запись ВКФ  $\text{Wal}^*(k,i)$  зависит от способа их упорядочения в системе, то, очевидно, от него же будет зависеть и вид ядра  $\Phi(k,m)$ .

Особенности структуры ядра Фурье преобразования спектров базисов ДЭФ и ВКФ можно наглядно пояснить, используя геометрические представления. Система координат Виленкина-Крестенсона развернута в пространстве относительно комплексно-экспоненциальной системы так, что многие оси координат одной системы становятся ортогональными осям другой системы. Им соответствуют нулевые значения элементов матрицы ядра. Неортогональными оказываются только те оси, номера которых принадлежат к одной из независимых групп. Им соответствуют ненулевые значения элементов матрицы ядра. Кроме того, у этих систем есть  $p$  совпадающих осей: им соответствуют единичные значения элементов матрицы ядра Фурье.

Наличие нулевых элементов в матрице ядра Фурье позволяет сократить число вычислительных операций при взаимопреобразованиях комплексно-экспоненциальных спектров и спектров Виленкина-Крестенсона и создать так называемые быстрые алгоритмы преобразования спектров.

**ТЕМА №6.** Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Вычислительная сложность алгоритма. Быстрые алгоритмы вычисления частного спектра, преобразований Уолша, Виленкина-Крестенсона, Хаара. Матричные методы синтеза быстрых преобразований.

Сложность вычислительного алгоритма, предназначенного для программирования, было бы логично численно выражать с помощью тех же реализационных характеристик, что используются для оценки программ. К таким характеристикам относят обычно время выполнения программы и объемы памяти, используемые при её реализации. Однако данные характеристики во многом зависят от архитектуры и быстродействия применяемого процессора и квалификации программиста. Поэтому в теории ЦОС на алгоритмическом уровне для характеристики вычислительной сложности алгоритмов ЦОС используются только те показатели, которые могут быть получены непосредственно по алгоритмам без учёта элементной базы и профессионального мастерства программистов. К таким показателям относятся число вычислительных операций (алгебраических вещественных или комплексных сложений ( $A$ ), вещественных или комплексных умножений ( $M$ ), двоичных сдвигов на один разряд ( $C$ )), количество входных, выходных и промежуточных данных ( $Q$ ) и число констант ( $L$ ), используемых в алгоритме.

В простых алгоритмах значения их сложностных показателей можно легко подсчитать, поэтому величины  $A$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $Q$  и  $L$  принимают точные значения. В сложных алгоритмах прямой подсчет этих показателей обычно невозможен, поэтому пользуются их оценочными значениями. Для записи оценок используют оценочную функцию  $O(\cdot)$ , устанавливающую пропорциональное соответствие между показателем сложности и параметрами алгоритма. К числу таких параметров в теории сигналов относится, например, количество отсчетов  $N$  обрабатываемого сигнала. Тогда запись вида  $A = O(N^3)$  будет означать, что число сложений в алгоритме пропорционально кубу величины  $N$  и при больших значениях  $N$  может достигать существенной величины.

Любой алгоритм ЦОС можно описывать либо через соотношение между входом и выходом, либо детально объясняя его внутреннюю структуру. Обычно при решении новой задачи используется первый способ, поскольку в этом случае при заданном сигнале или записанных некоторым образом данных основное внимание сосредотачивается на том, что надо с этими данными сделать, т.е. каков должен быть выход алгоритма при известном его входе. Примерами такого выхода могут служить свернутая (циклически или линейно) версия входа либо его преобразование Фурье в некотором базисе. Такая связь входа с выходом в алгоритме математически может быть записана без детального выписывания всех шагов, необходимых для выполнения

вычислений. Эти алгоритмы могут быть записаны математической формулой и, следовательно, вычислены в прямом соответствии с этой записью. Такую запись алгоритма вычислений называют *прямой*.

В отличие от нее при второй форме записи алгоритма выполняется детальное описание вычислительной процедуры, которая не является очевидным способом вычисления выхода по заданному входу, хотя и приводит к такому же результату. Если в этом случае концептуальная ясность вычислений жертвуется в пользу эффективности, что приводит к улучшению показателей сложности  $A$ ,  $M$  и  $C$ , то такую запись алгоритма называют *быстрой*.

Обычно быстрые алгоритмы (БА) получают с помощью определенной модификации прямых алгоритмов. Эта модификация и составляет существо используемых методов синтеза БА. Приведем несколько простых примеров прямых и быстрых алгоритмов.

Прямой алгоритм вычисления линейной свертки задается выражением. Его можно выразить через произведение полиномов, если использовать для сигналов  $x(i)$  и  $y(i)$  и функции ядра  $F(i)$  их представление в виде полиномов  $X(z)$ ,  $Y(z)$  и  $F(z)$  формальной переменной  $z$ . Вычисление свертки с помощью прямого произведения полиномов не приводит к экономии вычислительных операций. Их число в этом случае остается таким же, как и при реализации прямого алгоритма, и равно

$$M_{\pi} = N_1 N_2, \quad (6.1)$$

$$A_{\pi} = \begin{cases} (N_1 + N_2 - 2)^2 / 4 & \text{при } N_1 + N_2 \text{ четном,} \\ (N_1 + N_2 - 1)(N_1 + N_2 - 3) / 4 & \text{при } N_1 + N_2 \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (6.2)$$

При больших значениях  $N_1$  и  $N_2$  число этих операций становится существенным.

При полиномиальной записи свертки в виде полиномы сигналов и функции ядра задаются с помощью их коэффициентов, в качестве которых используются отсчеты сигналов и функции. Однако возможен еще один способ задания полиномов. Любой полином степени  $N-1$  может быть задан его значениями в  $N$  точках. Произведение двух полиномов  $X(z)$  степени  $N_1-1$  и  $F(z)$  степени  $N_2-1$  соответственно является полиномом  $Y(z)$  степени  $N_1+N_2-2$  и может быть задан значениями в  $N_1+N_2-1$  точках. Это приводит к другому методу умножения полиномов, а, следовательно, и вычисления линейной свертки.

Суть этого метода состоит в том, что выбираются  $N_1+N_2-1$  значений формальной переменной  $z$ , т.е. точки  $z_i, i=0, 1, \dots, N_1+N_2-2$  и для них вычисляются значения полиномов входного сигнала  $X(z_i)$  и функции ядра свертки  $F(z_i)$ . Затем вычисляются произведения

$$Y(z_i) = X(z_i)F(z_i), \quad i=0, 1, \dots, N_1+N_2-2. \quad (6.3)$$



Очевидно искомым полином  $Y(z)$  выходного сигнала  $y(i)$  полностью будет определен этими значениями и может быть восстановлен по ним с помощью полиномиальной интерполяции, в частности, по интерполяционной формуле Лагранжа:

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{N_1+N_2-2} Y(z_i) L_i(z), \quad (6.4)$$

где функции

$$L_i(z) = \prod_{j \neq i} \frac{(z - z_j)}{(z_i - z_j)} \quad (6.5)$$

являются полиномами Лагранжа. Вычисление  $Y(z)$  через значения  $X(z_i)$  и  $F(z_i)$  с последующим применением интерполяции Лагранжа составляет существо алгоритма Тоома-Кука вычисления линейных сверток.

Оценим сложность алгоритмов Тоома-Кука. На этапе вычисления значений  $X(z_i)$  и  $F(z_i)$  полиномов  $X(z)$  и  $F(z)$  необходимо затратить  $(N_1 + N_2 - 1)(N_1 + N_2 - 2)$  умножений отсчетов  $x(i)$  и  $F(i)$  на константы  $z_i^\kappa$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_1 + N_2 - 2$ ;  $\kappa = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 - 2$  и  $(N_1 + N_2)^2$  сложений произведений. На этапе вычисления значений  $Y(z_i)$  полинома  $Y(z)$  следует выполнить еще  $N_1 + N_2 - 1$  умножений по формуле (6.3). Ну и, наконец, на этапе восстановления полинома  $Y(z)$  по интерполяционной формуле (6.4) также возникают дополнительные умножения на константы и сложения, число которых зависит от сложности и числа интерполяционных полиномов (6.5). Таким образом, в общем случае при произвольных значениях  $N_1$  и  $N_2$  алгоритмы Тоома-Кука потребуют для своей реализации не менее  $(N_1 + N_2 - 1)^2$  умножений и  $(N_1 + N_2)^2$  сложений.

Однако, если  $N_1$  и  $N_2$  малы, то тогда для представления полиномов можно использовать значения  $z_i$  в виде целых чисел  $0, \pm 1$  и  $\pm 2$ . В этом случае умножения на константы либо исключаются, либо заменяются на сдвиги. Число умножений становится равным  $N_1 + N_2 - 1$  и по сравнению с прямым алгоритмом уменьшается. Правда, это уменьшение достигается за счет увеличения числа сложений. Таким образом, алгоритм Тоома-Кука может оказаться быстрым только для небольших значений величин  $N_1$  и  $N_2$ , т.е. при вычислении коротких сверток.

Число сложений в алгоритмах Тоома-Кука можно сократить без изменения числа умножений, если использовать следующую его модификацию. Заметим, что в линейной свертке последнее её значение  $y(N_1 + N_2 - 2) = x(N_1 - 1)F(N_2 - 1)$ . Для его вычисления необходимо только одно умножение. Сформируем модифицированный полином

$$T(z) = Y(z) - y(N_1 + N_2 - 2)z^{N_1+N_2-2} = X(z)F(z) - y(N_1 + N_2 - 2)z^{N_1+N_2-2},$$

степень которого равна  $N_1 + N_2 - 3$  и вычислим этот полином по алгоритму Тоома-Кука. Тогда общее число умножений останется прежним, а число сложений, которое зависит от степени полинома, уменьшится.

Алгоритм Тоома-Кука не является единственным для коротких сверток. Известен еще один алгоритм – *алгоритм Винограда*, который основывается на полиномиальном представлении круговой свертки по модулю полинома  $z^N - 1$  с использованием китайской теоремы об полиномиальных вычетах.

Полином  $z^N - 1$  может быть разложен в произведение  $m$  неприводимых полиномов, которые называются *циклотомическими полиномами* или *полиномами деления круга*:

$$z^N - 1 = \prod_{j=1}^m M_j(z).$$

Тогда общая последовательность вычисления свертки такова:

1. Полиномы  $X(z)$  и  $F(z)$  приводятся по модулю полиномов  $M_j(z)$ , т.е. находятся вычеты

$$X_j(z) \equiv X(z) \pmod{M_j(z)},$$

$$F_j(z) \equiv F(z) \pmod{M_j(z)}.$$

2. Вычисляются  $m$  произведений  $Y_j(z) = X_j(z)F_j(z) \pmod{M_j(z)}$ .

3. По этим произведениям с помощью КТО для полиномов восстанавливается полином свертки  $Y(z)$ .

Сложность такого алгоритма во многом будет определяться сложностью циклотомических полиномов  $M_j(z)$ , а они будут зависеть от множества, которому принадлежат их коэффициенты. При разложении полиномов на множители целесообразно выбирать множество рациональных чисел. Для небольших  $N$  это дает циклотомические полиномы с коэффициентами  $0, \pm 1$  и полиномиальные операции выполняются без умножений. В противном случае алгоритм теряет практический смысл.

Для множества рациональных чисел

$$z^N - 1 = \prod_{j|N} M_j(z), \quad (6.6)$$

где произведение берется по всем значениям  $j$ , являющимися делителями (сомножителями)  $N$ , включая 1 и саму величину  $N$ . Первые шесть из них имеют следующий вид:

$$M_1(z) = z - 1,$$

$$M_2(z) = z + 1,$$

$$M_3(z) = z^2 + z + 1,$$

$$M_4(z) = z^2 + 1,$$

$$M_5(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

$$M_6(z) = z^2 - z + 1.$$

Прямой алгоритм вычисления прямого ДПФ определяется вторым уравнением системы. Запишем его без нормирующего множителя  $1/N$ , который в данном случае не имеет принципиального значения

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)W_N^{-ik}, \quad W_N = \exp(j\frac{2\pi}{N}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Реализация этого алгоритма приводит к затратам  $M_{\Pi} = N^2$  умножений отсчетов сигнала на комплексные значения базисных функций  $W_N^{-ki}$ , которые обычно рассчитываются заранее и хранятся в виде соответствующих констант, и  $A_{\Pi} = N(N-1)$  комплексных сложений. Быстрые алгоритмы ДПФ позволяют существенно сократить эти затраты.

Существует два основных подхода к синтезу алгоритмов БПФ. Первый подход использует переход от одномерного массива, образованного из отсчетов сигнала  $x(i)$ , к многомерному и, соответственно, от одномерного ДПФ к многомерному, которое, хотя и записывается сложнее, но вычисляется проще. Поскольку известны разные способы преобразования одномерных массивов в многомерные, то в рамках этого подхода возможно построение различных модификаций БПФ. Основными из них являются БПФ Кули-Тьюки и Гуд-Томаса.

Второй подход состоит в сведении ДПФ по процедуре Рейдера к свертке, которая затем вычисляется по одному из быстрых алгоритмов. В этом случае также возможны различные модификации БПФ, отличающиеся по сложности. Наиболее эффективными из них являются БПФ-алгоритмы Винограда.

Начнем рассмотрение БПФ с алгоритмов Кули-Тьюки. Пусть величина  $N$  в ДПФ является составной, т.е.  $N = N_1 N_2$ , где  $N_1$  и  $N_2$  – любые целые числа. Сделаем преобразование одномерных индексов  $i$  и  $k$ :

$$i = i_1 + N_1 i_2, \quad i_1, k_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1,$$

$$k = N_2 k_1 + k_2, \quad i_2, k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1.$$

Тогда одномерное ДПФ можно преобразовать к следующему двумерному виду:

$$X(N_2 k_1 + k_2) = X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} x(i_1 + N_1 i_2) W_N^{-(i_1 + N_1 i_2)(N_2 k_1 + k_2)} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} x(i_1, i_2) W_N^{-(N_2 i_1 k_1 + i_1 k_2 + N_1 N_2 i_2 k_1 + N_1 i_2 k_2)}.$$

Здесь  $\{x(i_1, i_2)\}$  и  $\{X(k_1, k_2)\}$  – двумерные массивы сигнала и его спектра, образованные из соответствующих одномерных массивов  $\{x(i)\}$  и  $\{X(k)\}$  с помощью правила преобразования индексов. Теперь, используя свойство мультипликативности базиса ДЭФ, последнее выражение запишем так:

$$X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} W_N^{-N_2 i_1 k_1} \cdot W_N^{-i_1 k_2} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} x(i_1, i_2) W_N^{-N_1 N_2 i_2 k_1} \cdot W_N^{-N_1 i_2 k_2}$$

и учтем, что

$$\begin{aligned} W_N^{-N_2 i_1 k_1} &= \exp[-j(2\pi N_2 i_1 k_1)/(N_1 N_2)] = W_{N_1}^{-i_1, k_1}, \\ W_N^{-N_1 i_2 k_2} &= \exp[-j(2\pi N_1 i_2 k_2)/(N_1 N_2)] = W_{N_2}^{-i_2, k_2}, \\ W_N^{-N_1 N_2 i_2 k_1} &= \exp[-j(2\pi N_1 N_2 i_2 k_1)/(N_1 N_2)] = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} [W_N^{-i_1 k_2} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} x(i_1, i_2) W_{N_2}^{-i_2 k_2}] W_{N_1}^{-i_1 k_1},$$

$$k_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1; k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1.$$

Суть этого алгоритма *БПФ Кули-Тьюки для составного  $N$*  состоит в том, что сначала одномерный массив сигнала  $x(i)$  преобразуется в двумерную таблицу  $x(i_1, i_2)$ , при этом отсчеты сигнала в каждой строке таблицы идут не подряд, а через  $N_1$ , т.е. прореженными. После этого  $N_1$  раз выполняется  $N_2$ -точечное ДПФ по строкам таблицы  $x(i_1, i_2)$ , результаты которых затем умножаются на множители  $W_N^{-i_1 k_2}$  (эти множители называют *поворачивающими* или *фазовыми*), а над полученными произведениями  $N_2$  раз выполняется  $N_1$ -точечное ДПФ по столбцам. Полученная итоговая таблица содержит полный спектр сигнала, расположенный по строкам таблицы в естественном порядке следования. Такая модификация БПФ-алгоритма Кули-Тьюки, при которой исходный сигнал прореживается, а результирующий спектр нет, получила название *с прореживанием по времени* (номер отсчета  $i$  является аналогом времени). Если в алгоритме Кули-Тьюки поменять между собой правила преобразования индексов  $i$  и  $k$ , то отсчеты сигнала в таблице  $x(i_1, i_2)$  будут следовать по строкам без прореживания, а спектральные коэффициенты в таблице спектра – с прореживанием. Такая модификация БПФ Кули-Тьюки называется *с прореживанием по частоте* (номер  $k$  спектрального коэффициента соответствует определенной частоте). Поскольку сама вычислительная процедура алгоритма в обоих случаях одна и та же, то обе модификации обладают одинаковыми сложностными характеристиками.

По форме записи алгоритм Кули-Тьюки для составного  $N$  сложнее прямого алгоритма ДПФ, но число выполняемых в нем операций меньше, чем в прямом алгоритме. Для оценки затрат операций и удобства практического использования алгоритма целесообразно ввести дополнительные обозначения

$$q(i_1, k_2) = \sum_{i_2=0}^{N_2-1} x(i_1, i_2) W_{N_2}^{-i_2 k_2}, \quad k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1,$$

$$h(i_1, k_2) = q(i_1, k_2) W_N^{-i_1 k_2}, \quad i_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1$$

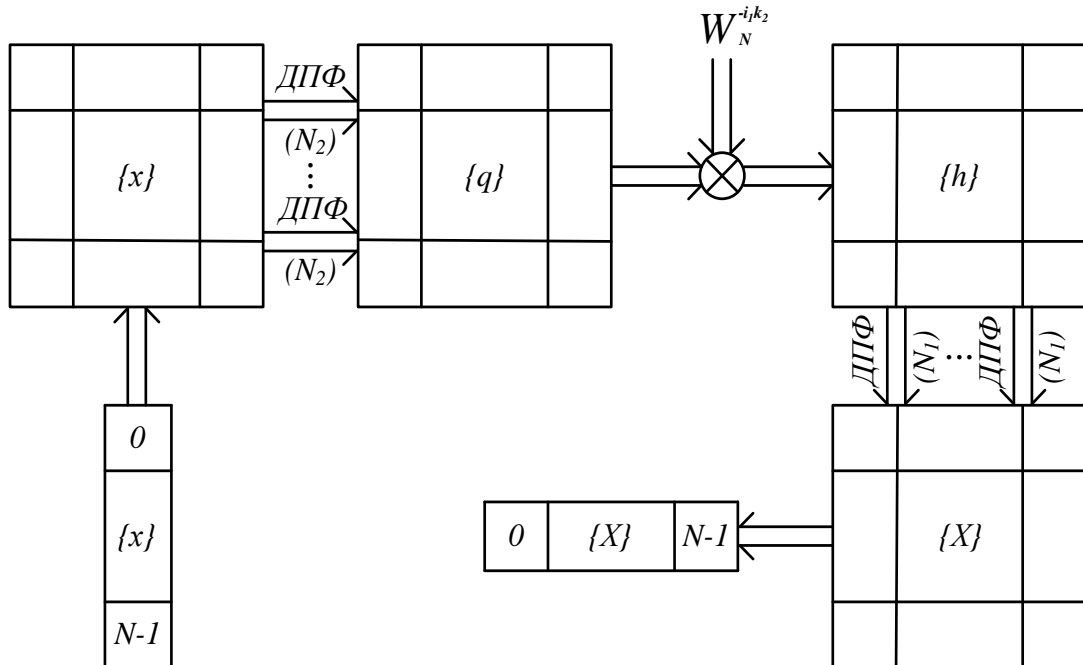
и переписать алгоритм (6.24) в виде

$$X(k_1, k_2) = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} h(i_1, k_2) W_{N_1}^{-i_1 k_1}, \quad k_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1.$$

Тогда алгоритм Кули-Тьюки можно представить в виде последовательности следующих этапов.

1. Вычисление промежуточного массива  $q(i_1, k_2)$  с помощью  $N_1$ -точечного ДПФ по строкам таблицы  $x(i_1, i_2)$ . Этот массив представляет собой по сути спектр промежуточных выборок, образованных прореживанием исходного сигнала и расположенных в строках таблицы  $x(i_1, i_2)$ . На выполнении этого этапа необходимо  $M_1 = N_1 N_2^2$  умножений и  $A_1 = N_1 N_2 (N_2 - 1)$  сложений.

2. Вычисление промежуточного массива  $h(i_1, k_2)$  путем  $N_1 N_2$  умножений элементов массива  $q(i_1, k_2)$  на константы  $W_N^{-i_1 k_2}$ . Этот этап требует выполнения  $M_2 = N_1 N_2$  умножений.



1. Вычисление результирующего массива спектра сигнала с помощью  $N_2$ -кратного выполнения  $N_1$ -точечного ДПФ по столбцам. Реализация этого этапа потребует выполнения  $M_3 = N_2 N_1^2$  умножений и  $A_3 = N_2 N_1 (N_1 - 1)$  сложений.

Вся процедура алгоритма Кули-Тьюки наглядно иллюстрируется графически с помощью блок-схемы рис. выше

Общие затраты операций на её реализацию составят

$$M_B = M_1 + M_2 + M_3 = N_1 N_2 (N_1 + N_2 + 1) = N(N_1 + N_2 + 1),$$

$$A_B = A_1 + A_3 = N_1 N_2 (N_1 + N_2 - 2) = N(N_1 + N_2 - 2).$$

Сравнивая её с прямым алгоритмом, получим следующие значения коэффициентов выигрыша по операциям:

$$\theta_M = M_H / M_B = N_1 N_2 / (N_1 + N_2 + 1),$$

$$\theta_A = A_H / A_B = (N_1 N_2 - 1) / (N_1 + N_2 - 2).$$

Несложно убедиться, что начиная уже с  $N=8$ , коэффициенты  $\theta_M$  и  $\theta_A$  больше 1 и БПФ Кули-Тьюки приводят к экономии вычислений, которая тем больше, чем больше  $N$ . Следует при этом, однако, иметь в виду, что в общем случае реализация алгоритма Кули-Тьюки требует  $N$  дополнительных ячеек памяти для хранения промежуточных массивов.

В приведенных зависимостях для числа умножений учтены умножения на все константы  $W_N^{-ik_2}$ , в том числе и на константы, равные  $\pm 1$  и  $\pm j$ , умножения на которые являются тривиальными. Исключение последних уменьшает общее число умножений и позволяет получить так называемые *оптимизированные* БПФ Кули-Тьюки. Правда, при этом обычно нарушается регулярность алгоритма и усложняется его программирование.

В основе разработки БПФ-алгоритмов Кули-Тьюки по основанию 2 лежат представления числа отсчетов в виде  $N = 2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и свойства двойственности и мультипликативности ДЭФ. Для дискретных функций Уолша величина  $N$  также представляется двоично-рациональным числом и справедливы свойства двойственности и мультипликативности. Поэтому в базисе этих функций тоже возможно построение алгоритмов быстрых преобразований, подобных БПФ Кули-Тьюки.

Поскольку операции мультипликативности в базисах ДЭФ и Уолша различаются, то результатами разработки БПФ при синтезе быстрых преобразований Уолша (БПУ) в полной мере воспользоваться не удастся. Особенности операции мультипликативности, которой для функций Уолша является поразрядное сложение по модулю 2, а также порядок следования функций Уолша в базисной системе влияют на процедуру вывода и форму записи алгоритмов БПУ. Поэтому рассмотрим скалярные методы синтеза БПУ для всех трех основных систем Уолша: Пэли, Хармута и Адамара.

Прямое ДПУ для сигнала  $x(i)$  с  $i \in [0, N)$  без нормирующего множителя  $1/N$  имеет простой вид

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \text{wal}(k, i/N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Поскольку функции Уолша принимают только единичные значения ( $\pm 1$ ), то реализация прямого алгоритма требует затрат только одних вещественных сложений, число которых равно

$$A_H = N(N-1).$$

При больших значениях  $N$  это число может оказаться весьма существенным. Для его сокращения применим тот же подход, что использовался при синтезе БПФ Кули-Тьюки: с помощью прореживания входной выборки сигнала преобразуем многоточечное ДПУ в совокупность более простых малоточечных ДПУ. При этом воспользуемся обоими классическими способами прореживания, используемыми в теории БПФ.

Прореживание по времени. Разобьём  $N$ -точечную выборку  $x(i)$  на две промежуточные выборки с отсчетами с четными и нечетными номерами соответственно:  $x_0(i_1) = x(2i_1)$  и  $x_1(i_1) = x(2i_1 + 1)$ ,  $i_1 = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ , спектры Уолша которых равны

$$\left. \begin{aligned} X^{(0)}(k_1) &= \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_0(i_1) \text{wal}(k_1, i_1 / (N/2)), \\ X^{(1)}(k_1) &= \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_1(i_1) \text{wal}(k_1, i_1 / (N/2)), \\ k_1 &= 0, 1, \dots, N/2 - 1. \end{aligned} \right\}$$

Тогда полный спектр  $X(k)$  (6.82) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x(2i_1) \text{wal}(k, 2i_1 / N) + \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x(2i_1 + 1) \text{wal}(k, (2i_1 + 1) / N) = \\ &= \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_0(i_1) \text{wal}(k, 2i_1 / N) + \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_1(i_1) \text{wal}(k, (2i_1 + 1) / N). \end{aligned}$$

Так как  $2i_1$  – четное число, то в  $2i_1 + 1$  обычное сложение можно заменить на поразрядное сложение по модулю 2  $(+)_2$ , т.е.  $2i_1 + 1 = 2i_1 (+)_2 1$ . Учитывая это и применяя свойство мультипликативности функций Уолша, можно записать  $\text{wal}(k, (2i_1 + 1) / N) = \text{wal}(k, (2i_1 (+)_2 1) / N) = \text{wal}(k, 2i_1 / N) \cdot \text{wal}(k, 1 / N)$ .

Поэтому

$$X(k) = \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_0(i_1) \text{wal}(k, 2i_1 / N) + \text{wal}(k, 1 / N) \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_1(i_1) \text{wal}(k, 2i_1 / N).$$

Рассмотрим отдельно первую и вторую половины спектральных коэффициентов  $X(k)$ . Для первой половины спектра  $k = k_1$ ,  $k_1 = 0, 1, \dots, N/2 - 1$  и

$$X(k_1) = \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_0(i_1) \text{wal}(k_1, 2i_1 / N) + \text{wal}(k_1, 1 / N) \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_1(i_1) \text{wal}(k_1, 2i_1 / N).$$

Для второй половины –  $k = k_1 + N/2$ , поэтому

$$\begin{aligned} X(k_1 + N/2) &= \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_0(i_1) \text{wal}(k_1 + N/2, 2i_1 / N) + \\ &+ \text{wal}(k_1 + N/2, 1 / N) \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_1(i_1) \text{wal}(k_1 + N/2, 2i_1 / N). \end{aligned}$$

Индекс  $k_1$  меняется в пределах от 0 до  $N/2-1$  и старший  $n$ -й разряд двоичного представления его значений всегда равен 0. Число  $N/2$  в своей двоичной записи имеет 1 в старшем разряде и 0 во всех остальных разрядах. Поэтому  $k_1 + N/2 = k_1(+)_2 N/2$  и в силу свойства мультипликативности

$$wal(k_1 + N/2, 2i_1 / N) = wal(k_1(+)_2 N/2, 2i_1 / N) = wal(k_1, 2i_1 / N)wal(N/2, 2i_1 / N).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} X(k_1 + N/2) &= \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_0(i_1)wal(k_1, 2i_1 / N)wal(N/2, 2i_1 / N) + \\ &+ wal(k_1 + N/2, 1/N) \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_1(i_1)wal(k_1, 2i_1 / N)wal(N/2, 2i_1 / N). \end{aligned}$$

Для дальнейшего преобразования выражений спектров  $X(k_1)$  и  $X(k_1 + N/2)$  необходимо рассмотреть свойства функций  $wal(k_1, 2i_1 / N)$  и  $wal(N/2, 2i_1 / N)$ . Они зависят от способа упорядочения функций Уолша в системе. Поэтому рассмотрим эти функции отдельно в системах Пэли, Хармута и Адамара, используя их аналитическую запись в экспоненциальной форме представления. При этом, поскольку нижние индексы в переменных  $i_1$  и  $k_1$  в данном параграфе используются для обозначения диапазона изменения этих переменных, то в записи их двоичного представления воспользуемся верхними индексами, заключенными в круглые скобки.

Тогда для системы Пэли будем иметь

$$pal(k, i / N) = (-1)^{\sum_{m=1}^n k^{(m)} \cdot i^{(n+1-m)}}$$

При  $k = k_1$  старший разряд  $k^{(n)} = 0$ , а при  $i = 2i_1$  младший разряд  $i^{(1)} = 0$ . Поэтому

$$pal(k_1, 2i_1 / N) = (-1)^{\sum_{m=1}^{n-1} k_1^{(m)} \cdot i_1^{(n+1-m)}}.$$

Поскольку числа  $2i_1$  в разрядах 2, 3, ...,  $n$  имеют те же значения, что и числа  $i_1$  в разрядах 1, 2, ...,  $n-1$ , то, перенумеровывая разряды, получаем

$$pal(k_1, 2i_1 / N) = (-1)^{\sum_{m=1}^{n-1} k_1^{(m)} \cdot i_1^{(n-1+1-m)}} = pal(k_1, i_1 / (N/2)).$$

Таким образом,  $N$ -точечные функции Уолша-Пэли с номерами  $k_1 = 0, 1, \dots, N/2-1$ , взятые в отсчетах с четными номерами, совпадают с  $N/2$ -точечными функциями Уолша-Пэли с теми же номерами. Подобное свойство в ДЭФ автоматически следовало из экспоненциальной формы их записи.

Такой же результат получается и для системы Хармута. Это связано с тем, что



$$har(k, i / N) = (-1)^{\sum_{m=1}^n \langle k^{(m)} \rangle \cdot i_i^{(n+1-m)}}$$

и по правилам вычисления кода Грея  $\langle k^{(n)} \rangle = k^{(n)} (+)_2 0 = k^{(n)}$ , а код Грея значений  $k$  при  $k^{(n)} = 0$  совпадает с кодом Грея значений  $k_1$ . Поэтому

$$har(k_1, 2i_1 / N) = (-1)^{\sum_{m=1}^{n-1} \langle k^{(m)} \rangle \cdot i_1^{(n-1+1-m)}} = har(k_1, i_1 / (N/2)).$$

Для функций Уолша-Адамара ситуация другая. В этом случае в соответствии с

$$had(k, i / N) = (-1)^{\sum_{m=1}^n k^{(m)} \cdot i^{(m)}}$$

и при  $k = k_1, i = 2i_1$

$$had(k_1, 2i_1 / N) = (-1)^{\sum_{m=2}^{n-1} k^{(m)} \cdot i^{(m)}}.$$

Эта функция не совпадает с функцией  $had(k_1, i_1 / (N/2))$ .

Теперь о функции  $wal(N/2, 2i_1 / N)$ . Её номер  $k = N/2$  в своем двоичном разложении имеет только одну единицу в старшем разряде. В тоже время двоичный код чисел  $2i_1$  содержит 0 в младшем разряде. Поэтому в системе Пэли

$$pal(N/2, 2i_1 / N) = (-1)^{k^{(n)} i^{(1)}} = 1.$$

Для системы Хармута следует учесть, что код Грея числа  $N/2$  имеет единичные значения только в двух старших разрядах. Поэтому

$$har(N/2, 2i_1 / N) = (-1)^{k^{(n-1)} i^{(2)}} = (-1)^{i^{(2)}}.$$

Но из двоичных представлений чисел  $i = 2i_1$  и  $i_1$  следует, что  $i^{(2)} = i_1^{(1)}$ . Следовательно

$$har(N/2, 2i_1 / N) = (-1)^{i_1^{(1)}}.$$

При четном значении  $i_1$  его разряд  $i_1^{(1)} = 0$ , а при нечетном  $i_1^{(1)} = 1$ . Поэтому будет справедлива и следующая запись этой функции:

$$har(N/2, 2i_1 / N) = (-1)^{i_1}.$$

Полученные результаты позволяют сделать следующие важные для синтеза БПУ выводы. Во-первых, простая связь между функциями  $wal(k_1, 2i_1 / N)$  и  $wal(k_1, i_1 / (N/2))$ , позволяющая упростить соотношения для  $X(k_1)$  и  $X(k_1 + N/2)$ , существует только в системах Пэли и Хармута. Для функций Уолша-Адамара такой связи нет и поэтому невозможно построить алгоритм БПУ-Адамара в

классической формулировке прореживания по времени. Необходима его модификация. Во-вторых, функция  $wal(N/2, 2i_1/N)$  в базисе Пэли тождественно равна 1, а в базисе Хармута зависит от переменной  $i_1$ . Это приводит к различным формам записи спектров  $X(k_1)$  и  $X(k_1 + N/2)$  в этих базисах, поэтому дальнейший вывод алгоритмов БПУ для систем Пэли и Хармута следует осуществлять отдельно. Отдельно надо рассматривать и БПУ-Адамара.

Начнем с упорядочения Пэли. В этом случае, учитывая зависимости и в соотношениях для  $X(k_1)$  и  $X(k_1 + N/2)$ , последние можно преобразовать к следующему виду:

$$X(k_1) = \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_0(i_1) pal(k_1, i_1/(N/2)) + pal(k_1, 1/N) \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_1(i_1) pal(k_1, i_1/(N/2)),$$

$$X(k_1 + N/2) = \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_0(i_1) pal(k_1, i_1/(N/2)) + pal(k_1 + N/2, 1/N) \sum_{i_1=0}^{N/2-1} x_1(i_1) pal(k_1, i_1/(N/2)).$$

Сравнивая эти выражения с формулами, получаем

$$X(k_1) = X^{(0)}(k_1) + pal(k_1, 1/N) X^{(1)}(k_1),$$

$$X(k_1 + N/2) = X^{(0)}(k_1) + pal(k_1 + N/2, 1/N) X^{(1)}(k_1).$$

Последние зависимости можно упростить, если учесть, что в силу свойства двойственности функций Уолша  $pal(k_1, 1/N) = pal(1, k_1/N) = 1$ , а  $pal(k_1 + N/2, 1/N) = pal(1, (k_1 + N/2)/N) = -1$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} X(k_1) &= X^{(0)}(k_1) + X^{(1)}(k_1), \\ X(k_1 + N/2) &= X^{(0)}(k_1) - X^{(1)}(k_1), \\ k_1 &= 0, 1, \dots, N/2 - 1. \end{aligned} \right\}$$

Уравнения определяют алгоритм БПУ-Пэли на первом уровне прореживания по времени. Из них следует, что искомый спектр сигнала можно получить простым алгебраическим суммированием спектров промежуточных выборок. Уравнения связи спектров в БПУ-Пэли похожи на аналогичные уравнения в БПФ Кули-Тьюки по основанию 2 и с прореживанием по времени и отличаются только отсутствием фазовых множителей (последние в этом случае равны 1).

Поскольку  $N/2$  также делится пополам, то описанный алгоритм можно применить и для вычисления промежуточных спектров  $X^{(0)}(k_1)$  и  $X^{(1)}(k_1)$ , введя новый уровень прореживания. Очевидно, что процедуру прореживания можно продолжать до тех пор, пока число отсчетов в промежуточных выборках не станет равным 2. В этом случае будет получен полный алгоритм БПУ-Пэли с  $(n-1)$  уровнями прореживания по времени.

В общем случае на  $m$ -м уровне прореживания

$$\left. \begin{aligned} X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})}(k_m) &= X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 0)}(k_m) + X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 1)}(k_m), \\ X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})}(k_m + 2^{n-m}) &= X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 0)}(k_m) - X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 1)}(k_m), \\ \lambda_\alpha &= 0, 1; \alpha = 1, 2, \dots, m-1, k_m = 0, 1, \dots, 2^{n-m} - 1. \end{aligned} \right\}$$

где

$$\begin{aligned} X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 0)}(k_m) &= \sum_{i_m=0}^{2^{n-m}-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 0}(i_m) pal(k_m, i_m 2^{m-n}), \\ X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 1)}(k_m) &= \sum_{i_m=0}^{2^{n-m}-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 1}(i_m) pal(k_m, i_m 2^{m-n}), \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 0}(i_m) &= x(2^m i_m + 2^{m-2} \lambda_{m-1} + \dots + 2\lambda_2 + \lambda_1), \\ x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, 1}(i_m) &= x(2^m i_m + 2^{m-1} + 2^{m-2} \lambda_{m-1} + \dots + 2\lambda_2 + \lambda_1). \end{aligned}$$

Изменяя индекс  $m$  от 1 до  $n-1$ , можно описать все стадии процесса быстрого анализа спектра Уолша-Пэли, получив алгоритм полного БПУ. Сама организация вычислений по этому алгоритму подразумевает изменение индекса  $m$  в обратном направлении от  $n-1$  до 1 подобно тому, как это делалось в алгоритмах БПФ по основанию два. Начальными данными в полном алгоритме будут служить промежуточные спектры

$X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})}(k_{n-1})$ , ( $k_{n-1} = 0, 1$ ) 2-точечных выборок на  $(n-1)$ -м уровне прореживания. Поскольку 2-точечные функции Уолша при любом упорядочении принимают значения  $wal(0, i_{n-1}/2) = \{1, 1\}$  и  $wal(1, i_{n-1}/2) = \{1, -1\}$ , то начальные спектры имеют простой вид записи:

$$\begin{aligned} X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})}(0) &= x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(0) + x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(1), \\ X^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})}(1) &= x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(0) - x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(0) &= x(2^{n-2} i_{n-1} + 2^{n-3} \lambda_{n-2} + \dots + 2\lambda_2 + \lambda_1), \\ x_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}(1) &= x(2^{n-1} + 2^{n-2} \lambda_{n-1} + 2^{n-3} \lambda_{n-2} + \dots + 2\lambda_2 + \lambda_1). \end{aligned}$$

Результатом выполнения полного алгоритма будет искомым спектр  $X(k_1)$  и  $X(k_1 + N/2)$ , получаемый на первом уровне прореживания.

Полный алгоритм БПУ, так же как и аналогичный ему алгоритм БПФ, графически удобно представлять с помощью полного сигнального графа,

имеющего  $(n+1)$  уровней и  $N(n+1)$  узлов. Во всех узлах, кроме узлов крайнего левого уровня выполняются только операции сложения. Граф БПУ-Пэли по структуре похож на граф подобного БПФ и отличается от него только отсутствием умножений на фазовые множители. Полный БПУ-Пэли с прореживанием по времени требует при своей реализации выполнения

$$A_b = N \log_2 N$$

сложений.

Матричные методы синтеза БПФ используют матричную форму описания ДПФ и основываются на различных способах факторизации матриц значений базисных функций. Они широко применяются в теории БПФ, поскольку дают компактное описание быстрого анализа спектра сигнала.

Для иллюстрации матричного подхода рассмотрим только два примера синтеза БПФ для ДЭФ и функций Уолша, воспользовавшись соответственно способами Глассмана и Гуда.

Пусть дана полнофазная матрица ДЭФ размером  $N \times N$

$$\mathbf{D}_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \dots & W_N^{N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix},$$

где, как и ранее,  $W_N = \exp(j2\pi/N)$ . Покажем, что эту матрицу можно факторизовать, если  $N$  составное число. Предположим, что  $N = N_1 M_1$ , где  $N_1$  - простое число. Обозначим элемент матрицы  $\mathbf{D}_N$   $W_N^{ik} = d_{i,k}$ . Тогда любую её строку с номером  $i$  можно записать в виде

$$[d_{i,k}] = [d_{i,0}, \dots, d_{i,(N_1-1)}, W_N^{N_1 i} d_{i,0}, \dots, W_N^{N_1 i} d_{i,(N_1-1)}, \\ W_N^{2N_1 i} d_{i,0}, \dots, W_N^{2N_1 i} d_{i,(N_1-1)}, \dots, W_N^{(M_1-i)N_1 i} d_{i,0}, \dots, W_N^{(M_1-i)N_1 i} d_{i,(N_1-1)}].$$

Упростим эту запись, обозначив часть строки в виде

$$\mathbf{\Gamma}_i^{(1)} = [d_{i,0}, d_{i,1}, \dots, d_{i,(N_1-1)}].$$

Тогда получим

$$[d_{i,k}] = [\mathbf{\Gamma}_i^{(1)}, W_N^{N_1 i} \mathbf{\Gamma}_i^{(1)}, W_N^{2N_1 i} \mathbf{\Gamma}_i^{(1)}, \dots, W_N^{(M_1-1)N_1 i} \mathbf{\Gamma}_i^{(1)}].$$

Используя известные свойства сравнений (см. §2.6), имеем

$$\langle N, i \rangle_N = \langle N, i \rangle_{N_1 M_1} = N_1 i - [N_1 i / N_1 M_1] N_1 M_1 = N_1 (i - [i / M_1] M_1) = N_1 \langle i \rangle_{M_1},$$

где  $[\cdot]$  означает целую часть результата деления двух целых чисел. Поэтому для  $k = 0, 1, \dots, M_1 - 1$  получаем

$$W_N^{kN_1 i} = W_N^{k \langle N_1 i \rangle_N} = W_N^{kN_1 \langle i \rangle_{M_1}}.$$

Из этого следует, что выражение имеет  $M_1$  различных форм записи, соответствующим разным значениям остатка  $\langle i \rangle_{M_1}$ :

- для  $\langle i \rangle_{M_1} = 0$

$$[d_{i,k}] = [\Gamma_i^{(1)}, \Gamma_i^{(1)}, \dots, \Gamma_i^{(1)}],$$

- для  $\langle i \rangle_{M_1} = 1$

$$[d_{i,k}] = [\Gamma_i^{(1)}, W_N^{N_1} \Gamma_i^{(1)}, \dots, W_N^{(M_1-1)N_1} \Gamma_i^{(1)}],$$

. . . . .

- для  $\langle i \rangle_{M_1} = M_1 - 1$

$$[d_{i,k}] = [\Gamma_i^{(1)}, W_N^{(M_1-1)N_1} \Gamma_i^{(1)}, \dots, W_N^{(M_1-1)^2 N_1} \Gamma_i^{(1)}].$$

В то время, как в матрице индекс  $i$  изменяется в диапазоне от 0 до  $N-1$ , величина  $\langle i \rangle_{M_1}$  пробегает  $N_1$  раз значения в пределах от 0 до  $M_1 - 1$ . С учетом этого матрицу можно переписать в виде

$$D_N = \begin{bmatrix} \Gamma_0^{(1)} & \Gamma_0^{(1)} & \dots & \Gamma_0^{(1)} \\ \Gamma_1^{(1)} & W_1^{N_1} \Gamma_1^{(1)} & \dots & W^{(M_1-1)N_1} \Gamma_1^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Gamma_{N-1}^{(1)} & W_N^{(M_1-1)N_1} \Gamma_{N-1}^{(1)} & \dots & W_N^{(M_1-1)^2 N_1} \Gamma_{N-1}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Представленная так матрица ДЭФ разлагается на множители:

$$D_N = P_1 Q_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_0^{(1)} & & & \\ & \Gamma_1^{(1)} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \Gamma_{M_1-1}^{(1)} & \\ \Gamma_{(N_1-1)M_1}^{(1)} & & & \\ & \Gamma_{(N_1-1)M_1+1}^{(1)} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \Gamma_{N-1}^{(1)} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{N_1} & I_{N_1} & \dots & I_{N_1} \\ I_{N_1} & W_N^{N_1} I_{N_1} & \dots & W_N^{(M_1-1)N_1} I_{N_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ I_{N_1} & W_N^{(M_1-1)N_1} I_{N_1} & \dots & W_N^{(M_1-1)^2 N_1} I_{N_1} \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица  $P_1$  имеет размер  $M_1 \times N$ , а матрица  $Q_1 - M_1 \times M_1$ . Через  $I_{N_1}$  обозначена единичная матрица размером  $N_1 \times N_1$ . Все отсутствующие элементы в этих матрицах являются нулевыми и опущены, чтобы подчеркнуть структуру матриц. Обратим внимание на то, что вторая матрица  $Q_1$  имеет ту же структуру, что и исходная матрица  $D_N$ , с той лишь разницей, что элементы этой новой матрицы сами являются матрицами размером  $N_1 \times N_1$ .

$$W_N^{kN_1} \mathbf{I}_{N_1} = \begin{bmatrix} W_N^{kN_1} & & & & \\ & W_N^{kN_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & W_N^{kN_1} \end{bmatrix}.$$

Если величина  $M_1$  не является простым числом, то приведенную процедуру факторизации можно применить и к матрице  $\mathbf{Q}_1$ , представив  $M_1$  в виде произведения  $N_2 M_2$ , где  $N_2$  – простое число. Тогда получим

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{D}_N = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}_2,$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \Gamma_0^{(2)} & & & \\ & \Gamma_1^{(2)} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \Gamma_{M_2-1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Gamma_{(N_2-1)M_2}^{(2)} & & & \\ & \Gamma_{(N_2-1)M_2+1}^{(2)} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \Gamma_{M_1-1}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_1 N_2} & \mathbf{I}_{N_1 N_2} & \dots & \mathbf{I}_{N_1 N_2} \\ \mathbf{I}_{N_1 N_2} & W_N^{N_2} \mathbf{I}_{N_1 N_2} & \dots & W_N^{(M_2-1)N_2} \mathbf{I}_{N_1 N_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{I}_{N_1 N_2} & W_N^{(M_2-1)N_2} \mathbf{I}_{N_1 N_2} & \dots & W_N^{(M_2-1)^2 N_2} \mathbf{I}_{N_1 N_2} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i^{(2)} = [\mathbf{I}_{N_1}, W_N^{N_1 i} \mathbf{I}_{N_1}, \dots, W_N^{(N_2-1)N_1 i} \mathbf{I}_{N_1}].$$

Матрица  $\mathbf{P}_2$  имеет размер  $M_2 \times M_1$ , матрица  $\mathbf{Q}_2$  –  $M_2 \times M_2$  и  $\mathbf{I}_{N_1 N_2}$  – единичная матрица размером  $N_1 N_2 \times N_1 N_2$ . Если и число  $M_2$  составное, то процедура факторизации может быть продолжена.

**ТЕМА №7.** Цифровые фильтры и их характеристики. Описание цифровых фильтров. Передаточные функции цифровых фильтров и формы их реализации. Частотные и импульсная характеристики фильтров. Классификация фильтров.

Цифровая фильтрация является еще одной важной операцией цифровой обработки сигналов, находящей самое широкое применение в различных областях науки и техники. Реализуется она с помощью цифровых фильтров (ЦФ), которые представляют собой системы, предназначенные для преобразования структуры входного сигнала к виду, определяемому характером его дальнейшего использования. ЦФ относятся к классу линейных дискретных систем, взаимосвязь между входным  $x(i)$  и выходным  $y(i)$  дискретными сигналами в которых определяется следующим разностным уравнением:

$$y(i) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l x(i-l) - \sum_{k=1}^{L-1} a_k y(i-k). \quad (7.1)$$

Здесь пределы суммирования  $N$  и  $L$  и величины  $a_k$  и  $b_l$  являются параметрами фильтра, причем коэффициенты  $a_k$  и  $b_l$  могут быть константами либо отсчетами решетчатых функций, зависящих от дискретного времени  $i$ .

Сигналы  $x(i)$  и  $y(i)$  могут быть как вещественными, так и комплексными. Уравнение (7.1) можно рассматривать как алгоритм вычисления  $y(i)$ , т.е. алгоритм работы ЦФ. Его реализация в виде устройства приведет к аппаратному способу реализации ЦФ, а программирование на выбранном языке – к программному способу реализации ЦФ.

Как правило, решение уравнения (7.1), т.е. решетчатую функцию  $\{y(i)\}$ , требуется определить при  $i \geq 0$ . Если известны коэффициенты  $a_k$  и  $b_l$ , отсчеты входного сигнала  $\{x(i)\}$  при  $i \geq -N+1$  и начальные значения  $y(-1), y(-2), \dots, y(-L+1)$ , то, используя (7.1), можно рассчитать отсчеты  $y(i)$  для любого  $i \geq 0$ . Уравнение (7.1) дает аналитическое описание ЦФ во временной области.

Если коэффициенты  $a_k$  и  $b_l$  не зависят от дискретного времени  $i$ , то ЦФ являются системами с постоянными параметрами, в противном случае они будут принадлежать классу систем с переменными параметрами.

Цифровые фильтры принято делить на два класса: рекурсивные (РЦФ) и нерекурсивные (НЦФ). Если в уравнении (7.1) хотя бы один коэффициент  $a_k$  отличен от нуля, то фильтр называют рекурсивным. Если же в (7.1) все коэффициенты  $a_k$  равны нулю, то фильтр, реализующий такой алгоритм, называют нерекурсивным. Для него разностное уравнение (7.1) упрощается:

$$y(i) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l x(i-l). \quad (7.2)$$

Очевидно, что НЦФ представляет собой систему без обратной связи, а РЦФ – систему с обратной связью.

В соответствии с общим определением передаточных функций систем автоматического управления передаточной функцией  $H(z)$  ЦФ называют отношение  $z$ -образов выходного  $Y(z)$  и входного  $X(z)$  сигналов фильтра при нулевых начальных условиях:

$$H(z) = Y(z) / X(z). \quad (7.3)$$

Вычисляя  $z$ -преобразование выходного сигнала по разностным уравнениям (7.1) и (7.2):

$$Y(z) = X(z) \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^{-l} - Y(z) \sum_{k=1}^{L-1} a_k z^{-k},$$

$$Y(z) = X(z) \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^{-l},$$

из общей формулы (7.3) после простых преобразований можно получить более удобные для использования зависимости для передаточных функций рекурсивных и нерекурсивных ЦФ:

$$H_p(z) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^{-l} / (1 + \sum_{k=1}^{L-1} a_k z^{-k}), \quad (7.4)$$

$$H_n(z) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l z^{-l}. \quad (7.5)$$

Передаточные функции (7.4) и (7.5) содержат все те же параметры фильтров, что и разностные уравнения (7.1) и (7.2), и поэтому дают полное описание ЦФ. Они определяют собой способ аналитического описания ЦФ в  $z$ -области.

При построении структурных схем, соответствующих этим формам реализации, будем использовать обозначения операций, несколько отличающихся от обозначений, применяемых в сигнальных графах, но широко используемых в теории управления. Операцию задержки (запоминания) отсчетов сигнала на  $m$  шагов дискретизации  $\Delta t$  обозначим квадратиком с записью в нем величины  $z^{-m}$ , операцию сложения нескольких слагаемых – прямоугольником со знаком  $\Sigma$ , а операцию умножения на константу – квадратиком с крестиком внутри. Передачу данных будем отображать на схемах сплошными линиями со стрелками.

Для сравнительного анализа сложности реализации различных форм передаточных функций обычно используют следующие реализационные характеристики, похожие на реализуемые характеристики сверток и ДПФ:

$Q$  – число ячеек (регистров) оперативной памяти, необходимой для хранения отсчетов входного сигнала и промежуточных результатов;

$B$  – число ячеек постоянной памяти, необходимой для хранения коэффициентов фильтра;



$M$  – число умножений, выполняемых при вычислении одного отсчета выходного сигнала;

$A$  – число алгебраических сложений двух слагаемых, которые должны быть выполнены в фильтре для получения одного отсчета выходного сигнала.

Эти же характеристики могут быть использованы и для оценки вычислительной сложности алгоритмов фильтрации (7.1) и (7.2).

Для рекурсивных фильтров можно выделить четыре основные формы реализации: прямую, каноническую, каскадную (последовательную) и параллельную.

Прямая форма (рис. 7.1) соответствует непосредственной реализации разностного уравнения (7.1) или передаточной функции (7.4). Для нее

$$Q = N + L - 2, \quad B = N + L - 1, \quad M = N + L - 1, \quad A = N + L - 2.$$

Каноническая форма (рис. 7.2 для случая  $N = L - 1$ ) соответствует замене (7.1) эквивалентной системой разностных уравнений:

$$v(i) = -\sum_{k=1}^{L-1} a_k v(i-k) + x(i),$$

$$y(i) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l v(i-l).$$

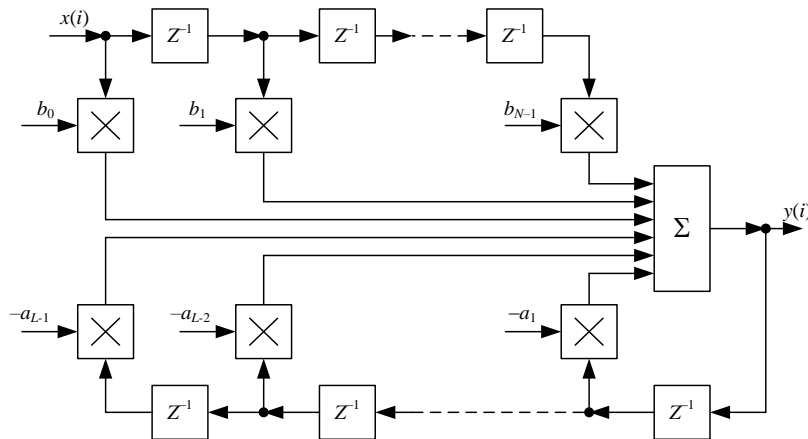


Рис. 7.1. Прямая форма

Введение вспомогательной последовательности позволяет объединить часть элементов задержки и уменьшить их число по сравнению с прямой формой реализации. Остальные реализационные характеристики при этом остаются без изменения.

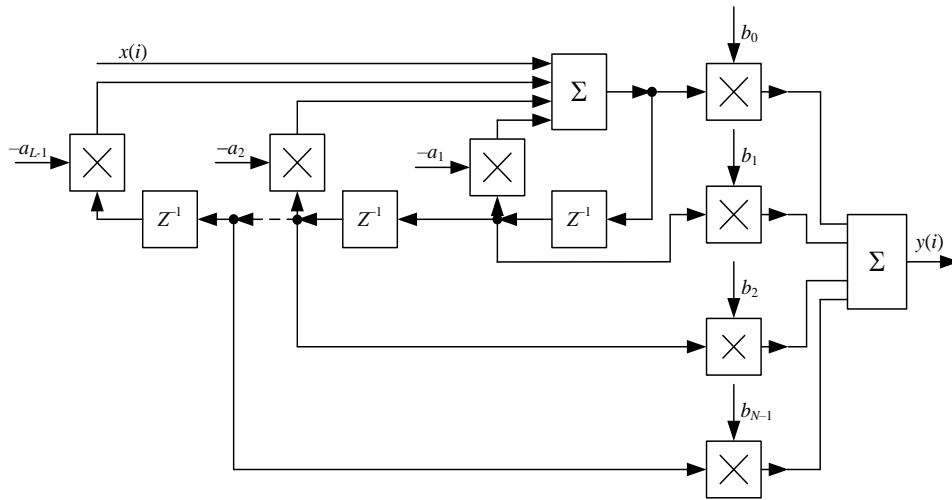


Рис. 7.2. Каноническая форма

При последовательной форме (рис. 7.3) используется способ представления  $H(z)$  в виде произведения типовых звеньев не выше второго порядка (биквадратных звеньев [45]):

$$H(z) = \prod_{k=1}^V \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}}.$$

Биквадратное звено становится универсальным блоком для построения РЦФ любого порядка (порядком РЦФ называют максимальное значение степени знаменателя передаточной функции фильтра). Реализационные характеристики этой формы во многом зависят от числа используемых биквадратных звеньев.

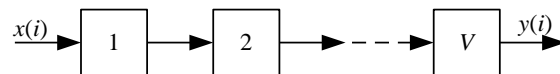


Рис. 7.3. Последовательная форма

Параллельная форма (рис. 7.4) основана на эквивалентном представлении  $H(z)$  суммой типовых звеньев:

$$H(z) = \sum_{k=1}^V \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 + \alpha_{1k}z^{-1} + \alpha_{2k}z^{-2}},$$

которые могут быть реализованы в виде биквадратного блока при  $\beta_{2k} = 0$ . Реализационные характеристики здесь также сильно зависят от числа типовых блоков.

Все рассмотренные формы реализации РЦФ при одних и тех же входных данных и бесконечной разрядности представления чисел в ЦФ дают абсолютно одинаковые результаты, так как получены путем эквивалентных математических преобразований одного и того же исходного уравнения (7.4). Однако при ограниченной разрядной сетке представления чисел, что всегда имеет место в реальных ЦФ, эти формы приведут к различному результату, так как отличаются механизмом преобразования погрешностей округления.

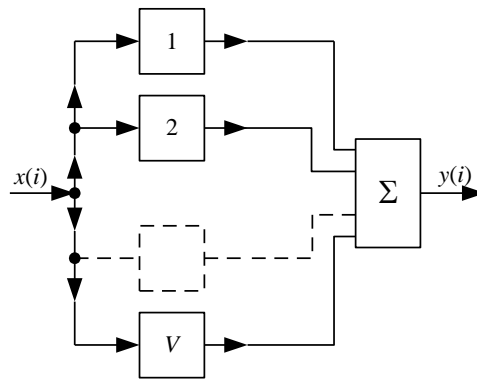


Рис. 7.4. Параллельная форма

Для нерекурсивных ЦФ возможны прямая и каскадная формы реализации. Прямая форма (рис. 7.5) соответствует непосредственной реализации НЦФ согласно (7.2) или (7.5). Для нее  $Q = N$ ,  $B = N$ ,  $M = N$ ,  $A = N - 1$ .

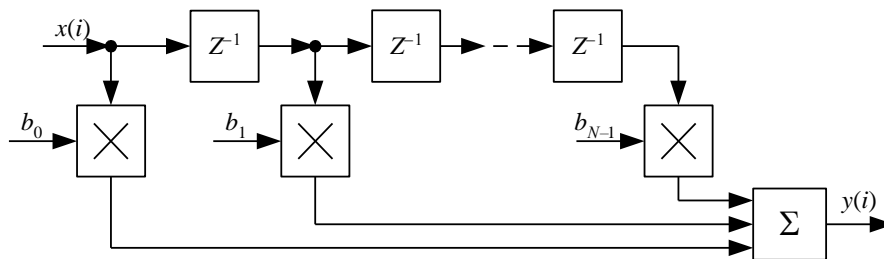


Рис. 7.5. Прямая форма

Каскадную форму легко получить из каскадной формы РЦФ, если в биквадратных звеньях положить все  $\alpha_{1k}$  и  $\alpha_{2k}$  равными нулю. Для весьма важного типа нерекурсивных фильтров с линейной фазочастотной характеристикой возможны специальные формы реализации, учитывающие свойства симметрии или антисимметрии коэффициентов фильтра  $b_l$ . На рис. 7.6 приведена структурная схема фильтра, соответствующая разностному уравнению (7.2) при  $b_l = b_{N-1-l}$  и четном  $N$ . В таких формах реализации число умножений уменьшается практически вдвое. В два раза сокращается и число хранимых в памяти фильтра констант.

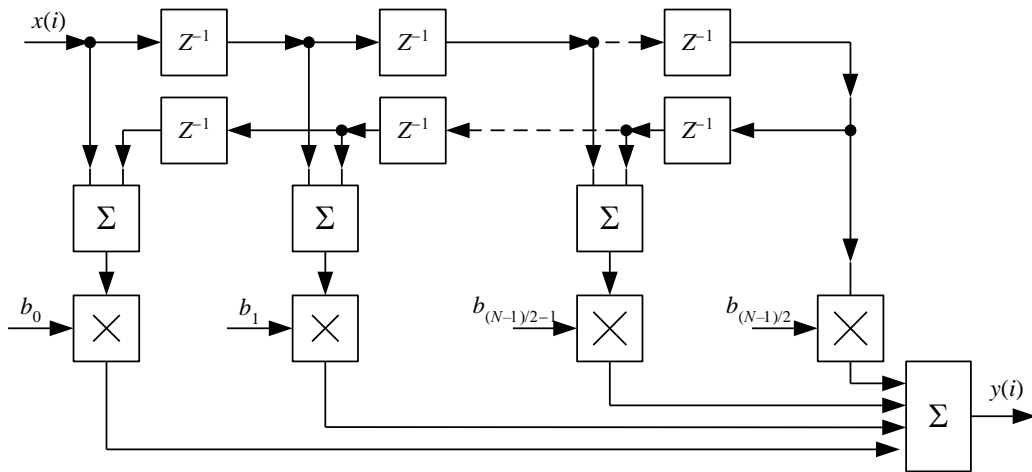


Рис. 7.6. Специальная форма

Комплексные частотные характеристики представляют собой функции частоты  $\omega$ , полученные в результате подстановки  $z = e^{j\omega\Delta t}$  (где  $j$  – мнимая единица,  $\Delta t$  – шаг дискретизации по времени решетчатого сигнала) в передаточные функции (7.4) и (7.5):

$$H_p(e^{j\omega\Delta t}) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l e^{-jl\omega\Delta t} / (1 + \sum_{k=1}^{L-1} a_k e^{jk\omega\Delta t}), \quad (7.6)$$

$$H_n(e^{j\omega\Delta t}) = \sum_{l=0}^{N-1} b_l e^{-jl\omega\Delta t}. \quad (7.7)$$

Модуль комплексной частотной характеристики  $A(\omega) = |H(e^{j\omega\Delta t})|$ , называемый амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) фильтра, определяет амплитуду выходного сигнала устойчивого фильтра в установившемся режиме при входном сигнале  $x(i) = e^{ji\omega\Delta t} = \cos(i\omega\Delta t) + j \sin(i\omega\Delta t)$ .

Аргумент комплексной частотной характеристики  $\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega\Delta t})]$ , называемый фазочастотной характеристикой (ФЧХ) фильтра, определяет фазу выходного сигнала устойчивого фильтра при входном сигнале  $x(i) = e^{ji\omega\Delta t}$ .

Для рекурсивных и нерекурсивных фильтров с вещественными коэффициентами справедливы следующие соотношения для АЧХ и ФЧХ:

$$A_p(\omega) = \sqrt{\frac{(\sum_{i=0}^{N-1} b_i \cos i\omega\Delta t)^2 + (\sum_{i=0}^{N-1} b_i \sin i\omega\Delta t)^2}{(\sum_{k=0}^{L-1} a_k \cos k\omega\Delta t)^2 + (\sum_{k=0}^{L-1} a_k \sin k\omega\Delta t)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} b_m b_i \cos(m-i)\omega\Delta t}{\sum_{k=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} a_k a_l \cos(k-l)\omega\Delta t}},$$

(7.8)

$$\varphi_p(\omega) = -\arctg\left(\sum_{i=0}^{N-1} b_i \sin i\omega\Delta t / \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cos i\omega\Delta t\right) +$$

$$+ \arctg\left(\sum_{k=0}^{L-1} a_k \sin k\omega\Delta t / \sum_{k=0}^{L-1} a_k \cos k\omega\Delta t\right), \quad (7.9)$$

$$A_H(\omega) = \sqrt{(\sum_{i=0}^{N-1} b_i \cos i\omega\Delta t)^2 + (\sum_{i=0}^{N-1} b_i \sin i\omega\Delta t)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} b_m b_i \cos(m-i)\omega\Delta t}, \quad (7.10)$$

$$\varphi_H(\omega) = -\arctg\left(\sum_{i=0}^{N-1} b_i \sin i\omega\Delta t / \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cos i\omega\Delta t\right). \quad (7.11)$$

В формулах (7.8) и (7.9) коэффициент  $a_0 = 1$ .

Кроме АЧХ и ФЧХ используют также еще одну частотную характеристику – групповое время задержания (ГВЗ):

$$\tau(\omega) = -d\varphi / d\omega, \quad (7.12)$$

равное времени задержки в установившемся режиме выходного сигнала фильтра относительно входного сигнала  $x(i) = e^{ji\omega\Delta t}$ .

Частотные характеристики обладают рядом полезных для практики свойств, которые непосредственно следуют из формул (7.8) – (7.12). Основными из них являются следующие.

1. Все частотные характеристики представляют собой периодические функции частоты  $\omega$  с периодом  $2\pi/\Delta t$ .

2. АЧХ и ГВЗ представляют собой четные функции частоты  $\omega$  и их графики симметричны относительно оси ординат, а ФЧХ является нечетной функцией  $\omega$  и ее график антисимметричен относительно этой оси.

Из указанных выше свойств следует, что требования к частотным характеристикам при постоянном  $\Delta t$  можно задавать только на интервале  $[0; \pi/\Delta t]$ .

Чтобы упростить сопоставление частотных характеристик ЦФ с различными  $\Delta t$ , применяют нормировку частоты. Существует два способа

нормировки. При первом способе полагают нормированной частоту  $\omega' = \omega \Delta t$ , тогда период частотных характеристик равен  $2\pi$  и требования к ним задаются на интервале  $[0; \pi]$ . При втором способе используют нормированную частоту  $w = \omega \Delta t / 2\pi$ . В этом случае период частотных характеристик равен единице и требования к ним задаются на интервале  $[0; 0.5]$ . В этой книге используется преимущественно второй способ нормировки частоты. При этом изменяются аргументы в обозначении частотных характеристик  $H(e^{jw2\pi})$ ,  $A(w)$ ,  $\varphi(w)$  и  $\tau(w)$ . Изменяются и сами формулы частотных характеристик. Новые формулы в случае необходимости могут быть легко получены из зависимостей (7.6)-(7.12) подстановкой  $\omega = 2\pi w / \Delta t$ .

Импульсная характеристика ЦФ  $h(i)$  представляет собой реакцию фильтра при нулевых начальных условиях на входное воздействие в виде единичного дискретного скачка:

$$x(i) = \delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0, \\ 0 & \text{при } i, \text{ отличных от } 0. \end{cases}$$

Из этого определения и определений передаточной функции и комплексной частотной характеристики следует, что импульсная характеристика и передаточная функция связаны между собой обратным и прямым z-преобразованиями:

$$\begin{aligned} h(i) &= Z^{-1}[H(z)], \\ H(z) &= Z[h(i)], \end{aligned} \quad (7.15)$$

а импульсная характеристика и комплексная частотная характеристика – парой преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} h(i) &= \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} H(e^{j\omega\Delta t}) e^{j\omega i\Delta t} d\omega, \\ H(e^{j\omega\Delta t}) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) e^{-j\omega i\Delta t}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Для НЦФ из (7.15) следует важный вывод, что

$$h(i) = b_i, \quad (7.17)$$

т.е. коэффициенты НЦФ являются отсчетами импульсной характеристики.

В зависимости от характера импульсной характеристики (ИХ) цифровые фильтры принято делить на два класса: фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) и фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры). Отметим, что все практически реализуемые НЦФ являются КИХ-фильтрами, а почти все РЦФ (за исключением тех, у которых передаточная функция может быть преобразована к виду (7.5)) являются БИХ-фильтрами.

Зная ИХ  $h(i)$ , можно рассчитать при нулевых начальных условиях выходной сигнал ЦФ  $y(i)$  по заданному входному сигналу  $x(i)$ . Аналитически связь  $y(i)$  с  $x(i)$  и  $h(i)$  выражается уравнением линейной дискретной свертки

последовательностей отсчетов  $x(i)$  и  $h(i)$ , причем все три последовательности могут быть как конечными, так и бесконечными [19, 45]:

$$y(i) = \sum_{l=0}^i h(l)x(i-l) = \sum_{l=0}^i x(l)h(i-l), \quad i = 0, 1, \dots \quad (7.18)$$

С точки зрения назначения ЦФ, все они условно могут быть разделены на два класса: частотные фильтры и функциональные фильтры.

Частотные фильтры предназначены для целенаправленного изменения частотного спектра  $X(e^{j\omega\Delta t})$  входного сигнала. Исходными данными для проектирования таких фильтров являются задаваемые желаемые частотные характеристики. Реальные частотные характеристики ЦФ должны быть достаточно близкими к желаемым. Степень близости желаемой и реальной частотных характеристик определяется некоторой количественной мерой и может служить показателем качества частотных фильтров.

К числу частотных фильтров принадлежат избирательные фильтры, корректирующие фильтры и преобразователи Гильберта. В избирательных фильтрах полностью подавляются частотные составляющие в определенной полосе частот, называемой полосой задерживания, и сохраняются неизменными частотные составляющие в другой полосе частот, называемой полосой пропускания. Между полосами пропускания и задерживания возможен диапазон частот, характер поведения составляющих которого безразличен для выходного сигнала (полоса безразличия).

В зависимости от положения указанных полос и их количества различают следующие избирательные фильтры.

Фильтры низких частот (ФНЧ) предназначены для подавления высокочастотных составляющих спектра входного сигнала. Полоса пропускания лежит в пределах от нуля до граничной частоты пропускания  $\omega_{\text{гп}}$ , полоса задерживания определяется интервалом частот от граничной частоты задерживания  $\omega_{\text{гз}}$  до  $\pi/\Delta t$ , а диапазон  $[\omega_{\text{гп}}; \omega_{\text{гз}}]$  составляет полосу безразличия ФНЧ. Желаемая АЧХ идеального ФНЧ представлена на рис. 7.7. Фильтры высоких частот (ФВЧ) используют для подавления низкочастотных составляющих входного спектра. Полоса задерживания ограничена частотами 0 и  $\omega_{\text{гз}}$ , полоса пропускания – частотами  $\omega_{\text{гп}}$  и  $\pi/\Delta t$ , а место нахождения полосы безразличия такое же, как и в ФНЧ, только  $\omega_{\text{гп}} > \omega_{\text{гз}}$ . Желаемая АЧХ идеального ФВЧ изображена на рис. 7.7.

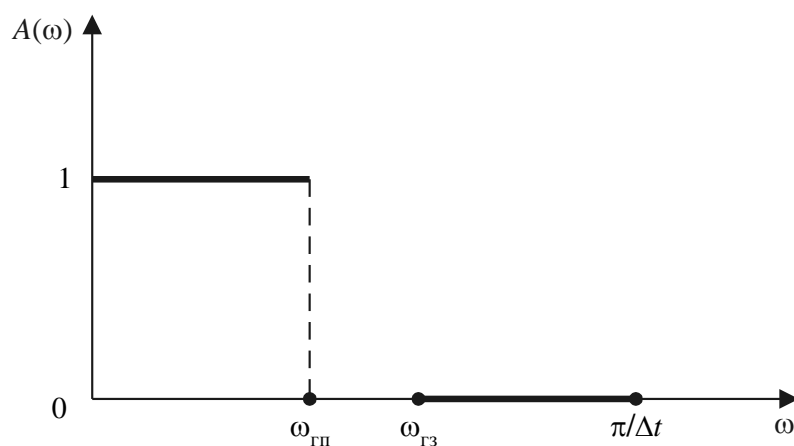


Рис. 7.7. АЧХ ФНЧ

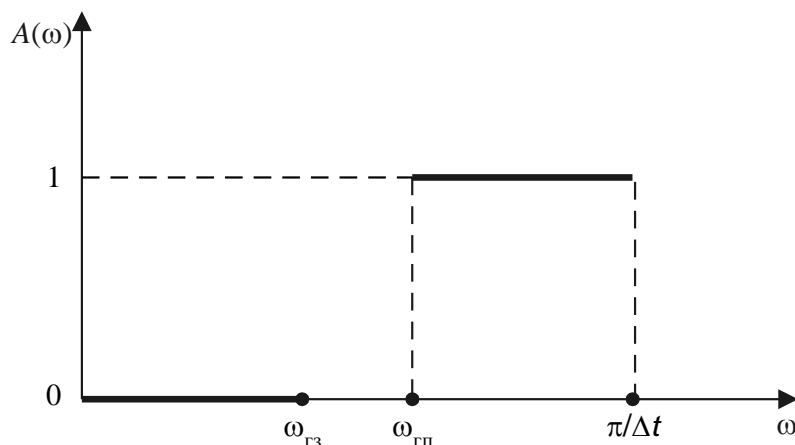


Рис. 7.7. АЧХ ФВЧ

Полосовые фильтры (ПФ) предназначены для пропускания ограниченной полосы частотных составляющих. Они имеют две полосы задерживания:  $[0; \omega_{гз1}]$  и  $[\omega_{гз2}; \pi/\Delta t]$ , две полосы безразличия:  $[\omega_{гз1}; \omega_{гп1}]$  и  $[\omega_{гп2}; \omega_{гз2}]$ , и одну полосу пропускания  $[\omega_{гп1}; \omega_{гп2}]$ , причем  $\omega_{гп1} < \omega_{гп2}$ . АЧХ идеального ПФ изображена на рис. 7.9.

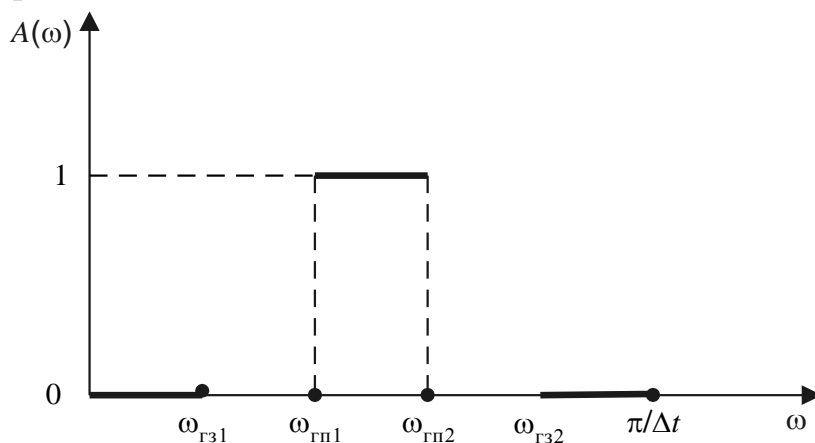


Рис. 7.9. АЧХ ПФ

Режекторные фильтры (РФ) преследуют обратную цель и служат для подавления заданной полосы средних частот. Они имеют две полосы



пропускания:  $[0; \omega_{\text{гп1}}]$  и  $[\omega_{\text{гп2}}; \pi/\Delta t]$ , две полосы безразличия:  $[\omega_{\text{гп1}}; \omega_{\text{гз1}}]$  и  $[\omega_{\text{гз2}}; \omega_{\text{гп2}}]$ , и одну полосу задерживания  $[\omega_{\text{гз1}}; \omega_{\text{гз2}}]$ . АЧХ идеального РФ представлена на рис. 7.10.

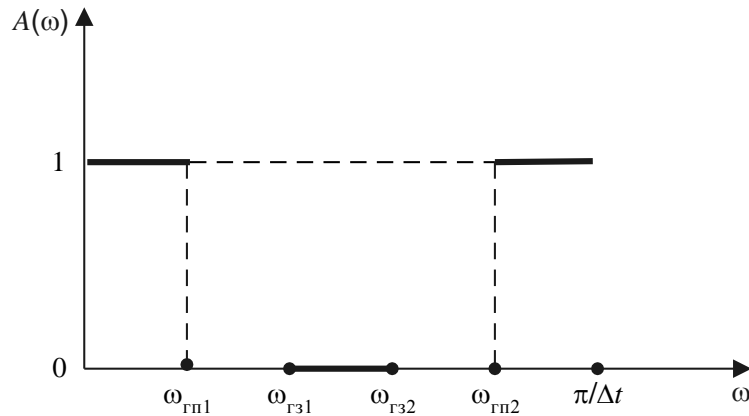


Рис. 7.10. АЧХ РФ

С помощью корректирующих фильтров обеспечивается заданное изменение интенсивности частотных составляющих определенной полосы частот. Преобразователи Гильберта (ПГ) используют для получения комплексного сигнала

$$u(i) = x(i) + jv(i), \quad (7.19)$$

спектр которого  $U(e^{j\omega\Delta t})$  удовлетворяет условию

$$U(e^{j\omega\Delta t}) = \begin{cases} 2X(e^{j\omega\Delta t}) & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi/\Delta t, \\ 0 & \text{при } \pi/\Delta t < \omega < 2\pi/\Delta t. \end{cases} \quad (7.20)$$

Из (7.22) и (7.23) следует, что спектр  $v(i)$

$$V(e^{j\omega\Delta t}) = \begin{cases} -jX(e^{j\omega\Delta t}) & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi/\Delta t, \\ jX(e^{j\omega\Delta t}) & \text{при } \pi/\Delta t < \omega < 2\pi/\Delta t, \end{cases}$$

т.е. для получения сигнала  $v(i)$  (и тем самым сигнала  $u(i)$ ) достаточно пропустить  $x(i)$  через идеальный ПГ с комплексной частотной характеристикой

$$H(e^{j\omega\Delta t}) = \begin{cases} -j & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi/\Delta t, \\ j & \text{при } \pi/\Delta t < \omega < 2\pi/\Delta t. \end{cases}$$

Для идеального ПГ действительная часть комплексной частотной характеристики равна нулю, а мнимая часть имеет вид

$$\text{Im}[H(e^{j\omega\Delta t})] = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \pi/\Delta t, \\ 1 & \text{при } \pi/\Delta t < \omega < 2\pi/\Delta t. \end{cases} \quad (7.21)$$

Идеальные частотные характеристики частотных фильтров нереализуемы. Возможна лишь их аппроксимация с той или иной степенью

точности. Частотные фильтры можно построить в виде как рекурсивных, так и нерекурсивных ЦФ.

Функциональные фильтры используют для выполнения более сложных операций над сигналами, которые напрямую могут быть и не связаны с изменением частотного спектра входного сигнала. Входной сигнал в таких фильтрах, как правило, представляется в виде аддитивной смеси полезного сигнала  $u(i)$  и случайного шума  $n(i)$  с известной корреляционной функцией либо функцией спектральной плотности  $S(\omega)$ .

К функциональным фильтрам можно отнести согласованные фильтры, оценивающие степень соответствия полезной составляющей входного сигнала некоторому эталонному сигналу на фоне шумов; дифференцирующе-сглаживающие фильтры, предназначенные для оценки производных полезного сигнала при наличии помех; экстраполирующие фильтры, вычисляющие будущее значение полезного сигнала в условиях действия случайных помех. Поскольку полное подавление случайных помех невозможно, получаемые на выходе функциональных фильтров оценки носят статистический характер. В качестве их количественной меры обычно используют дисперсию, определяемую для стационарного шума выражением

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta t} S_p(\omega) |A(\omega)|^2 d\omega. \quad (7.22)$$

В случае некоррелированного шума (математический белый шум) дисперсия оценки выражается непосредственно через импульсную характеристику функционального фильтра:

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 \sum_{i=0}^{\infty} h^2(i), \quad (7.23)$$

где  $\sigma_n^2$  – дисперсия входной помехи  $n(i)$ . Докажем справедливость этого выражения на примере НЦФ с конечной ИХ. Для этого подставим в формулу (7.25) функцию спектральной плотности физического белого ( $\alpha = \omega_s$ , где  $\omega_s$  – частота среза шума). Тогда получим

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_s} \frac{\pi \sigma_n^2}{\omega_s} |A(\omega)|^2 d\omega = \frac{\sigma_n^2}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} |A(\omega)|^2 d\omega. \quad (7.24)$$

Учтем теперь в полученном выражении АЧХ (7.10) нерекурсивного фильтра и соотношение (7.17). В этом случае

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sigma_n^2}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} h(m) h(i) \cos(m-i)\omega \Delta t dt = \sigma_n^2 \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} \cos(m-i)\omega \Delta t dt = \\ &= \sigma_n^2 \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} h(m) h(i) \left[ \frac{\sin(m-i)\omega_s \Delta t}{(i-m)\omega_s \Delta t} \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Но

$$\frac{\sin(m-i)\omega_s\Delta t}{(i-m)\omega_s\Delta t} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=i, \\ 0 & \text{при } m \neq i, \end{cases}$$

Поэтому двойная сумма в (7.25) переходит в одинарную, а выражение (7.25) преобразуется в выражение (7.23) при конечном N.

Дисперсия (7.22) или (7.23) может использоваться как количественный показатель качества функциональных фильтров.

Функциональные фильтры также могут быть выполнены как в рекурсивном, так и в нерекурсивном вариантах.

**ТЕМА №8.** Методы расчета нерекурсивных и рекурсивных фильтров. Классификация нерекурсивных цифровых фильтров по виду импульсной характеристики. Частотные характеристики нерекурсивных фильтров с симметричной и антисимметричной импульсной характеристикой. Этапы проектирования нерекурсивных фильтров. Оптимизационные и неоптимизационные методы расчета частотных фильтров. Методы расчета рекурсивных цифровых фильтров

В зависимости от вида импульсной характеристики фильтров  $h(i)$  (коэффициентов фильтра  $b_i$ , так как  $h(i) = b_i$ ) различают НЦФ с линейной ФЧХ и минимально-фазовые НЦФ. В НЦФ с линейной ФЧХ импульсная характеристика должна удовлетворять условию симметрии или антисимметрии относительно середины интервала ее определения  $[0; N)$ . Поскольку значение  $N$  (порядок нерекурсивного фильтра) может быть нечетным и четным, существует четыре вида НЦФ с линейной ФЧХ и передаточной функцией (8.7): а) фильтр вида 1:  $N$  – нечетное, ИХ – симметричная,  $h(i) = h(N-i-1)$ ; б) фильтр вида 2:  $N$  – четное, ИХ – симметричная,  $h(i) = h(N-i-1)$ ; в) фильтр вида 3:  $N$  – нечетное, ИХ – антисимметричная,  $h(i) = -h(N-i-1)$ ; г) фильтр вида 4:  $N$  – четное, ИХ – антисимметричная,  $h(i) = -h(N-i-1)$ .

Передаточные функции  $H(z)$  фильтров всех четырех видов могут иметь нули, расположенные внутри, на и вне единичной окружности на  $z$ -плоскости. На рис. 8.1, а показано возможное расположение нулей, причем  $z_1^{(1)}$  и  $z_2^{(1)}$ ,  $z_1^{(2)}$  и  $z_2^{(2)}$ ,  $z_1^{(3)}$  и  $z_2^{(3)}$  представляют собой комплексно-сопряженные величины и  $|z_1^{(1)}| = 1/|z_1^{(2)}|$ ;  $|z_2^{(1)}| = 1/|z_2^{(2)}|$ ,  $|z_1^{(3)}| = |z_2^{(3)}| = |z_4| = |z_5| = 1$ .

Фильтры всех четырех видов реализуются с учетом симметрии или антисимметрии импульсной характеристики (см. рис. 8.6). При этом реализационные характеристики, например для фильтра вида 1, имеют значения  $Q = N$ ,  $B = (N+1)/2$ ,  $M = (N+1)/2$ ,  $A = N-1$ . Рассмотренные фильтры применяют в качестве избирательных фильтров, преобразователей Гильберта, корректоров АЧХ и дифференцирующе-сглаживающих фильтров.

В минимально-фазовых НЦФ ИХ не обладает свойствами симметрии или антисимметрии. Нули передаточных функций таких НЦФ находятся внутри и на единичной окружности на  $z$ -плоскости (рис. 8.1, б). Для них характерно минимальное абсолютное значение группового времени задержки.

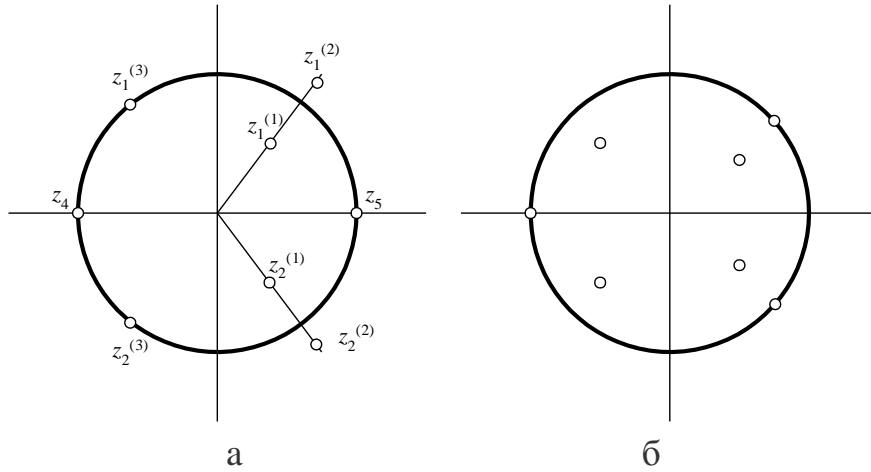


Рис. 8.1. Расположение нулей передаточных функций

Минимально-фазовые фильтры применяют в качестве избирательных в тех случаях, когда требуется малое ГВЗ. Они могут быть реализованы либо в прямой, либо в последовательной форме. При прямой форме реализации их реализационные характеристики равны  $Q = B = N$ ,  $M = N$ ,  $A = N - 1$ .

Свойства симметрии и антисимметрии импульсной характеристики НЦФ позволяют преобразовать общую форму записи их частотных характеристик (8.7), (8.10) и (8.11) к более простому виду, весьма полезному для практики расчета таких фильтров. Получим эти новые зависимости для всех четырех видов НЦФ, попутно подтвердив линейный характер их ФЧХ.

Фильтр вида 1. Используя свойство симметрии ИХ, из общей формулы АЧХ (8.10) получим

$$A_1^2(\omega) = \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(i) (\cos i\omega\Delta t + \cos(N-1-i)\omega\Delta t) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \cos \frac{N-1}{2} \omega\Delta t \right\}^2 + \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(i) (\sin i\omega\Delta t + \sin(N-1-i)\omega\Delta t) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \sin \frac{N-1}{2} \omega\Delta t \right\}^2.$$

Учитывая известные зависимости для сумм косинусов и синусов разных аргументов, после преобразований приходим к результату

$$A_1^2(\omega) = \left\{ \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}-1} 2h(i) \cos\left(i - \frac{N-1}{2}\right) \omega\Delta t + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}^2 \times \left( \cos^2 \frac{N-1}{2} \omega\Delta t + \sin^2 \frac{N-1}{2} \omega\Delta t \right),$$

из которого следует выражение для АЧХ:

$$A_1(\omega) = \left| \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}-1} 2h(i) \cos\left(i - \frac{N-1}{2}\right) \omega \Delta t + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right|;$$

это выражение путем линейного преобразования индекса  $i = \frac{N-1}{2} - k$  можно привести к виду

$$A_1(\omega) = \left| h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - k\right) \cos k \omega \Delta t \right|. \quad (8.1)$$

Для ФЧХ из формулы (8.11) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega) &= \\ &= -\arctg \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(i) (\sin i \omega \Delta t + \sin(N-1-i) \omega \Delta t) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \sin \frac{N-1}{2} \omega \Delta t}{\sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(i) (\cos i \omega \Delta t + \cos(N-1-i) \omega \Delta t) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \cos \frac{N-1}{2} \omega \Delta t} \right\} = \\ &= -\arctg \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(i) \cos\left(i - \frac{N-1}{2}\right) \omega \Delta t + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \sin \frac{N-1}{2} \omega \Delta t}{\sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(i) \cos\left(i - \frac{N-1}{2}\right) \omega \Delta t + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \cos \frac{N-1}{2} \omega \Delta t} \right\} = \\ &= -\arctg \left( \operatorname{tg} \frac{N-1}{2} \omega \Delta t \right) = -\frac{N-1}{2} \omega \Delta t. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Комплексная частотная характеристика (8.7) для этого вида НЦФ такова:

$$H_1(e^{j\omega\Delta t}) = \left| h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - k\right) \cos k \omega \Delta t \right| e^{-j(N-1)\Delta t \omega / 2}. \quad (8.3)$$

Фильтр вида 2. В этом случае  $N$  делится пополам и суммы в АЧХ и ФЧХ содержат только парные составляющие, поэтому после тригонометрических преобразований и линейной переиндексации  $i = \frac{N}{2} - 1 - k$  получаем

$$A_2(\omega) = \left| \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h \left( \frac{N}{2} - 1 - k \right) \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \omega \Delta t \right|, \quad (8.4)$$

$$\varphi_2(\omega) = -\frac{N-1}{2} \Delta t \omega, \quad (8.5)$$

$$H_2(e^{j\omega\Delta t}) = \left| \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h \left( \frac{N}{2} - 1 - k \right) \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \omega \Delta t \right| e^{-j(N-1)\Delta t \omega / 2}. \quad (8.6)$$

Фильтр вида 3. Для этого фильтра среднее значение его импульсной характеристики равно нулю, т.е.  $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$ . Кроме того, для него и следующего фильтра вида 4 суммы в АЧХ и ФЧХ будут содержать разности тригонометрических функций. Используя формулы таких разностей, получим

$$A_3(\omega) = \left| \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h \left( \frac{N-1}{2} - k \right) \sin k \omega \Delta t \right|, \quad (8.7)$$

$$\varphi_3(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \Delta t \omega, \quad (8.8)$$

$$H_3(e^{j\omega\Delta t}) = \left| \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h \left( \frac{N-1}{2} - k \right) \sin k \omega \Delta t \right| e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \Delta t \omega\right)}. \quad (8.9)$$

Фильтр вида 4. В этом случае

$$A_4(\omega) = \left| \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h \left( \frac{N}{2} - 1 - k \right) \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \omega \Delta t \right|, \quad (8.10)$$

$$\varphi_4(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \Delta t \omega, \quad (8.11)$$

$$H_4(e^{j\omega\Delta t}) = \left| \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h \left( \frac{N}{2} - 1 - k \right) \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \omega \Delta t \right| e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \Delta t \omega\right)}. \quad (8.12)$$

Таким образом, полученные результаты подтверждают линейный характер ФЧХ НЦФ с симметричными и антисимметричными импульсными характеристиками. АЧХ в таких фильтрах представляются линейными аналитическими выражениями относительно импульсной характеристики, что может быть использовано при расчете НЦФ по заданной АЧХ.

Запись АЧХ в виде линейной суперпозиции взвешенных косинусоид или синусоид позволяет определить область применения различных видов НЦФ с

точно линейными ФЧХ. АЧХ фильтров вида 1 не имеет особых точек и может принимать различные значения в зависимости от значений ИХ  $h(i)$ . Поэтому такие фильтры могут быть использованы для проектирования любых частотных и функциональных фильтров.

АЧХ фильтров второго вида равна нулю при  $\omega = \pi$  независимо от значений ИХ. Отсюда следует, что такие фильтры нельзя использовать для аппроксимации частотных фильтров с частотной характеристикой, отличной от нуля в точке  $\omega = \pi$  (например, фильтров верхних частот). АЧХ фильтров вида 3 равна нулю при  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi$ , а ФЧХ без учета множителя с линейным изменением фазы являются чисто мнимой функцией (так как  $e^{j2\pi} = j$ ). Поэтому этот вид фильтров не пригоден для проектирования ФНЧ и ФВЧ, но пригоден для аппроксимации ПФ и особенно ПГ. АЧХ фильтров вида 4 равна нулю при  $\omega = 0$ . Следовательно, фильтры этого вида не могут быть использованы для фильтрации низких частот, однако хорошо подходят для разработки ПФ, ФВЧ и ПГ.

При использовании нормированной частоты  $w$  частотные характеристики НЦФ принимают следующий вид:

а) фильтр вида 1

$$A_1(w) = \left| h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - k\right) \cos 2\pi k w \right|, \quad (8.13)$$

$$\varphi_1(w) = -\pi(N-1)w; \quad (8.14)$$

б) фильтр вида 2

$$A_2(w) = \left| \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h\left(\frac{N}{2} - 1 - k\right) \cos 2\pi(k + 0,5)w \right|, \quad (8.15)$$

$$\varphi_2(w) = -\pi(N-1)w; \quad (8.16)$$

в) фильтр вида 3

$$A_3(w) = \left| \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - k\right) \sin 2\pi k w \right|, \quad (8.17)$$

$$\varphi_3(w) = \frac{\pi}{2} - \pi(N-1)w; \quad (8.18)$$

г) фильтр вида 4

$$A_4(w) = \left| \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h\left(\frac{N}{2} - 1 - k\right) \sin 2\pi(k + 0,5)w \right|, \quad (8.19)$$

$$\varphi_4(w) = \frac{\pi}{2} - \pi(N-1)w. \quad (8.20)$$



Эти зависимости в дальнейшем будут использованы для решения задачи аналитического синтеза частотных фильтров.

Процесс проектирования нерекурсивных фильтров включает в себя ряд этапов, каждый из которых, в свою очередь, содержит определенные подэтапы. Состав этапов зависит от назначения фильтра.

Для частотных фильтров на первом этапе осуществляют математическую постановку задачи аппроксимации, поскольку, как отмечалось ранее, точное воспроизведение исходно задаваемых частотных характеристик невозможно. Этот этап включает в себя следующие подэтапы:

- выбор типа фильтра (с линейной ФЧХ определенного вида или минимально-фазового);
- выбор аппроксимируемой функции  $B(\omega)$ , задающей требования к заданной частотной характеристике;
- выбор аппроксимирующей функции  $\Phi(\omega, \{c\})$ , значения которой определяют требуемую частотную характеристику фильтра (например, АЧХ). Здесь  $\{c\}$  – вектор коэффициентов, совпадающий с вектором значений импульсной характеристики фильтра  $\{h(i)\}$  либо достаточно просто аналитически связанный с ним;
- обеспечение приблизительного равенства аппроксимирующей и аппроксимируемой функций:

$$\Phi(\omega, \{c\}) \cong B(\omega) \quad (8.21)$$

при заданных значениях  $\omega$ . При этом, если равенство (8.21) обеспечивается без всякого критерия, уточняющего его смысл, то аппроксимационная задача является неоптимизационной, если же для выполнения равенства используется какой-либо критерий приближения (аппроксимации), то аппроксимационная задача является оптимизационной. Для ее решения необходимо на этом подэтапе выбрать критерий приближения;

- определение весовой функции аппроксимации  $q(\omega)$ , задающей требования по точности приближения на различных участках диапазона изменения нормированной частоты  $\omega$ .

Таким образом, целью первого этапа является математическая формулировка задачи вычисления коэффициентов  $\{c\}$  (или импульсной характеристики  $h(i)$ ) по заданным требованиям к характеристикам фильтра.

Второй этап проектирования частотных НЦФ состоит в решении задачи вычисления коэффициентов  $\{c\}$ . По сути дела это этап расчета НЦФ, его называют еще этапом аналитического синтеза НЦФ. Этот этап включает в себя следующие подэтапы:

- оценка необходимого порядка  $N$  фильтра;
- расчет вектора коэффициентов  $\{c\}$  и связанных с ним значений ИХ фильтра;
- оценка точности воспроизведения задаваемых характеристик и ее сравнение с предъявляемыми требованиями.

Если требования к характеристикам выполняются, то второй этап завершается, в противном случае необходимо вернуться ко второму подэтапу и рассчитать вектор коэффициентов  $\{c\}$  для большего значения  $N$ .

Целью второго этапа является определение всех параметров НЦФ (порядка  $N$  и значений ИХ  $h(i)$ ).

Третий этап заключается в программной или аппаратной реализации НЦФ. Он содержит следующие основные подэтапы:

- выбор формы реализации и оценка реализационных характеристик;
- оценка разрядности представления входных и выходных сигналов, значений импульсной характеристики НЦФ и промежуточных данных;
- выбор элементной базы, разработка функциональной и принципиальной схем при аппаратной реализации НЦФ в виде специализированного устройства;
- программирование на языке используемого процессора (общего назначения или специализированного, например какого-либо сигнального процессора) при программной реализации фильтра;
- оценка точности реализации требуемых характеристик фильтра при ограниченной разрядной сетке (оценка собственных шумов фильтра).

При выполнении третьего этапа возможна ситуация, когда полученные оценки по разрядности элементов НЦФ и точности воспроизведения характеристик не могут быть выполнены на реальных устройствах. В этом случае необходимо вновь вернуться ко второму этапу и решить задачу аналитического синтеза НЦФ более точными методами при большем значении порядка фильтра  $N$  и снова перейти к третьему этапу.

Для функциональных фильтров последовательность этапов проектирования остается той же. Отличие состоит только в исходных данных для проектирования и в содержании некоторых подэтапов и методов решения оптимизационной задачи аппроксимации. Исходными данными для проектирования являются требования по точности оценки искомых параметров полезного сигнала, априорные сведения о входном полезном сигнале (монотонность, дифференцируемость, полоса частот и т.п.), а также корреляционно-спектральные характеристики помехи. Порядок фильтра, связанный в этом случае с временем наблюдения  $T_n$  (наблюдательным временем) процесса, описываемого входным сигналом, является системной характеристикой, определяемой на более высоком уровне проектирования всей системы обработки, включающей в себя НЦФ.

Наиболее распространенными неоптимизационными методами расчета частотных НЦФ являются методы взвешивания, частотной выборки и разложения аппроксимируемой функции в тригонометрический ряд Фурье [19, 45]. Все три метода используют взаимосвязь ИХ  $h(i)$  НЦФ с частотной характеристикой  $H(e^{j\omega\Delta t})$  в виде пары преобразований Фурье (8.16).

Метод взвешивания

Из соотношений (8.16) следует, что коэффициенты Фурье – разложения частотной характеристики  $H(e^{j\omega\Delta t})$  совпадают со значениями импульсной

характеристики  $h(i)$  цифрового фильтра. Однако использование этих соотношений для проектирования КИХ – фильтров связано с двумя трудностями. Во-первых, ИХ ЦФ имеет бесконечную длину, поскольку суммирование в (8.16) проводится в бесконечных пределах. Во-вторых, получаемый фильтр является физическим нереализуемым, т.к. его ИХ начинается в  $-\infty$  и никакой её сдвиг не сделает ЦФ физически реализуемым.

Естественным способом преодоления этих трудностей является усечение бесконечного ряда Фурье в (8.16) до  $N$  членов ( $i = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1$  при четном  $N$  и  $i = -(N-1)/2, -(N-3)/2, \dots, (N-1)/2$  при  $N$  нечетном). Однако простое усечение ряда приводит к известному явлению Гиббса, связанному с особенностью сходимости рядов Фурье по тригонометрическим и комплексно-экспоненциальным функциям и проявляющемуся в виде выбросов и пульсаций определенного уровня до и после точки разрыва аппроксимируемой частотной характеристики. Показано в работе, что, например, при аппроксимации ЦФ типа идеальных ФНЧ или ПФ максимальная амплитуда пульсаций частотной характеристики может достигать 9% и не уменьшается с увеличением длины импульсной характеристики, т.е. учет все большего числа членов ряда Фурье не приводит к уменьшению максимальной амплитуды пульсаций, а только сужает частотный диапазон, на котором они проявляются.

Усечение ряда Фурье можно рассматривать еще как умножение бесконечной ИХ  $h(i)$  на весовую дискретную функцию  $v_N(i)$  с конечным числом отсчетов, имеющую следующий вид:

$$v_N(i) = \begin{cases} 1 & \text{при } -(N-1)/2 \leq i \leq (N-1)/2, \\ 0 & \text{для остальных значений } i \end{cases} \quad (8.22)$$

(здесь и далее при рассмотрении весовых функций предполагается, что  $N$  – нечетное; очевидно, что несложно получить аналогичные результаты и для четного  $N$ ). Весовая функция  $v_N(i)$  играет роль своеобразного окна, поэтому её называют еще оконной функцией или просто окном. Окно (8.40) имеет вид прямоугольника и является прямоугольным окном.

Его частотная характеристика [45]

$$V_N(e^{j\omega\Delta t}) = \sin(N\omega\Delta t/2) / \sin(\omega\Delta t/2) \quad (8.23)$$

имеет лепестковую форму и содержит один главный лепесток шириной  $4\pi/N$  и ряд боковых лепестков с затухающей амплитудой и шириной, зависящей от  $N$ . Когда  $N$  возрастает, ширина лепестков уменьшается, однако площадь под каждым лепестком остается неизменной. Частотная характеристика окна позволяет интерпретировать операцию усечения ряда Фурье в частотной области. Передаточную функцию усеченного фильтра можно получить путем свертки передаточной функции неусеченного фильтра и частотной характеристики окна. Когда частотная точка удалена от места разрыва, вклад обеих частей частотной характеристики окна в интеграл свертки приблизительно одинаков, что приводит к малой погрешности аппроксимации. Вблизи точек

разрыва свертка приводит к появлению двух эффектов: во-первых, к появлению погрешности в частотной характеристике ЦФ из-за неравного вклада обеих частей частотной характеристики окна и, во-вторых, к «размыванию» разрыва в пределах некоторой полосы частот конечной ширины.

Ширина этой полосы частот зависит от ширины главного лепестка, а пульсация зависит от амплитуды боковых лепестков. Учитывая форму частотной характеристики прямоугольного окна, можно понять, почему погрешность в полученной частотной характеристике фильтра не зависит от числа  $N$ , поскольку она является функцией площади под боковыми лепестками.

Таким образом, проведенный качественный анализ показывает, что простое усечение ряда Фурье может не привести к приемлемой аппроксимации частотных характеристик и поэтому может казаться непригодным для проектирования нерекурсивных частотных ЦФ. С другой стороны, оно подсказывает идею управления сходимостью ряда Фурье с помощью других окон, форма которых должна иметь малую ширину главного лепестка частотной характеристики и малую площадь под боковыми лепестками. В идеале в таких окнах большая часть энергии должна содержаться в главном лепестке частотной характеристики, а энергия в боковых лепестках должна быстро уменьшаться при приближении  $\omega$  к  $\pi/\Delta t$ .

К сожалению, эти два требования несовместимы и возможно только их компромиссное выполнение. Тем не менее в ЦОС известны оконные весовые функции, состоящие из главного лепестка, содержащего почти всю энергию окна, и боковых лепестков, которые быстро затухают. К ним относятся окна Ганна, Хэмминга, Кайзера, Блэкмана, Фейера, Долфи-Чебышева, Ланцоша, Каппелини и другие. В качестве примера рассмотрим только окна Ганна и Хэмминга.

Окна Ганна и Хэмминга являются частными случаями более общего окна, называемого еще обобщенным окном Хэмминга. Обобщенное окно имеет следующий вид

$$v_x(i) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha)\cos(2\pi i/N), & -(N-1)/2 \leq i \leq (N-1)/2, \\ 0 & \text{при других значениях } i, \end{cases} \quad (8.24)$$

причем параметр  $\alpha$  лежит в диапазоне  $0 \leq \alpha \leq 1$ . При  $\alpha=0,5$  из окна (8.24) следует окно Ганна, а при  $\alpha=0,54$  – окно Хэмминга. Частотную характеристику обобщенного окна Хэмминга можно легко получить, если учесть, что оно может быть представлено в виде произведения прямоугольного окна и окна, определяемого формулой (8.42), но для всех значений  $i$ , т.е.

$$v_x(i) = v_{\Pi}(i)[\alpha + (1-\alpha)\cos(2\pi i/N)], \quad (8.25)$$

где  $v_{\Pi}(i)$  – прямоугольное окно (8.23). Тогда частотная характеристика обобщенного окна будет равна круговой свертке частотной характеристики

прямоугольного окна  $V_{\Pi}(e^{j\omega\Delta t})$  с последовательностью единичных импульсов  $\delta(\omega)$

$$V_X(e^{j\omega\Delta t}) = V_H(e^{j\omega\Delta t}) * [\alpha\delta(\omega) + \frac{1-\alpha}{2}\delta(\omega - 2\pi/(\Delta t N)) + \frac{1-\alpha}{2}\delta(\omega + 2\pi/(N\Delta t))]$$

и принимает следующий вид:

$$V_X(e^{j\omega\Delta t}) = \alpha V_H(e^{j\omega\Delta t}) + \frac{1-\alpha}{2} V_H(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N\Delta t})\Delta t}) + \frac{1-\alpha}{2} V_H(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{N\Delta t})\Delta t}). \quad (8.26)$$

Анализ показывает, что ширина главного лепестка частной характеристики окна Хэмминга в два раза больше, чем для прямоугольного окна, а уровень боковых лепестков значительно ниже, чем у характеристики прямоугольного окна. При  $\alpha=0,54$ , т.е. для обычного окна Хэмминга, 99,96% общей энергии спектра содержится в главном лепестке, а максимумы боковых лепестков на 40 дБ ниже главного максимума (для прямоугольного окна максимум боковых лепестков ниже главного максимума всего на 14 дБ). Достигается это тем, что

боковые лепестки функции  $V_H(e^{j(\omega \pm \frac{2\pi}{N\Delta t})\Delta t})$  находятся в противофазе с боковыми лепестками  $V_H(e^{j\omega\Delta t})$ , поэтому общий уровень боковых лепестков значительно уменьшается. В то же время пропорционально увеличивается ширина главного лепестка частотной характеристики. Для ФНЧ расширение главного лепестка соответствует расширению полосы безразличия между полосами пропускания и задерживания, тогда как уменьшение уровня боковых лепестков соответствует меньшим пульсациям в полосе пропускания и лучшему подавлению в полосе задерживания фильтра.

Методика синтеза НЦФ по методу взвешивания включает в себя следующие три этапа. На первом этапе по заданной частотной характеристике фильтра с помощью прямого преобразования Фурье определяется невзвешенная последовательность значений ИХ ЦФ  $h_1(i)$ :

$$h_1(i) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} H(e^{j\omega\Delta t}) e^{j\omega i\Delta t} d\omega. \quad (8.27)$$

Когда характеристика  $H(e^{j\omega\Delta t})$  имеет сложный вид или не может быть просто преобразована в замкнутое математическое выражение, формула (8.27) оказывается громоздкой или неудобной для интегрирования. В этом случае можно использовать численное интегрирование либо аппроксимировать интеграл (8.27) суммой и вычислять приближенную последовательность  $h_1^*(i)$  по формуле

$$h_1^*(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} H(e^{j\frac{2\pi}{M}k}) e^{j\frac{2\pi}{M}ki}. \quad (8.28)$$

По этой формуле значения  $H(e^{j\omega\Delta t}) e^{j\omega i\Delta t}$  рассчитываются в  $M$  точках  $\omega_k = 2\pi k / M$ .

Поскольку формула (8.28) является дискретизированным аналогом формулы (8.27), то

$$h_1^*(i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(i - kM).$$

Отсюда следует, что с ростом  $M$  различие между  $h_1^*(i)$  и  $h_1(i)$  уменьшается, особенно вблизи  $i=0$ . Поскольку окно выделяет только  $N$  точек  $h_1(i)$ , должно выполняться условие  $M \gg N$ .

На втором этапе синтеза формируется взвешенная последовательность  $g(i)$  путем умножения невзвешенной ИХ на весовую последовательность окна, т.е.  $g(i) = h_1(i)v(i)$ . За пределами интервала  $-(N-1)/2 \leq i \leq (N-1)/2$  эта последовательность в точности равна нулю.

На третьем этапе с помощью временного сдвига физически нереализуемая последовательность  $g(i)$  преобразуется в физически реализуемую

$$h(i) = g(i - \frac{N-1}{2}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

которая и используется в качестве искомой ИХ фильтра.

#### Метод частотной выборки

Если в (8.16) использовать не все значения непрерывной частоты  $\omega$ , а только  $N$  некоторых выборочных значений  $k\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  – постоянный шаг дискретизации по частоте, то пара интегрально-дискретных преобразований Фурье (8.16) превращается в пару конечных дискретных преобразований Фурье:

$$H(k) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) e^{-j \frac{2\pi}{N} ki}, \quad (8.29)$$

$$h(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j \frac{2\pi}{N} ki}, \quad (8.30)$$

где  $H(k)$  – выборочные значения частотной характеристики в точках, кратных  $\Delta\omega$ .

При их использовании получаемый НЦФ с некоторой точностью аппроксимирует заданную частотную характеристику. Погрешность аппроксимации возникает из-за ограниченности бесконечного ряда в (8.16)  $N$  первыми членами, она точно равна нулю в точках частот взятия выборки и имеет конечную величину в промежуточных точках. Чем более гладкой является задаваемая частотная характеристика, тем меньше погрешность аппроксимации между частотными отсчетами. С увеличением  $N$  погрешность аппроксимации так же уменьшается.

Для частотных НЦФ с точно линейной фазовой характеристикой можно получить удобные аналитические выражения для  $H(k)$ , вид которых зависит от способа выбора  $N$  равноотстоящих отсчетов частотной характеристики.

Существует два способа выбора отсчетных точек, пригодных для расчета НЦФ методом частотной выборки. При первом способе используют отсчеты в точках

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi}{N\Delta t} k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ w_k &= k / N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \right\}$$

при втором – в точках

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi}{N\Delta t} (k + 0,5), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ w_k &= (k + 0,5) / N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \right\}$$

Наличие двух способов дискретизации частоты дает дополнительные возможности при расчете фильтров с заданной частотной характеристикой. Например, если граничная частота полосы фильтра оказывается намного ближе к точке выборки, используемой при втором способе дискретизации частоты, чем при первом, то целесообразно использовать для решения задачи аппроксимации второй способ дискретизации частоты. В противном случае применяют первый способ дискретизации частоты.

Для практического вычисления  $h(i)$  НЦФ с точно линейной ФЧХ необходимо, чтобы дискретная АЧХ  $A(k)$  была четной функцией, а дискретная ФЧХ  $\varphi(k)$  – нечетной. Этого можно добиться только с помощью фильтров вида 1 и 2. В них целесообразно представить  $H(k)$  в показательной форме записи. Для первого способа дискретизации частоты

$$H(k) = A(k)e^{j\varphi(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

причем

$$A(k) = A(N-k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

и при четном  $N$

$$\varphi(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} k \left( \frac{N-1}{2} \right) & \text{при } k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1, \\ \frac{2\pi}{N} (N-k) \left( \frac{N-1}{2} \right) & \text{при } k = \frac{N}{2}+1, \dots, N-1, \\ 0 & \text{при } k = N/2, \end{cases}$$

$$H(N/2) = A(N/2) = 0,$$

а при нечетном  $N$

$$\varphi(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} k \left( \frac{N-1}{2} \right) & \text{при } k = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}, \\ \frac{2\pi}{N} (N-k) \left( \frac{N-1}{2} \right) & \text{при } k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1. \end{cases}$$

При втором способе дискретизации частоты

$$h(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j \frac{2\pi}{N} (k+0.5)i},$$

$$A(k) = A(N-1-k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

и при четном N

$$H(k) = \begin{cases} A(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2}(k+0,5)\right)} & \text{при } k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1, \\ A(k)e^{j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2}\right)(N-k-0,5)} & \text{при } k = N/2, \dots, N-1, \end{cases}$$

а при нечетном N

$$H(k) = \begin{cases} A(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2}\right)(k+0,5)} & \text{при } k = 0, 1, \dots, \frac{N-3}{2}, \\ A\left(\frac{N-1}{2}\right) & \text{при } k = \frac{N-1}{2}, \\ A(k)e^{j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2}\right)(N-k-0,5)} & \text{при } k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1. \end{cases}$$

При первом методе дискретизации частоты и четном N получаем

$$h(i) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} A(k)e^{-j(2\pi/N)[(N-1)/2-i]k} + \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} A(k)e^{j(2\pi/N)[(N-k)(N-1)/2+ik]} \right\}.$$

Подстановка  $m = N - k$  во вторую сумму дает

$$h(i) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} A(k)e^{-j(2\pi/N)[(N-1)/2-i]k} + \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} A(N-m)e^{j(2\pi/N)[m(N-1)/2+i(N-m)]} \right\}.$$

Учитывая свойство (8.54) АЧХ и то, что

$$e^{j(2\pi/N)[m(N-1)/2+i(N-m)]} = e^{j(2\pi/N)[(N-1)/2-i]m} \cdot e^{(2\pi/N)Ni},$$

а

$$e^{j(2\pi/N)Ni} = 1,$$

после объединения членов в выражении для  $h(i)$  находим

$$\begin{aligned} h(i) &= \frac{A(0)}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) [e^{-j(2\pi/N)[(N-1)/2-i]k} + e^{j(2\pi/N)[(N-1)/2-i]k}] = \\ &= \frac{A(0)}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) \cos \left[ \frac{2\pi \left( \frac{N-1}{2} - i \right) k}{N} \right]. \end{aligned}$$

Потребовав выполнения равенства  $A(k) = B(k)$ , окончательно получаем

$$h(i) = \frac{B(0)}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} B(k) \cos \left[ \frac{2\pi \left( \frac{N-1}{2} - i \right) k}{N} \right], \quad i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1.$$



Для нечетных значений  $N$  использование зависимостей (8.53), (8.56) и (8.50) приводит к похожему соотношению для ИХ:

$$h(i) = \frac{B(0)}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} B(k) \cos \left[ \frac{2\pi(i - \frac{N-1}{2})k}{N} \right], \quad i = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}.$$

После математических преобразований получаем:

- при четном  $N$

$$h(i) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} B(k) \cos \left[ \frac{2\pi(\frac{N}{2}-i)(k+0,5)}{N} \right], \quad i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1,$$

- при нечетном  $N$

$$h(i) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} B(k) \cos \left[ \frac{2\pi(\frac{N-1}{2}-i)(k+0,5)}{N} \right] + \frac{(-1)^i B(\frac{N-1}{2})}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}.$$

Найденные выражения для ИХ фильтра определяют алгоритм его расчета методом частотной выборки. В нем дискретные значения аппроксимируемой функции  $B(k)$  равны:

- для первого способа дискретизации частоты

$$B(k) = \begin{cases} B[2\pi k / (N\Delta t)] & \text{при ненормированной частоте } \omega, \\ B(k / N) & \text{при нормированной частоте } w, \end{cases}$$

- для второго способа дискретизации частоты

$$B(k) = \begin{cases} B[2\pi(k+0,5) / (N\Delta t)] & \text{при ненормированной частоте } \omega, \\ B[(k+0,5) / N] & \text{при нормированной частоте } w. \end{cases}$$

Оптимизационные методы различаются критерием аппроксимации, уточняющим смысл соотношения (8.21). Наиболее часто используют два основных критерия аппроксимации: среднеквадратический критерий, минимизирующий среднеквадратическую погрешность аппроксимации

$$\int_{w_1}^{w_2} q(w) |B(w) - \Phi(w, \{c\})|^2 dw = \min$$

и наилучший равномерный (чебышевский) критерий, минимизирующий абсолютную погрешность аппроксимации

$$\max q(w) |B(w) - \Phi(w, \{c\})| = \min, \quad w_1 \leq w \leq w_2.$$

Приведенные критерии могут применяться отдельно и совместно — каждый для определенной области частот. Функция  $q(w)$  в них является весовой функцией, влияющей на точность аппроксимации на различных диапазонах частоты. При использовании последнего критерия в цифровой

фильтрации для отдельных интервалов частот  $w_1j \leq w \leq w_2j$  задаются значениями  $\varepsilon_j$ , такими, чтобы на этих интервалах выполнялось неравенство

$$|B(w) - \Phi(w, \{c\})| \leq \varepsilon_j.$$

Тогда для  $j$ -го интервала

$$q(w) = R / \varepsilon_j,$$

где  $R$  – произвольная константа, общая для всех интервалов (нормирующий множитель).

Существуют два метода расчета НЦФ, соответствующие указанным критериям аппроксимации. Первый метод – метод наименьших квадратов – позволяет при заданных величинах  $w_1$ ,  $w_2$  и функциях  $q(w)$ ,  $B(w)$  и  $\Phi(w, \{c\})$  определить вектор коэффициентов  $\{c\}$ , минимизирующий целевую функцию:

$$G(\{c\}) = \int_{w_1}^{w_2} q(w) [B(w) - \Phi(w, \{c\})]^2 dw.$$

Необходимые и достаточные условия минимума имеют вид уравнений

$$\frac{\partial G(\{c\})}{\partial c_m} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, K,$$

где  $K$  в зависимости от четности или нечетности  $N$  принимает значения  $(N-1)/2$  или  $N/2-1$ , которые сводятся к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\{c_i\}$  и, следовательно, значений импульсной характеристики  $h(i)$ :

$$\sum_{i=0}^K d_{m,i} c_i = d_{m,K+1}, \quad m = 0, 1, \dots, K,$$

где

$$d_{m,i} = \int_{w_1}^{w_2} q(w) \varphi_m(w) \varphi_i(w) dw,$$

$$d_{m,K+1} = \int_{w_1}^{w_2} q(w) B(w) \varphi_m(w) dw.$$

Второй метод – метод наилучшей равномерной аппроксимации – основывается на чебышевской теории равномерного приближения. В соответствии с этой теорией для заданного класса функций

$\Phi_k(w, \{c\}) = \sum_{k=0}^K c_k \cos k 2\pi w$ , аппроксимируемой функции  $B(w)$ , весовой функции  $q(w)$  и замкнутого интервала  $[w_1; w_2]$  аппроксимации существует функция  $\Phi_k(w, \{c\})$  наилучшего равномерного приближения с такими значениями коэффициентов  $c_k$ , которые соответствуют минимальному значению

$$\varepsilon(\{c\}) = \max |\Delta(w, \{c\})|, \quad w_1 \leq w \leq w_2,$$

где

$$\Delta(w, \{c\}) = q(w) [B(w) - \Phi(w, \{c\})].$$

Величина  $\varepsilon(\{c\})$  представляет собой максимальное значение абсолютной погрешности аппроксимации на интервале  $[w_1, w_2]$ .

Для отыскания наилучшего равномерного приближения используют теорему Чебышева, которая утверждает, что для того, чтобы функция  $\Phi(w, \{c\})$  была функцией наилучшего равномерного приближения к функции  $B(w)$  с весовой функцией  $q(w)$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $\Delta(w, \{c\})$  принимала наибольшие и равные друг другу по абсолютной величине и чередующиеся по знаку значения в  $K + 2$  последовательно расположенных точках (точках альтернанса)  $w'_1, w'_2, \dots, w'_{K+2}$  интервала  $[w_1, w_2]$ , т.е.

$$\begin{aligned} \Delta(w'_1, \{c\}) &= -\Delta(w'_2, \{c\}) = \dots = (-1)^{K+1} \Delta(w'_{K+2}, \{c\}), \\ w_1 &\leq w'_1 < w'_2 < \dots < w'_{K+2} \leq w_2, \quad |\Delta(w'_j, \{c\})| \geq |\Delta(w, \{c\})|, \\ j &= 1, 2, \dots, K + 2. \end{aligned}$$

Последнее соотношение истинно при любом значении  $w$ , принадлежащем интервалу  $[w_1, w_2]$ .

Теорема Чебышева справедлива и для аппроксимируемых функций, заданных на отдельных интервалах, не имеющих общих точек. В этом случае функция должна быть доопределена на промежуточных интервалах так, чтобы в целом получилась непрерывная функция на замкнутом интервале, включающая все заданные интервалы. При этом все точки альтернанса должны располагаться только на заданных интервалах.

Как правило, аналитически функцию наилучшего равномерного приближения определить невозможно. Одним из наиболее эффективных численных методов определения функций чебышевского приближения является алгоритм Ремеза. Суть этого алгоритма сводится к последовательной модификации коэффициентов аппроксимирующей функции до тех пор, пока с заданной степенью точности не оказываются выполненными условия теоремы Чебышева. Алгоритм Ремеза ориентирован на применение ЭВМ.

В отличие от НЦФ устойчивые физически реализуемые рекурсивные фильтры в общем случае не обладают точно линейной фазовой характеристикой (за исключением частного случая, когда все полюсы  $H(z)$  размещаются на единичной окружности). В связи с этим при расчете РЦФ всегда приходится рассматривать заданные и амплитудную, и фазовую характеристики.

Решение задачи расчета РЦФ сводится к определению значений его коэффициентов  $b_j$  и  $a_j$  (коэффициенты фильтра в РЦФ не совпадают со значениями его импульсной характеристики), обеспечивающих воспроизведение заданных характеристик фильтра, в качестве которых могут быть использованы импульсная и частотная характеристики, характеристика группового времени задержки и т.д. Поскольку точное воспроизведение этих характеристик невозможно, задача расчета РЦФ также является аппроксимационной задачей и может быть решена чисто математическими методами.

Область, в которой производится аппроксимация, определяется назначением фильтра. Так, если аппроксимация производится в  $z$ -плоскости, результирующий фильтр будет цифровым. Если же она производится в  $s$ -плоскости, результирующий фильтр будет аналоговым и потребуются дополнительный этап его дискретизации. В соответствии с этим все методы проектирования РЦФ можно разделить на три группы.

Первая группа методов основывается на аппроксимации данных характеристик в непрерывной  $s$ -области с последующим применением простых методов отображения в  $z$ -область. Вторую группу методов расчета РЦФ образуют прямые методы расчета в  $z$ -области. Часто удается найти такое расположение полюсов и нулей фильтра, при котором обеспечивается аппроксимация непосредственно заданной характеристики фильтра. Третья группа методов базируется на использовании процедуры оптимизации для нахождения такого расположения полюсов и нулей в  $z$ -плоскости, при котором обеспечивается аппроксимация заданной характеристики фильтра. При этом обычно не удается получить формулы, связывающие коэффициенты фильтра с известными параметрами заданной характеристики. Расчет фильтров производится, как правило, численно – методом последовательных приближений.

Наибольшее распространение на практике получила первая группа методов, особенно при расчете частотных фильтров. Это связано с тем, что при таком подходе нет необходимости в создании специальной теории расчета цифровых фильтров. Для этого можно использовать хорошо разработанную теорию расчета фильтров непрерывного времени, базирующуюся на широком классе известных аналоговых фильтров: Баттерворта, Бесселя, Чебышева, Кауэра и др. Последующее применение известных методов дискретизации (перехода от непрерывной области к дискретной) позволяет относительно просто решать поставленную задачу проектирования РЦФ.

Методы расчета по фильтрам непрерывного времени различаются между собой способами дискретизации передаточной функции  $H(s)$  непрерывного фильтра. Наиболее распространенными методами дискретизации являются:

- метод отображения дифференциалов;
- метод инвариантного преобразования импульсной характеристики;
- метод билинейного преобразования;
- метод согласованного  $z$ -преобразования.

Для иллюстрации методики проектирования РЦФ рассмотрим метод билинейного преобразования.

Билинейное преобразование представляет собой конформное отображение  $s$ -плоскости в точки  $z$ -плоскости и использует замену переменной вида

$$s \rightarrow \gamma(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}),$$

где  $\gamma$  – постоянный множитель, значение которого не меняет форму преобразования.

Применение (8.89) обеспечивает однозначное преобразование передаточной функции  $H(s)$  аналогового фильтра-прототипа в передаточную функцию  $H(z)$  рекурсивного цифрового фильтра:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \gamma(1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1})}. \quad (8.90)$$

При этом преобразовании каждой точке комплексной  $s$ -плоскости ( $s = \Sigma + j\Omega$ ) ставится в соответствие определенная точка  $z$ -плоскости ( $z = \exp((\delta + j\omega)\Delta t)$ ). Мнимая ось  $s$ -плоскости ( $s = j\Omega$  для  $-\infty < \Omega < \infty$ ) отображается в единичную окружность  $z$ -плоскости ( $z = \exp(j\omega\Delta t)$ ). Левая половина  $s$ -плоскости ( $\text{Re}(s) < 0$ ) отображается в часть  $z$ -плоскости внутри единичного круга ( $|z| < 1$ ), что позволяет из устойчивого аналогового фильтра получить устойчивый цифровой рекурсивный фильтр.

Соотношение между частотами аналогового фильтра («аналоговыми» частотами)  $\Omega$  и цифрового фильтра («цифровыми» частотами)  $\omega$  можно определить подстановкой  $s = j\Omega$  и  $z = e^{j\omega\Delta t}$ . Оно выражается следующим соотношением:

$$\Omega = \gamma \operatorname{tg}(\omega\Delta t/2) = \gamma \operatorname{tg}\pi w.$$

На рис. 8.2 представлен график зависимости для случая  $\gamma = 1$ .

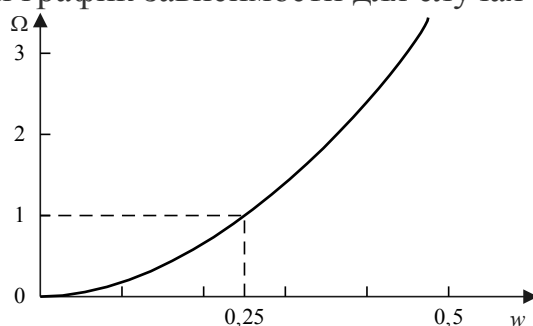


Рис. 8.2. График зависимости между частотами аналогового и цифрового фильтров

Для довольно большого практически важного класса частотно-избирательных фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ и РФ) частотная деформация может быть скомпенсирована. Метод компенсации деформации достаточно прост. Совокупность характерных частот среза полос пропускания и задерживания ЦФ известна. Выбор параметра  $\gamma$  по формуле

$$\gamma = \operatorname{ctg}(\omega_{\text{гп}}\Delta t/2) = \operatorname{ctg}\pi w_{\text{гп}}$$

приводит к нормированному аналоговому фильтру-прототипу ( $\Omega_{\text{п}} = 1$ ), что удобно при использовании справочников по аналоговым фильтрам.

**ТЕМА №9.** Методы аналитического синтеза цифровых фильтров. Синтез оптимальных фильтров. Адаптивные полиномиальные фильтры. Синтез квазиоптимальных полиномиальных фильтров.

Как уже отмечалось, функциональные фильтры часто используются в системах обработки и управления для оценки параметров входного полезного сигнала в условиях действия случайных помех. В зависимости от решаемых задач обработки находят применение различные математические модели полезного сигнала, причем наиболее распространенными являются полиномиальные модели, описывающие широкий класс входных сигналов. Функциональные фильтры, служащие для оценки параметров полиномиальных сигналов, называют еще *полиномиальными* фильтрами. К их числу принадлежат и цифровые дифференцирующее-сглаживающие фильтры (ЦДСФ), предназначенные для сглаживания, дифференцирования и экстраполяции сигналов, искаженных случайными помехами.

В общем случае входной сигнал  $x(i)$  полиномиального ЦФ представляется в виде аддитивной смеси полезного детерминированного сигнала  $u(i)$  и случайной помехи  $n(i)$ :

$$x(i) = u(i) + n(i). \quad (9.1)$$

Полезная составляющая входного сигнала является полиномом  $r$ -го порядка

$$u(i) = \sum_{k=0}^r p_k g_k(i) \quad (9.2)$$

с неизвестными коэффициентами (параметрами)  $p_k$  и известными функциями  $g_k(i)$ , а помеховая составляющая есть случайная функция времени с известными статистическими характеристиками. Назначение полиномиального ЦФ состоит в определении всех параметров  $p_k$ ,  $k=0, 1, \dots, r$ . При наличии помехи точное определение  $p_k$  невозможно. Поэтому с помощью ЦФ получают *оценки*  $\bar{p}_k$  параметров  $p_k$ , в том или ином смысле приближающиеся к их истинным значениям.

Необходимость определения всех  $(r+1)$  параметров приводит к многоканальной структуре полиномиального ЦФ, каждый из каналов которого может быть реализован в рекурсивном или нерекурсивном виде. В данной книге рассматриваются только нерекурсивные полиномиальные ЦФ.

В этом случае оценка  $k$ -го параметра к  $j$ -му моменту текущего времени представляется в виде уравнения

$$\bar{p}_k(j) = \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) h_k^r(i), \quad (9.3)$$

где  $x(j-i)$  есть скользящая выборка входного сигнала, а  $h_k^r(i)$  – ИХ  $k$ -го канала полиномиального ЦФ, что соответствует аппроксимации сигнала  $x(j-i)$  аппроксимирующей функцией

$$\Phi[i, \{\bar{p}_k(j)\}] = \sum_{k=0}^r \bar{p}_k(j) g_k(i). \quad (9.4)$$

Здесь и далее переменная  $j$  снова, как и в главе 7, означает текущее дискретное время, а величина  $r$ , используемая в обозначении ИХ  $h_k^r(i)$  и являющаяся максимальным порядком полиномов (9.2) и (9.4), называется еще и *порядком* полиномиальных ЦФ (не путать с величиной  $N$ , называемой порядком в частотных нерекурсивных фильтрах).

Показателем качества полиномиального ЦФ  $r$ -го порядка является точность получаемых выходных оценок  $\bar{p}_k(j)$ , которая количественно характеризуется математическим ожиданием  $M[\bar{p}_k(j)]$  и дисперсией  $\sigma_k^2(j)$ . Для входной помехи, представляемой стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и известной корреляционной функцией  $R_n(\tau)$  (или функцией спектральной плотности мощности  $S_n(\omega)$ ), эти величины будут равны

$$M[\bar{p}_k(j)] = \mu_k p_k(j), \quad (9.5)$$

$$\sigma_k^2(j) = \sigma_k^2 = \frac{\Delta t}{\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} S_n(\omega) |A_k(\omega)|^2 d\omega. \quad (9.6)$$

Здесь величины  $\mu_k$  зависят от вида функций  $g_k(i)$ , а  $A_k(\omega)$  является АЧХ ЦФ  $k$ -го канала.

Соотношение (9.5) выражает условие несмещенности оценки. Из него следует, что при входном сигнале, содержащем только полезную составляющую, оценка на выходе  $k$ -го канала должна с точностью до множителя  $\mu_k$  совпадать с самим параметром. В этом случае полиномиальный фильтр будет иметь заданную (в частном случае – нулевую) систематическую (динамическую) выходную погрешность. Это условие можно записать в другом эквивалентном и более удобном для использования виде. Если  $x(i) = u(i)$ , то из выражения (9.3) следует, что

$$\bar{p}_k(j) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=0}^r p_m(j) g_m(i) h_k^r(i) = \sum_{m=0}^r p_m(j) \sum_{i=0}^{N-1} g_m(i) h_k^r(i).$$

Тогда условие (9.5) представится так:

$$\sum_{i=0}^{N-1} g_m(i) h_k^r(i) = \mu_k \delta_{m,k}, \quad m = 0, 1, \dots, r, \quad (9.7)$$

где  $\delta_{m,k}$  – символ Кронекера.

Дисперсия (9.6) случайных погрешностей оценки  $k$ -го параметра через АЧХ  $A_k(\omega)$  фильтра зависит от ИХ  $h_k^r(i)$ . Ставя задачу оптимального синтеза полиномиального ЦФ, ИХ  $h_k^r(i)$  следует искать из уравнения

$$\sigma_k^2 = \min, \quad (9.8)$$

добавив к нему в виде ограничения требование (9.7) несмещенности оценки. В такой постановке задача синтеза оптимальных полиномиальных фильтров известна как задача Заде-Рагацини.

Непосредственная минимизация показателя (9.6) затруднительна, поэтому целесообразно его представить в другой эквивалентной и более удобной для решения задачи синтеза ЦФ форме, обеспечивающей выполнение условий (9.8) и (9.7). Рассмотрим оценку  $\bar{p}_k(j)$  как случайную функцию времени  $j$  и найдем ее корреляционную функцию

$$\begin{aligned} R_k(j_1, j_2) &= M[\bar{p}_k(j_1)\bar{p}_k(j_2)] = M\left\{\left[\sum_{i_1=0}^{N-1} x(j_1 - i_1)h_k^r(i_1)\right]\left[\sum_{i_2=0}^{N-1} x(j_2 - i_2)h_k^r(i_2)\right]\right\} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} h_k^r(i_1)h_k^r(i_2) \cdot M[x(j_1 - i_1)x(j_2 - i_2)], \end{aligned}$$

где  $M$  означает операцию вычисления математического ожидания. Но математическое ожидание

$$M[x(j_1 - i_1)x(j_2 - i_2)] = M[n(j_1 - i_1)n(j_2 - i_2)] = R_n(j_1 - i_1, j_2 - i_2).$$

Поэтому получаем

$$R_k(j_1, j_2) = \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} R_n(j_1 - i_1, j_2 - i_2)h_k^r(i_1)h_k^r(i_2).$$

Из этой формулы можно найти зависимость для дисперсии оценки  $k$ -го параметра:

$$\sigma_k^2 = R_k(0, 0) = \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} R_n(i_1, i_2)h_k^r(i_1)h_k^r(i_2), \quad (9.9)$$

отражающей её связь с искомой ИХ  $h_k^r(i)$  фильтра и корреляционной функцией входной помехи.

Условие несмещенности оценки превращает задачу аналитического синтеза оптимального полиномиального фильтра в задачу нахождения условного экстремума функционала (9.9) при наличии системы ограничений вида (9.7). Решение такой задачи может быть выполнено методом неопределенных множителей Лагранжа. В соответствии с ним условный экстремум (9.9) эквивалентен безусловному экстремуму лагранжиана

$$L[h_k^r(i), \{\lambda_m\}] = \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} R_n(i_1, i_2)h_k^r(i_1)h_k^r(i_2) - 2 \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m \left[ \sum_{i=0}^{N-1} g_m(i)h_k^r(i) - \mu_m \delta_{m,k} \right]$$

где  $\lambda_m$  – неопределенные множители Лагранжа.

Экстремум лагранжиана достигается путем решения системы алгебраических уравнений, получаемых с помощью его дифференцирования по неизвестным  $h_k^r(i)$  и  $\lambda_m$ :



$$\frac{\partial L[h_k^r(i), \{\lambda_m\}]}{\partial h_k^r(i)} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\frac{\partial L[h_k^r(i), \{\lambda_m\}]}{\partial \lambda_m} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, r.$$

В развернутой форме записи эта система имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} R_n(j, i) h_k^r(i) - \sum_{m=0}^r \lambda_m g_m(j) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \\ \sum_{i=0}^{N-1} g_m(i) h_k^r(i) &= \mu_m \delta_{m,k}, \quad m = 0, 1, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

и может быть записана так же в компактной блочно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad (9.11)$$

где приведенные матрицы равны

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_n(0,0) & R_n(0,1) & \dots & R_n(0,N-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_n(N-1,0) & R_n(N-1,1) & \dots & R_n(N-1,N-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0(0) & g_1(0) & \dots & g_r(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_0(N-1) & g_1(N-1) & \dots & g_r(N-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^T = [h_k^r(0) \ h_k^r(1) \dots h_k^r(N-1)],$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T = [\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_r],$$

$$\mathbf{M}^T = [\mu_0 \mu_1 \dots \mu_r],$$

а матрица – столбец  $\mathbf{0}$  является нулевой матрицей.

Решение системы (9.11) позволяет получить выражение для вычисления оптимальной ИХ:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{M}. \quad (9.12)$$

При этом дисперсия оценки  $k$ -го параметра будет равна

$$\sigma_k^2 = \mathbf{H}^T \mathbf{R} \mathbf{H}. \quad (9.13)$$

В общем случае нахождение окончательных выражений для ИХ  $h_k^r(i)$  по формуле (9.12) затруднительно, поскольку требует выполнения большого объема расчетной работы. При этом основная трудность состоит в обращении матриц: сначала  $\mathbf{R}$ , а затем  $(\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})$ . Те же проблемы сохраняются и при использовании формулы (9.12) для расчета численных значений ИХ  $h_k^r(i)$ , хотя в этом случае можно эффективно использовать ЭВМ.

Следует отметить, что общее решение задачи синтеза оптимального ЦФ в виде (9.12) является некорректным по Тихонову, поскольку обладает высокой чувствительностью по отношению к изменениям используемой корреляционной функции. Если реальная корреляционная функция помехи, поступающей на вход фильтра, отличается от алгоритмической  $R(\tau)$ ,

используемой при расчете фильтра, то реальная и алгоритмическая (9.13) дисперсии оценок тоже будут различаться. При этом различие в дисперсии может оказаться существенным даже при малом расхождении в корреляционных функциях. Математически это может быть связано с плохой обусловленностью матрицы  $\mathbf{R}$  (её определитель близок к нулю) и с возникающими при этом сложностями в вычислении обратной матрицы  $\mathbf{R}^{-1}$ . Для снижения чувствительности решения (9.12) к изменениям корреляционной функции используют различные существующие методы его регуляризации [58]. Одним из таких методов является спектральный метод синтеза оптимальных полиномиальных ЦФ, рассмотренный в следующей главе.

Для случая некоррелированной помехи решение (9.12) является корректным и при помехи типа физического белого шума ИХ фильтра могут быть найдены из общей формулы (9.12) с использованием автокорреляционной функции

$$R(i_1, i_2) = \frac{\sigma_n^2 \sin[\omega_g \Delta t (i_1 - i_2)]}{\omega_g \Delta t (i_1 - i_2)}, \quad (9.14)$$

где  $\sigma_n^2$  – дисперсия входной помехи  $n(i)$ , а  $\omega_g$  – верхняя частота частотного спектра помехи (частота среза). При помехе типа математического белого шума матрица

$$\mathbf{R} = \sigma_n^2 \mathbf{E}$$

( $\mathbf{E}$  – единичная матрица), решение (9.12) значительно упрощается и ИХ фильтра можно вычислить по формуле

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{M}. \quad (9.15)$$

В этом случае импульсные характеристики полиномиального фильтра зависят только от вида функций  $g_k(i)$ .

Для этого случая упрощается и запись дисперсии оценки, которая принимает следующий вид:

$$\sigma_k^2 = \sigma_n^2 \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \sigma_n^2 \sum_{i=0}^{N-1} [h_k^r(i)]^2 \quad (9.16)$$

и зависит только от дисперсии входного шума и вида ИХ фильтра.

Чтобы сделать показатель качества полиномиальных фильтров инвариантным по отношению к дисперсии входной помехи, часто в полиномиальной фильтрации вместо дисперсии пользуются *коэффициентом сглаживания (коэффициентом фильтрации)*

$$\rho_k^r = \sigma_k^2 / \sigma_n^2. \quad (9.17)$$

Для некоррелированной помехи типа математического белого шума он будет равен

$$\rho_k^r = \sum_{i=0}^{N-1} [h_k^r(i)]^2. \quad (9.18)$$

Коэффициент сглаживания особенно полезен при сравнительном анализе различных полиномиальных фильтров.

ЦДСФ используются для многократного дифференцирования полезного сигнала, искаженного случайной помехой. В них аппроксимирующая функция представляется степенным полиномом (9.39) с параметрами  $\bar{p}_k(j)$ , с точностью до постоянного множителя  $\Delta t^k / k!$  совпадающими с оценкой  $k$ -й производной  $\bar{u}^{(k)}(j)$  полезного сигнала, т.е.

$$\bar{p}_k(j) = \bar{u}^{(k)}(j) \Delta t^k / k!.$$

По этой причине для них функции

$$g_k(i) = i^k,$$

а элементы

$$\mu_k = (-1)^k, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

Значения ИХ для оптимальных ЦДСФ могут быть найдены из общих матричных уравнений (9.12) и (9.15), если принять в них

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1^1 & \dots & 1^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (N-1)^1 & \dots & (N-1)^r \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{M}^T = [0 \dots 0 (-1)^k 0 \dots 0].$$

Вычисление ИХ оптимальных ЦДСФ по общим формулам (9.12) и (9.15) остается весьма трудоемкой задачей. Для случая представления помехи в виде математического белого шума, который часто применяется на практике, эту задачу можно существенно упростить, если использовать при синтезе ЦДСФ метод наименьших квадратов (см. §2.4).

В этом случае задача синтеза ЦДСФ сводится к задаче аппроксимации во временной области функционального пространства  $l^2$  и минимизируется общая погрешность аппроксимации входного сигнала  $x(j-i)$  рядом (9.39), а искомые параметры  $\bar{p}_k(j)$  находятся из уравнения

$$\sum_{i=0}^{N-1} [x(j-i) - \Phi(i, \{\bar{p}_m(j)\})]^2 = \sum_{i=0}^{N-1} [x(j-i) - \sum_{m=0}^r (-1)^m \bar{p}_m(j) i^m]^2 = \min, \quad (9.21)$$

решение которого эквивалентно решению следующей системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=0}^r (-1)^m \bar{p}_m(j) \sum_{i=0}^{N-1} i^{m+k} = \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) i^k, \quad k = 0, 1, \dots, r. \quad (9.22)$$

Использование *способа Крамера* позволяет получить общее решение системы (9.22) в виде

$$\bar{p}_k(j) = \Delta_k / \Delta, \quad (9.23)$$

где  $\Delta$  – главный определитель системы (9.22), а  $\Delta_k$  –  $k$ -й частный определитель, получающийся из главного заменой его  $k$ -го столбца на столбец свободных членов системы. Выражая  $\Delta_k$  через элементы столбца свободных членов, решение (9.23) можно представить следующим образом:

$$\bar{p}_k(j) = \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) [(-1)^k \sum_{m=0}^r i^m \Delta_k(m) / \Delta], \quad (9.24)$$

где  $\Delta_k(m)$  означают алгебраические дополнения  $k$ -го определителя по элементам  $m$ -го столбца.

Из сравнения зависимостей (9.3) и (9.24) следует, что решение, получаемое с помощью метода наименьших квадратов, представляется в виде нерекурсивного цифрового фильтра с импульсной характеристикой

$$h_k^r(i) = \frac{(-1)^k}{\Delta} \sum_{m=0}^r i^m \Delta_k(m). \quad (9.25)$$

Это решение является корректным, несмещенным и совпадает с общим решением (9.15) оптимизационной задачи для случая некоррелированной помехи.

Есть еще один способ решения системы алгебраических уравнений – *способ Гаусса*. Применение его к системе (9.22) позволяет получить другую форму записи искомым параметров, в которой каждый  $k$ -й параметр выражается через параметры с более высокими номерами:

$$\bar{p}_k(j) = \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) h_k^k(i) + \sum_{m=k+1}^r \bar{p}_m(j) d(N, k, m), \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (9.27)$$

где величины  $d(N, k, m)$  представляют собой коэффициенты компенсационных членов при учете параметров с высшими номерами, а  $h_k^k(i)$ , как и прежде, являются ИХ  $k$ -го канала ЦДСФ  $k$ -го порядка. Для заданного  $r$  ИХ  $h_k^k(i)$  и компенсационные коэффициенты  $d(N, k, m)$  могут быть найдены из решения системы уравнений (9.22). Представление уравнений ЦДСФ  $r$ -го порядка в форме (9.27) носит название *компенсационной формы* их записи. При компенсационной форме записи уравнений ЦДСФ коэффициенты сглаживания так же можно представить в виде компенсационного выражения:

$$\rho_k^r = \rho_k^k + \sum_{m=k+1}^r \rho_m^r [d(N, k, m)]^2. \quad (9.28)$$

Под *адаптивными* фильтрами понимаются фильтры, параметры и структура которых могут изменяться на основе текущей информации с целью достижения некоторого заданного состояния при начальной неопределенности и изменяющихся условий работы. Адаптивные фильтры могут приспособливаться к изменению внешних и внутренних условий.

В полиномиальных фильтрах можно выделить два основных фактора проявления неопределенности: 1) в начальных сведениях о статистике помехи и 2) в сведениях о полезном сигнале. Отклонение реальных сведений от тех, что были использованы при расчете фильтра, может привести к существенному снижению качества фильтрации. Бороться с этим недостатком можно с помощью использования двух возможных здесь видов адаптаций: по помехе и по полезному сигналу.

При реализации полиномиальных фильтров с адаптацией по помехе необходимо в процессе текущей работы фильтра вести статистическую обработку входного сигнала, уточняя функцию спектральной плотности или корреляционную функцию помехи. Полученные новые характеристики помехи используются для расчета новых импульсных характеристик фильтра. Таким образом, адаптивный по помехе полиномиальный фильтр должен в своей структуре содержать блоки статистической обработки и расчета импульсных характеристик. При этом используются известные алгоритмы вычисления  $S(\omega)$  и  $R(\tau)$  и приведенные ранее аналитические зависимости для расчета ИХ полиномиального ЦФ.

Следует иметь в виду, что практическая реализация полиномиального ЦФ с адаптацией по помехе требует значительных затрат вычислительных ресурсов из-за вычисления статистических характеристик помехи и ИХ фильтра в реальном масштабе времени. В случае использования в структуре фильтра только модели помехи в виде математического белого шума адаптация по помехе не требуется.

Необходимость в адаптации по полезному сигналу возникает в тех случаях использования полиномиальных ЦФ, когда реальный полезный сигнал недоступен разработчику фильтра. Примером такой ситуации может служить применение полиномиальных ЦФ в системах оценки параметров движения объекта, принадлежащего противоборствующей стороне. Не смотря на то, что реальные законы движения, описываемые с помощью полезного сигнала, в большинстве своем хорошо представляются в классе степенных полиномов времени, что позволяет эффективно использовать ЦДСФ, реальный порядок полинома входного полезного сигнала может отличаться от максимального, на который обычно настраивается ЦДСФ. Это приводит к тому, что, во-первых, будут вычислены параметры, не содержащиеся в реальном входном сигнале (эти параметры из-за помеховой составляющей не будут равными нулю), а, во-вторых, имеющиеся в реальном сигнале параметры будут вычислены с меньшей возможной точностью.

Чтобы получать оптимальные оценки при любом порядке полиномов полезного сигнала, необходимо перестраивать структуру ЦДСФ под порядок реального сигнала. Реализовать это можно двумя способами. В первом способе используются ИХ  $h_0^0(i), h_0^1(i), h_1^1(i), \dots, h_0^{r_m}(i), \dots, h_{r_m}^{r_m}(i)$  всех ЦДСФ с нулевого по максимально возможный для заданного класса входных сигналов порядок  $r_m$ . Настройка на реальный порядок  $r$  в этом случае осуществляется следующим образом. Сначала с помощью ЦДСФ  $r_m$ -го порядка вычисляется значение  $\bar{p}_{r_m}(j)$  параметра  $p_{r_m}(j)$ . Затем выявляется его наличие в реальном сигнале, для чего это значение сравнивается с его пороговой величиной  $\Delta_{r_m}$

$$\left| \overline{p}_{r_m}(j) \right| \leq \Delta_{r_m}. \quad (9.33)$$

Если условие (9.33) не выполняется, то реальный порядок полинома  $r$  принимается равным максимальному порядку  $r_m$  и оценка всех параметров осуществляется с помощью ЦДСФ  $r_m$ -го порядка. Если же условие (9.33) выполняется, то порядок уменьшается на 1 и с помощью  $(r_m-1)$ -го канала с ИХ  $h_{r_m-1}^{r_m-1}(i)$  ЦДСФ  $(r_m-1)$ -го порядка вычисляется значение  $\overline{p}_{r_m-1}(j)$  параметра  $p_{r_m-1}(j)$ , которое сравнивается со своим порогом  $\Delta_{r_m-1}$ . Процедура сравнения заканчивается при первом невыполнении условия вида (9.33). То значение порядка, при котором это происходит, принимается в качестве реального порядка.

Реализация этого способа требует хранения значений всех импульсных характеристик  $h_0^0(i)$ ,  $h_0^1(i)$ ,  $h_1^1(i)$ , ...,  $h_0^{r_m}(i)$ , ...,  $h_{r_m}^{r_m}(i)$ , число которых равно  $r_m(r_m+1)/2$ . Сравнение в условиях вида (9.33) параметра с его пороговым значением, а не с нулем, объясняется тем, что фильтрация в ЦДСФ не подавляет помеху полностью и в вычисленных значениях параметров всегда присутствует остаточная случайная составляющая. Пороги влияют на вероятность и точность оценки параметров и эффективный их выбор является важной математической и прикладной задачей.

При втором способе адаптации по полезному сигналу осуществляется автоматическая настройка структуры ЦДСФ на реальный полезный сигнал путем внесения или невнесения в уравнения ЦДСФ компенсации по параметрам более высокого порядка в зависимости от устанавливаемого факта их наличия или отсутствия в реальном входном сигнале. При этом используется компенсационная форма (9.27) записи уравнений ЦДСФ. Общий вид алгоритма адаптивного ЦДСФ  $r_m$ -го порядка в этом случае следующий:

$$\left. \begin{aligned} \overline{p}_k(j) &= \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i)h_k^k(i) + \sum_{\lambda=k+1}^{r_m} \overline{p}_\lambda(j)d(N,k,\lambda), \\ \overline{p}_k(j) &= \begin{cases} \overline{p}_k(j) & \text{при } \left| \overline{p}_k(j) \right| > \Delta_k^{(k)}, \\ 0 & \text{при } \left| \overline{p}_k(j) \right| \leq \Delta_k^{(k)}, \end{cases} \\ k &= r_m, r_m-1, \dots, 1, \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

где  $\Delta_k^{(k)}$  является пороговой величиной  $k$ -го параметра ЦДСФ  $k$ -го порядка.

Пороговые величины играют важную роль в адаптивных ЦДСФ, поскольку от них зависит вероятность выявления (обнаружения) искоемых параметров в составе сигнала и точность их оценки. Методика расчета пороговых величин была разработана Потаповым Е.С. [48] и зависит от порядка ЦДСФ. Рассмотрим

её для ЦДСФ 1-го порядка. Примеры расчета порогов в ЦДСФ других порядков приведены в книге.

Пусть помеха во входном сигнале подчиняется нормальному закону распределения (что соответствует преобладающему большинству реальных сигналов в задачах их обнаружения и оценки). Обозначим плотности вероятности случайных отклонений значений постоянной составляющей сигнала от истинного значения в виде  $f_0(\Delta y)$  ( $\Delta y$  – случайная величина отклонения), а плотность вероятности случайного отклонения значений его первой производной в виде  $f_1(\Delta y)$ . Эти плотности вероятности будут равны

$$f_0(\Delta y) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\Delta y^2}{2\sigma_0^2}\right]; \quad f_1(\Delta y) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\Delta y^2}{2\sigma_1^2}\right], \quad (9.35)$$

где  $\sigma_0^2$  и  $\sigma_1^2$  являются дисперсиями оценки постоянной составляющей и производной с помощью ЦДСФ 0-го и 1-го порядков соответственно ( $\sigma_1 > \sigma_0$ ), а их графики приведены на рис. 9.1.

В общем случае точка 0 на оси абсцисс (см. рис. 9.1) характеризует точное значение постоянного сигнала, а функция  $f_0(\Delta y)$  – разброс (отклонения) его значений после фильтрации его фильтром с ИХ  $h_0^0(i)$ . При этом заштрихованная область размером  $\delta$  определяет вероятность совпадения сглаженного значения сигнала с точным в пределах  $\pm\delta/2$ . Точки 1, 2, 3 на оси абсцисс определяют точные значения линейно изменяющегося сигнала с различными значениями производных, а функции  $f_{11}(\Delta y)$ ,  $f_{13}(\Delta y)$  и  $f_{12}(\Delta y)$ , характеризуют отклонения его значений после фильтрации фильтром с ИХ  $h_0^1(i)$ . При этом сигнал в точке 2 имеет большую производную, чем сигнал в точке 1, а в точке 3 – большую, чем в точке 2.

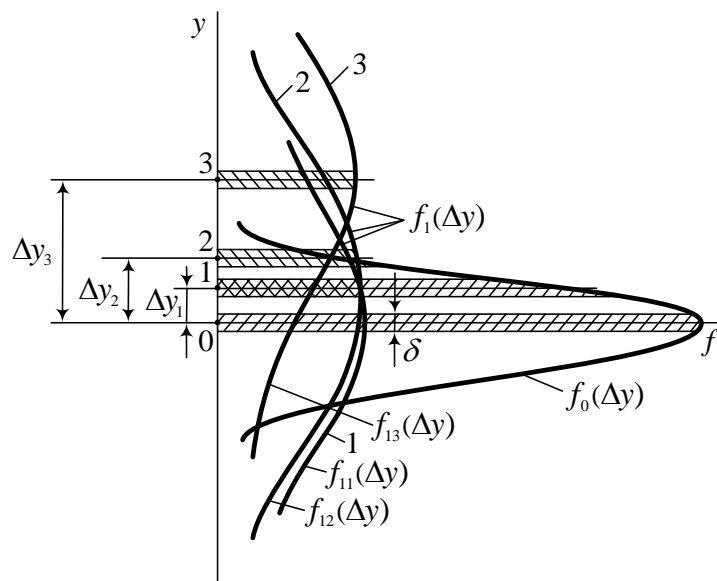


Рис. 10.1 Иллюстрация процесса выбора порога по первой производной

Предположим теперь, что полезная составляющая входного сигнала изменяется линейно, а точное значение его в текущий момент определяется точкой 1. При сглаживании входного сигнала фильтром с ИХ  $h_0^1(i)$  из-за наличия случайных погрешностей вероятность того, что сглаженное значение сигнала совпадает с точным его значением в окрестности точки 1, определяется заштрихованной площадью под кривой  $f_{11}(\Delta y)$ . Предположим также, что при сглаживании этого же сигнала фильтром с ИХ  $h_0^0(i)$  среднее сглаженное его значение совпадет с точкой 0. Из графиков рис. 9.1. видно, что вероятность совпадения сглаженного значения сигнала, полезная составляющая которого линейно изменяется, с выхода фильтра с ИХ  $h_0^0(i)$  (т.е. без компенсации по 1-й производной) с точным значением этого сигнала, задаваемым окрестностью точки 1, определяется заштрихованной площадью под кривой  $f_0(\Delta y)$  в районе точки 1 и эта вероятность больше, чем при применении фильтра с ИХ  $h_0^1(i)$  (т.е. с компенсацией по 1-й производной). Следовательно, введение компенсации по 1-й производной в данном конкретном случае нецелесообразно, т.к. уменьшается достоверность совпадения сглаженного сигнала с его истинным значением в точке 1.

Проводя аналогичные рассуждения и сравнения по отношению к сигналу, точное значение которого определяется точкой 3, получаем, что вероятность совпадения сглаженного значения сигнала с выхода фильтра с ИХ  $h_0^0(i)$  с точным значением этого сигнала (окрестность точки 3) определяется заштрихованной площадью под кривой  $f_0(\Delta y)$  в области точки 3 и эта вероятность меньше, чем при применении фильтра с компенсацией по 1-й производной. Следовательно, в этом случае введение компенсации по 1-й производной (или использование фильтра с ИХ  $h_0^1(i)$ ) оказывается целесообразным.

Из рис. 9.1 видно, что точка 2 характеризует сигнал с таким значением производной, после увеличения которой целесообразно введение компенсации по 1-й производной. Значение порога для введения компенсации можно определить из неравенства

$$\delta f_1(0) \geq \delta f_0(\Delta y), \quad (9.36)$$

которое выполняется при  $\Delta y = \Delta y_1$  и  $\Delta y = \Delta y_2$  и не выполняется при  $\Delta y = \Delta y_3$  (см. рис. 9.1). Подставив в (9.36) значения функций из (9.35) и прологарифмировав обе его части, получим

$$\ln(1/\sigma_1) \geq \ln(1/\sigma_0) - 0,5\Delta y^2 / \sigma_1^2; \quad \Delta y = 0,5\dot{y}_m(N-1), \quad (9.37)$$

где  $\dot{y}_m$  – максимальное нормированное значение первой производной (умноженной на  $\Delta t$ ) на выходе фильтра с ИХ  $h_1^1(i)$ .

Разрешив (9.37) относительно  $\dot{y}_m$ , получим значение пороговой величины для параметра  $\overline{p}_1(j)$ :  $|\dot{y}_m| \geq \left| \frac{2\sigma_0\sqrt{2\ln(\sigma_1/\sigma_0)}}{N-1} \right| = \Delta_1^{(1)}.$



Изложенное выше нетрудно распространить на ЦДСФ более высокого порядка и вычислить пороговые значения для других производных. Данная методика применима и в случае действия шумов с другими известными статистическими характеристиками, отличными от нормальных.

Отклонение показателя качества от его оптимального значения в допустимых пределах приводит к возможности построения особого класса *квазиоптимальных* ЦФ, в которых допустимые отклонения показателя качества используются для упрощения их структуры и сокращения затрат вычислительных ресурсов. Задачу синтеза квазиоптимальных ЦФ можно проиллюстрировать с помощью геометрического представления алгоритмов фильтрации в пространстве их показателя качества. Пусть оптимальный алгоритм с минимальным функциональным показателем качества соответствует в этом пространстве некоторой точке  $O$ . Выделим вокруг этой точки сферическую область с радиусом, равным допустимому значению отклонения показателя качества от оптимальной величины. Тогда любая точка  $A$  внутри области будет соответствовать параметрам квазиоптимального алгоритма, удовлетворяющего условию не превышения допуска по отклонению показателя качества. Переход из точки  $O$  в точку  $A$  может быть выполнен различными путями. Каждый такой путь или их некоторая совокупность будет соответствовать определенному методу синтеза алгоритмов квазиоптимальной фильтрации. Поскольку точек допустимой области бесчисленное множество и путей перехода в них из точки оптимума также бесконечное число, то задача синтеза квазиоптимальных ЦФ в принципе является неоднозначной задачей и допускает самые различные методы её решения. Примерами этого могут служить приведенные в главе 9 неоптимизационные методы проектирования частотных фильтров, метод Бобикова-Коршунова синтеза полиномиальных ЦФ и метод минимального числа отсчетов Потапова для ЦДСФ малых порядков.

В данной книге предлагаются новые методы синтеза квазиоптимальных полиномиальных фильтров, использующие как временное, так и спектральное представление сигналов, и базирующие на следующих основных принципах.

1. Из всех путей перехода, обеспечиваемых данным методом, выбирается такой, который приводит к алгоритмам наименьшей вычислительной сложности.

Выполнение этого принципа практически оправдано, поскольку в противном случае решение задачи квазиоптимальной фильтрации будет иметь только чисто теоретическое значение.

2. Из всех путей перехода, обеспечиваемых данным методом, выбирается такой, который позволяет получить минимальное значение отклонения показателя качества.

Выполнение этого принципа в совокупности с первым позволяет строить эффективные квазиоптимальные алгоритмы для различных (больших и малых) допустимых областей.

3. В частном случае при предельных значениях управляемых параметров алгоритмов квазиоптимальный метод синтеза приводит к оптимальным решениям.

Выполнение этого принципа гарантирует сходимость используемого метода и позволяет при синтезе квазиоптимальных ЦФ выбирать за основу оптимальные ЦФ с последующим упрощением их структуры.

Рассмотрим метод синтеза квазиоптимальных полиномиальных ЦФ, удовлетворяющий всем ранее сформулированным принципам и основанный на кусочно-постоянном представлении ИХ ЦФ. Суть метода состоит в следующем. Вся накопленная к  $j$ -му текущему моменту времени выборка входного сигнала  $x(j-i)$  из  $N$  отсчетов разбивается на  $n$  соприкасающихся секций так, чтобы в каждую  $m$ -ю секцию входили отсчеты с номерами  $i = (N/n)m + \lambda$ ,  $m = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\lambda = 0, 1, \dots, (N/n)-1$ . Процедура разбиения на секции в этом случае совпадает с той, что использовалась при вычислении дискретных сверток методом перекрытия с суммированием (см. §2.3).

После этого путем усреднения отсчетов в пределах каждой секции получается новая выборка  $\{z(j-m)\}$ , в которой

$$z(j-m) = \frac{n}{N} \sum_{\lambda=0}^{N/n-1} x(j - \frac{N}{n}m - \lambda). \quad (9.38)$$

Эта выборка подвергается оптимальной фильтрации с целью получения оценки параметра  $\bar{p}_k(j)$  входного сигнала, алгоритм которой записывается в виде следующего разностного уравнения:

$$\bar{p}_k(j) = \sum_{m=0}^{n-1} z(j-m)h_k^r(m). \quad (9.39)$$

Уменьшение числа значений ИХ в  $N/n$  раз в алгоритме (9.39) позволяет во столько же раз уменьшить число умножений при его реализации по сравнению с общим оптимальным алгоритмом (9.3).

Дисперсия оценки (9.39) зависит от  $n$  и равна

$$\sigma_k^2(n) = \frac{n^2}{N^2} \sum_{m_1=0}^{n-1} \sum_{m_2=0}^{n-1} h_k^r(m_1)h_k^r(m_2) \sum_{\lambda_1=0}^{N/n-1} \sum_{\lambda_2=0}^{N/n-1} R_n(\frac{N}{n}m_1 + \lambda_1, \frac{N}{n}m_2 + \lambda_2). \quad (9.40)$$

Данная формула следует из общей формулы (9.9), если в ней учесть, что  $i_1 = (N/n)m_1 + \lambda_1$ , а  $i_2 = (N/n)m_2 + \lambda_2$ . Рассматриваемый метод позволяет получать разнообразные алгоритмы, зависящие от  $n$  и различающиеся по дисперсии. В соответствии со вторым принципом разработки квазиоптимальных алгоритмов выберем из них алгоритмы с минимальной дисперсией оценки. Соответствующую им ИХ можно найти, минимизируя выражение для дисперсии (9.40) при выполнении условия несмещенности оценки, которое по аналогии с (9.7) в данном случае представляется следующей системой равенств:

$$\sum_{m=0}^{n-1} h_k^r(m) \sum_{\lambda=0}^{\frac{N}{n}-1} g_\alpha \left( \frac{N}{n} m + \lambda \right) = \mu_k \delta_{\alpha,k}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, r. \quad (9.41)$$

Минимизацию (9.40) при ограничениях (9.41) также можно выполнить методом неопределенных множителей Лагранжа, в результате чего приходим к решению, по форме записи совпадающему с оптимальным решением (9.12) и отличающемся только значениями элементов матриц  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{G}$ .

Из выражения (9.40) следует, что элементы матрицы  $\mathbf{R}$  в квазиоптимальном решении образуются из сумм элементов матрицы корреляционной функции помехи. Поэтому матрица  $\mathbf{R}$  в квазиоптимальном решении может иметь ненулевой определитель даже при плохой обусловленности матрицы корреляционной функции. Это говорит о том, что общее квазиоптимальное решение обладает регуляризующим свойством и является корректным по Тихонову.

Дисперсия квазиоптимальной оценки  $k$ -го параметра по форме записи совпадает с дисперсией (9.13) оптимальной оценки и зависит от вида матрицы  $\mathbf{R}$  и величины  $n$ :

$$\sigma_k^2(n) = \mathbf{H}^T \mathbf{R} \mathbf{H}.$$

Для некоррелированной помехи с дисперсией  $\sigma_n^2$  матрица

$$\mathbf{R} = \frac{n\sigma_n^2}{N} \mathbf{E}$$

и дисперсия квазиоптимальной оценки принимает следующий вид:

$$\sigma_k^2(n) = \frac{\sigma_n^2 n}{N} \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \frac{\sigma_n^2 n}{N} \sum_{m=0}^{n-1} [h_k^r(m)]^2. \quad (9.42)$$

Коэффициент сглаживания при этом будет равен

$$\rho_{k_{\text{сг}}}^r(n) = \frac{n}{N} \sum_{m=0}^{n-1} [h_k^r(m)]^2, \quad (9.43)$$

а ИХ  $h_k^r(m)$  можно определить по матричному уравнению (9.15) с соответствующими значениями элементов матрицы  $\mathbf{G}$ .

Для ЦДСФ

$$g_k \left( \frac{N}{n} m + \lambda \right) = \left( \frac{N}{m} + \lambda \right)^k$$

и элементы матрицы  $\mathbf{G}$  равны

$$g_{k,m} = \sum_{\lambda=0}^{\frac{N}{n}-1} \left( \frac{N}{n} m + \lambda \right)^k.$$

Для случая некоррелированной помехи алгоритм квазиоптимального ЦДСФ можно получить путем сведения задачи синтеза ЦФ к задаче аппроксимации во временной области с использованием для её решения метода наименьших квадратов. Аппроксимировать в этом случае необходимо сигнал  $z(j-m)$  полиномом степени  $r$

$$\Phi(m, \{\bar{p}_k(j)\}) = \sum_{k=0}^r (-i)^k \bar{p}_k(j) m^k \left(\frac{N}{n}\right)^k. \quad (9.44)$$

Наличие множителя  $(N/n)^k$  в формуле (9.44) связано с тем, что в усредненном сигнале  $z(j-m)$  и в аппроксимирующем полиноме (9.44) отсчеты располагаются с шагом

$$\Delta T = N\Delta t / n. \quad (9.45)$$

Критерий аппроксимации по методу наименьших квадратов в этом случае принимает следующий вид записи:

$$\sum_{m=0}^{n-1} [z(j-m) - \sum_{k=0}^r (-1)^k \bar{p}_k(j) m^k (N/n)^k]^2 = \min \quad (9.46)$$

и приводит к системе алгебраических уравнений относительно оценок  $\bar{p}_k(j)$

$$\sum_{\lambda=0}^r (-1)^\lambda \left(\frac{N}{n}\right)^\lambda \bar{p}_\lambda(j) \sum_{m=0}^{n-1} m^{\lambda+k} = \sum_{m=0}^{n-1} z(j-m) m^k, \quad k = 0, 1, \dots, r, \quad (9.47)$$

структура которой подобна структуре аналогичной системы (9.22) в оптимальных ЦДСФ и отличается только тем, что вместо числа отсчетов  $N$  используется число секций  $n$ , а также наличием множителей  $(N/n)^\lambda$ . Это позволяет при синтезе квазиоптимальных ЦДСФ использовать ИХ оптимальных ЦДСФ, если в последних заменить  $N$  на  $n$  и учесть множители вида  $N/n$ . Действительно, если для ИХ  $k$ -го параметра квазиоптимального ЦДСФ  $k$ -го порядка сохранить обозначение в виде  $h_k^k(m)$ , а ИХ того же параметра оптимального ЦДСФ  $k$ -го порядка обозначить как  $h_k^k(i, N)$ , то можно показать, что между этими характеристиками существует следующая простая связь:

$$h_k^k(m) = (n/N)^k h_k^k(m, n). \quad (9.48)$$

Используя способ Гаусса, из системы уравнений (9.47) можно получить алгоритм квазиоптимального ЦДСФ в компенсационной форме записи

$$\bar{p}_k(j) = \sum_{m=0}^{n-1} z(j-m) h_k^k(m) + \sum_{\alpha=k+1}^r \bar{p}_\alpha(j) d_{\kappa\alpha}(n, k, \alpha), \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (9.49)$$

аналогичной форме записи (9.27) оптимального ЦДСФ. При этом квазиоптимальные компенсационные коэффициенты  $d_{\kappa\alpha}(n, k, \alpha)$  можно выразить через оптимальные  $d(N, k, \alpha)$ , если учесть, что

$$d_{\kappa\alpha}(n, k, \alpha) = (N/n)^k d(n, k, \alpha). \quad (9.50)$$

Это равенство является следствием различия интервалов дискретизации в сигналах  $x(j-i)$  и  $z(j-m)$  (в сигнале  $x(j-i)$  он равен  $\Delta t$ , а в сигнале  $z(j-m)$  —  $\Delta T$  (9.45)). Следует, однако, отметить, что получаемая в этом случае оценка  $\bar{p}_k(j)$  будет несмещенной по отношению к сигналу  $z(j-m)$ , но смещенной по отношению к сигналу  $x(j-i)$ , поскольку при осреднении отсчетов  $x(j-i)$  в (9.38) переменные во времени параметры изменяются. Для исключения этого смещения необходимо ввести дополнительную компенсацию по параметрам

более высокого порядка. Дополнительные компенсационные коэффициенты при этом будут равны

$$d_{\text{дон}}(N/n, k, \alpha) = (-1)^{k+1} C_{\alpha}^k \frac{n}{N} \sum_{i=0}^{\frac{n}{N}-1} i^{\alpha-k}, \quad (9.51)$$

где  $C_{\alpha}^k$  – биномиальные коэффициенты. Объединение двух компенсаций приводит к суммарной компенсации, совпадающей с компенсацией в оптимальных ЦДСФ, т.е.

$$d_{\text{кв}}(n, k, \alpha) + d_{\text{дон}}(N/n, k, \alpha) = d(N, k, \alpha). \quad (9.52)$$

Это позволяет алгоритм (9.49) переписать в следующем виде

$$\bar{p}_k(i) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n}{N} \sum_{\lambda=0}^{\frac{N}{n}-1} x(j - \frac{N}{n}m - \lambda) h_k^k(m) + \sum_{\alpha=k+1}^r \bar{p}_{\alpha}(j) d(N, k, \alpha), \quad k = 0, 1, \dots, r-1.$$

С вычислительной точки зрения множитель  $n/N$  в этом выражении целесообразно объединить с ИХ  $h_k^k(m)$ , получив при этом полную импульсную характеристику  $k$ -го квазиоптимального ЦДСФ

$$h_{k_{\text{кв}}}^k(m) = \frac{n}{N} h_k^k(m) = \left(\frac{n}{N}\right)^{k+1} h_k^k(m, n) \quad (9.53)$$

(здесь учтено соотношение (9.48)) и окончательную запись алгоритма функционирования квазиоптимального ЦДСФ  $r$ -го порядка:

$$\bar{p}_k(i) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{\frac{N}{n}-1} x(j - \frac{N}{n}m - \lambda) h_{k_{\text{кв}}}^k(m) + \sum_{\alpha=k+1}^r \bar{p}_{\alpha}(j) d(N, k, \alpha), \quad k = 0, 1, \dots, r-1. \quad (9.54)$$

Из результатов расчета квазиоптимальных ЦДСФ различных порядков следует, что с увеличением величины порядка ЦДСФ возрастает и число допустимых секций в квазиоптимальных алгоритмах. Возрастает, естественно, и число умножений, необходимых для их реализации. Поэтому высокой вычислительной эффективностью алгоритмы обладают только для ЦДСФ малых порядков. Это, однако, не снижает их практическую значимость, поскольку на практике преимущественное применение находят именно ЦДСФ малых порядков.

Область применения рассмотренного квазиоптимального метода не ограничивается только полиномиальными фильтрами. Его можно использовать и при проектировании других видов ЦФ, в том числе и частотных. В связи с этим следует обратить внимание на следующее. Если будет использовано разностное уравнение частотного НЦФ в виде

$$y(j) = \sum_{m=0}^{n-1} \left[ \frac{n}{N} \sum_{\lambda=0}^{\frac{N}{n}-1} x(j - \frac{N}{n}m - \lambda) \right] h(m, n), \quad (9.55)$$

где  $h(m, n)$  – импульсная характеристика частотного фильтра порядка  $n$  для осредненных отсчетов  $z(j-m)$  (9.38) входного сигнала, отстоящих друг от друга с шагом  $\Delta T$  (9.45), то передаточная функция ЦФ  $H(z, N)$ , соответствующая уравнению (9.55), представляется в виде произведения двух передаточных функций

$$H(z, N) = H_o(z, N/n)H(z, n), \quad (9.56)$$

первая из которых

$$H_o(z, N/n) = \frac{n}{N} \sum_{\lambda=0}^{N/n-1} z^{-\lambda} \quad (9.57)$$

соответствует *однородному* НЦФ, выполняющему операцию усреднения отсчетов, а вторая

$$H(z, n) = \sum_{m=0}^{n-1} h(m, n) z^{-m} \quad (9.58)$$

является передаточной функцией частотного НЦФ  $n$ -го порядка. В соответствии с этим и частотная комплексная характеристика фильтра (9.55)

$$H(v\omega, N) = H_o(v\omega, N/n)H(v\omega, n),$$

где  $v = \sqrt{-1}$ . Из последней формулы нетрудно получить зависимости для АЧХ и ФЧХ квазиоптимального НЦФ (9.55):

$$A(\omega, N) = A_o(\omega, N/n)A(\omega, n), \quad (9.59)$$

$$\varphi(\omega, N) = \varphi_o(\omega, N/n) + \varphi(\omega, n), \quad (9.60)$$

где

$$A_o(\omega, N/n) = \frac{n |\sin(\omega N \Delta t / (2n))|}{N |\sin(\omega \Delta t / 2)|}, \quad (9.61)$$

$$\varphi_o(\omega, N/n) = -\left(\frac{N}{n} - 1\right) \frac{\Delta t}{2} \omega. \quad (9.62)$$

Из этих зависимостей следует, что обработка отсчетов сигнала во временной области по разностному уравнению (9.55) приводит в частотной области к умножению АЧХ фильтра  $n$ -го порядка на функцию  $A_o(\omega, N/n)$  и суммированию его ФЧХ с функцией  $\varphi_o(\omega, N/n)$ . При этом АЧХ  $A(\omega, n)$  фильтра с интервалом между отсчетами, равном  $\Delta T$ , является периодической функцией с периодом  $2\pi / \Delta T = 2\pi n / (N \Delta t)$ , а АЧХ  $A(\omega, N)$  фильтра с интервалом между отсчетами в  $\Delta t$ , периодична с периодом  $2\pi / \Delta t$ . Поэтому на одном периоде характеристики  $A(\omega, N)$  АЧХ  $A(\omega, n)$  периодически повторяется  $N/n$  раз, т.е. по сравнению с  $A(\omega, N)$  представляется сжатой в  $N/n$  раз.

АЧХ  $A(\omega, N)$  и ФЧХ  $\varphi(\omega, N)$  должны с определенной точностью воспроизводить желаемые характеристики фильтра. Поскольку вид функции  $A_o(\omega, N/n)$  и  $\varphi_o(\omega, N/n)$  известен, то точность аппроксимации будет зависеть от порядка фильтра  $N$ , числа секций  $n$  и вида импульсной характеристики  $h(m, n)$ . При зафиксированных  $N$  и  $n$  точность будет определяться только  $h(m, n)$  и будет максимальной, если  $h(m, n)$  выбрана оптимальной по принятому критерию

оптимизации. В этом случае процедура квазиоптимальной фильтрации будет представлять из себя две последовательно выполняемые процедуры: однородную фильтрацию и оптимальную фильтрацию меньшего порядка.

Функции  $A_o(\omega, N/n)$  и  $\varphi_o(\omega, N/n)$  во многом определяют возможности применения данного метода квазиоптимальной фильтрации для различных типов частотных фильтров, поэтому рассмотрим их подробнее. АЧХ  $A_o(\omega, N/n)$  (9.61) однородного фильтра порядка  $N/n$  является периодической колебательно-затухающей функцией с периодом  $2\pi/\Delta t$ . Она имеет нули

$$\omega_k = 2\pi nk / N\Delta t, \quad k = 0, 1, \dots$$

и полюса

$$\omega_i = 2\pi i / \Delta t, \quad i = 0, 1, \dots$$

На одном периоде возможно  $N/n$  нулей и только один полюс, причем значения полюса и нуля совпадают и в этой точке АЧХ  $A_o(\omega, N/n)$  равна 1.

ФЧХ однородного фильтра  $\varphi_o(\omega, N/n)$  (9.68) является линейной функцией частоты, угловой коэффициент которой зависит от  $n$ . При  $N=n$   $\varphi_o(\omega, N/n)=0$ , а  $A_o(\omega, N/n)=1$  и квазиоптимальный фильтр становится оптимальным.

Посмотрим, как вид и свойства характеристик однородного фильтра могут повлиять на область применения квазиоптимальной фильтрации в частотных фильтрах. Рассмотрим сначала ФЧХ квазиоптимального НЦФ. В соответствии с (9.60) она аддитивно изменяется по сравнению с ФЧХ оптимального фильтра, что в общем случае может привести к изменению её формы. Однако для практически важных НЦФ с линейными ФЧХ фазовые характеристики остаются неизменными. Для подтверждения этого рассмотрим НЦФ 1-го вида (с нечетным  $N$  и симметричным ИХ). В этом случае (см. (9.2)) для оптимального НЦФ  $\varphi_{on}(\omega, N) = -(N-1)\omega\Delta t/2$ , а для квазиоптимального  $\varphi_{кв}(\omega, N) = -(n-1)\omega\Delta T/2 - (N/n-1)\omega\Delta t/2$ . Но учитывая, что  $\Delta T = N\Delta t/n$  окончательно получаем  $\varphi_{кв}(\omega, N) = -(N-1)\omega\Delta t/2$ . Аналогичные результаты получаем и для остальных видов НЦФ.

Относительно АЧХ ситуация несколько другая. Так как на интервале  $\pi/\Delta t$   $A_o(\omega, N/n)$  имеет  $N/n$  нулей, то в силу (9.59) столько же нулей будет иметь и АЧХ квазиоптимального фильтра вне зависимости от вида АЧХ оптимального фильтра  $A(\omega, n)$ . В соответствии с этим метод может быть использован только для тех частотных фильтров, нули АЧХ которых совпадают с нулями функции  $A_o(\omega, N/n)$ . Из рассмотренных ранее в §8.7 типов частотных фильтров метод применим только к ФНЧ и ПФ, причем полоса пропускания ФНЧ должна лежать до точки первого нуля функции  $A_o(\omega, N/n)$ , а полоса пропускания ПФ – в промежутке между двумя соседними нулями  $A_o(\omega, N/n)$ . Для ФВЧ квазиоптимальный метод принципиально не применим, т.к. в точке  $\omega = \pi/\Delta t$ , где АЧХ фильтра должна равняться 1, функция  $A_o(\omega, N/n)$  всегда меньше единицы, а при  $N/n$  четном вообще равна 0.

Точность аппроксимации частотных характеристик и вычислительная эффективность рассмотренного метода зависит от числа секций  $n$ . Рассмотрим методику выбора  $n$  на примере ФНЧ с линейными ФЧХ. Нижнюю границу величины  $n$  можно выбрать из ранее сформулированного требования непопадания первого нуля функции  $A_0(\omega, N/n)$  в полосу пропускания ФНЧ:

$$n > N\omega_{\text{гп}}\Delta t / 2\pi. \quad (9.63)$$

Однако выполнение этого условия не гарантирует точного воспроизведения АЧХ даже при идеальном оптимальном фильтре. Вследствии «сжатия» АЧХ  $A(\omega, n)$  оптимального фильтра и особой формы функции  $A_0(\omega, N/n)$  возникают искажения в результирующей АЧХ  $A(\omega, n)$ , особенно большие вблизи граничной частоты пропускания  $\omega_{\text{гп}}$  фильтра. Для уменьшения методических погрешностей аппроксимации АЧХ в полосе пропускания можно предложить следующий способ коррекции. Будем определять ИХ оптимального ФНЧ по сжимаемой АЧХ не с параметрами  $\omega_{\text{гп}}$  и  $\omega_{\text{гз}}$ , а по той же АЧХ, но с параметрами  $\omega_{\text{гп}}^* = N\omega_{\text{гп}}/n$  и  $\omega_{\text{гз}}$ , искусственно растянув полосу пропускания, и потребуем, чтобы максимальная методическая погрешность воспроизведения АЧХ

$$\max_{0 \leq \omega \leq \omega_{\text{гп}}} |B(\omega, N) - A(\omega, N)|$$

не превышала заданной допустимой величины  $\Delta_{\text{дон}}$  (здесь  $B(\omega, N)$  – аппроксимируемая АЧХ). Если при этом учесть, что максимальной погрешность будет при  $\omega = \omega_{\text{гп}}$  и  $B(\omega_{\text{гп}}, N) = 1$ , а  $A(\omega_{\text{гп}}, N) = A_0(\omega_{\text{гп}}, N/n)$ , то можно получить зависимость для определения  $n$ :

$$\sin\left(\frac{N}{n}\omega_{\text{гп}}\Delta t\right) > (1 - \Delta_{\text{дон}}) \frac{N}{n} \cdot \sin\left(\frac{\omega_{\text{гп}}\Delta t}{2}\right). \quad (9.64)$$

Максимальная методическая погрешность в полосе задержания может быть найдена по выражению

$$\max_{\omega_{\text{гз}} \leq \omega \leq \pi/\Delta t} \left\{ A(\omega, n) \frac{n}{N} \left| \frac{\sin(\omega \frac{N}{n} \Delta t)}{\sin(\frac{\omega \Delta t}{2})} \right| \right\}. \quad (9.65)$$

При выходе её величины за допустимые пределы следует увеличить значение  $n$ .

Определение  $n$  по зависимости (9.64) и (9.65) целесообразно выполнять численным путем для конкретных значений параметров фильтра и  $\Delta_{\text{дон}}$ . Расчеты показали, что при допустимой методической погрешности в полосе пропускания в пределах 10-15% число секций для различных ФНЧ может достигать величины  $N/5 \div N/10$ , что позволяет в 5-10 раз уменьшить число умножений при реализации ФНЧ.



Наличие методической погрешности и необходимость коррекции АЧХ накладывает дополнительные ограничения на  $n$ . Так как  $\omega_{\text{гп}}^*$  не может быть больше  $\omega_{\text{гз}}$ , то

$$n > N\omega_{\text{гп}} / \omega_{\text{гз}}$$

и, следовательно, данный метод фильтрации может быть эффективно использован только для узкополосных ФНЧ.

**ТЕМА №10.** Спектральные методы синтеза цифровых фильтров. Основы спектральной теории цифровых фильтров. Синтез цифровых фильтров в спектральной области.

Для исследования линейных динамических систем, к классу которых относятся и ЦФ, используются различные методы, в том числе и спектральные. Однако, как правило, применение последних ограничивалось только задачами анализа динамических систем. В данной книге, как и в работе, спектральный подход ориентирован в первую очередь на решение задач синтеза ЦФ, включая и их структурную реализацию.

Переход в спектральную область не может изменить функциональные свойства ЦФ, однако влияет на реализационные характеристики фильтров, зависящие от используемых систем базисных функций. Выбирая СБФ рациональным образом, можно разработать быстрые алгоритмы цифровой фильтрации, представляющие интерес как для теории, так и для практики цифровой обработки сигналов.

Спектральная теория ЦФ по аналогии с теорией ЦФ во временной области должна содержать способы описания фильтров в спектральной области, а также постановку и решение задач их аналитического синтеза. Кроме того, она должна включать еще одну отличительную, но важную составляющую – задачу выбора рационального базиса с учетом реализационных требований к алгоритмам ЦФ.

Для получения спектрального описания ЦФ обратимся к разностному уравнению (8.1) рекурсивного фильтра. Заменим в нем для удобства индекс текущего времени  $i$  на  $j$  и представим скользящую выборку  $x(j-i)$  в виде ортогонального ряда в базисе  $\{\varphi(k,i)\}$

$$x(j-i) = \sum_{k=0}^{N-1} X_j(k) \varphi(k,i) \quad (10.1)$$

со скользящим спектром

$$X_j(k) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) \varphi(k,i) \quad (10.2)$$

(здесь, как и ранее,  $P_k$  является мощностью базисной функции  $\varphi(k,i)$ ). Тогда получим

$$\begin{aligned} y(i) &= \sum_{i=0}^{N-1} b_i \sum_{k=0}^{N-1} X_j(k) \varphi(k,i) - \sum_{m=1}^{L-1} a_m y(j-m) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_j(k) \sum_{i=0}^{N-1} b_i \varphi(k,i) - \sum_{m=1}^{L-1} a_m y(j-m). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Но вторая сумма в первой части последнего выражения с точностью до постоянного множителя  $1/(NP_k)$  совпадает со спектром  $B(k)$  дискретной функции, образованной из весовых коэффициентов  $b_i$  фильтра:

$$B(k) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} b_i \varphi(k, i).$$

Назвав ее *спектральной весовой функцией* и представив в виде

$$b(k) = NP_k B(k),$$

из соотношения (10.3) получим разностное уравнение рекурсивного ЦФ в спектральной области

$$y(i) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) X_j(k) - \sum_{m=1}^{L-1} a_m Y(j-m). \quad (10.4)$$

Из него следует соответствующее уравнение нерекурсивного ЦФ

$$y(i) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) X_j(k) = \sum_{k=0}^{N-1} X_j(k) H(k), \quad (10.5)$$

где учтено, что в НЦФ  $b_i = h(i)$  и поэтому

$$b(k) = H(k) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \varphi(k, i). \quad (10.6)$$

Дискретную функцию  $H(k)$ , связанную со спектром ИХ  $h(i)$  ЦФ, можно рассматривать в качестве *спектральной импульсной характеристики* (СИХ) НЦФ.

Формула (10.2) и уравнения (10.4) и (10.5) определяют алгоритмы РЦФ и НЦФ в спектральной области. Из них следует, что структурно РЦФ в спектральной области в общем случае состоят из анализатора спектра (АС), осуществляющего переход из временной области представления входного сигнала в спектральную область по формуле (10.2), спектрального фильтра (СФ), выполняющего взвешенную обработку скользящего спектра входного сигнала, и блока рекурсии (БР), обеспечивающего взвешенный вклад предыдущих значений выходного сигнала в его текущее значение. В структуре спектрального НЦФ БР отсутствует и фильтр будет состоять только из АС и СФ, работа которых описывается выражениями (10.2) и (10.5) соответственно. На рис. 10.1 приведена структурная схема обобщенного НЦФ в спектральной области, где АС реализован на основе генератора базисных функций (ГБФ),  $N$  умножителей и  $N$  сумматоров накапливающего типа, а СФ – с помощью генератора спектральной импульсной характеристики (ГСИХ),  $N$  умножителей и одного  $N$ -входного сумматора. На практике функции ГСИХ может выполнить запоминающее устройство, хранящее отсчеты СИХ  $H(k)$ .

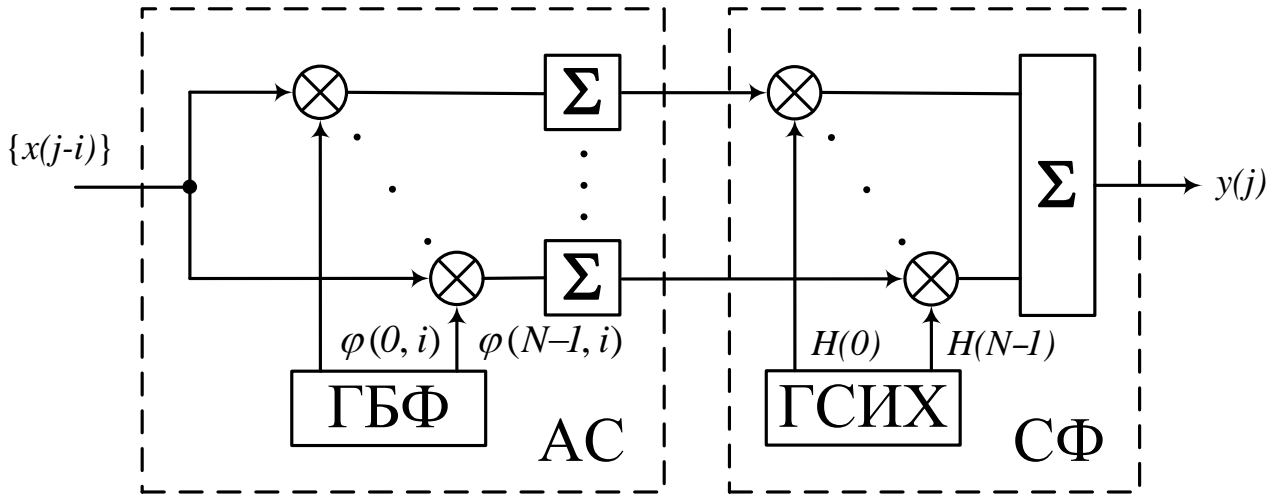


Рис. 11.1 Структурная схема обобщенного НЦФ в спектральной области

В случае необходимости для спектральных ЦФ также можно записать передаточную функцию и частотные характеристики, выразив их через спектральные характеристики фильтра. Так передаточную функцию РЦФ можно получить, применив z-преобразование к разностному уравнению (10.3). В этом случае

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)Z\{X_j(k)\} - \sum_{m=1}^{L-1} a_m Y(z)z^{-m}$$

и

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)Z\{X_j(k)\} / (1 + \sum_{m=1}^{L-1} a_m z^{-m}). \quad (10.7)$$

Здесь z-преобразование выходного сигнала ЦФ выражается через z-преобразование спектра входного сигнала. Последнее можно найти из выражения (10.2), воспользовавшись теоремой о свертке для z-преобразований:

$$Z\{X_j(k)\} = X(z)Z\{\varphi(k, i)\} / (NP_k) = X(z)\Phi_k(z), \quad (10.8)$$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(k, i) z^{-i}. \quad (10.9)$$

Подставляя выражение (10.8) в уравнение (10.7), получим

$$Y(z) = \frac{X(z) \sum_{k=0}^{N-1} b(k) \Phi_k(z)}{1 + \sum_{m=1}^{L-1} a_m z^{-m}}$$

и окончательно

$$H_p(z) = Y(z) / X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k) \Phi_k(z) / \sum_{m=0}^{L-1} a_m z^{-m}, \quad (10.10)$$

где  $a_0 = 1$ . Передаточную функцию НЦФ легко можно найти из передаточной функции РЦФ, если в последней принять знаменатель тождественно равным 1:

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi_k(z). \quad (10.11)$$

Частотные характеристики спектральных ЦФ получаются из их передаточных функций обычной подстановкой  $z = \exp(\gamma \omega \Delta t)$ ,  $\gamma = \sqrt{-1}$  и будут иметь следующий вид:

$$A_p(\omega) = \sqrt{\frac{[\sum_{k=0}^{N-1} b(k) \Phi_k^u(\omega)]^2 + [\sum_{k=0}^{N-1} b(k) \Phi_k^H(\omega)]^2}{[\sum_{m=0}^{L-1} a_m \cos \omega \Delta t m]^2 + [\sum_{m=0}^{L-1} a_m \sin \omega \Delta t m]^2}}, \quad (10.12)$$

$$\varphi_p(\omega) = \arctg \frac{[\sum_{k=0}^{N-1} b(k) \Phi_k^u(\omega)] [\sum_{m=0}^{L-1} a_m \sin \omega \Delta t m] - [\sum_{k=0}^{N-1} b(k) \Phi_k^H(\omega)] [\sum_{m=0}^{L-1} a_m \cos \omega \Delta t m]}{[\sum_{k=0}^{N-1} b(k) \Phi_k^u(\omega)] [\sum_{m=0}^{L-1} a_m \cos \omega \Delta t m] + [\sum_{k=0}^{N-1} b(k) \Phi_k^H(\omega)] [\sum_{m=0}^{L-1} a_m \sin \omega \Delta t m]}, \quad (10.13)$$

$$A_H(\omega) = \sqrt{[\sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi_k^u(\omega)]^2 + [\sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi_k^H(\omega)]^2}, \quad (10.14)$$

$$\varphi_H(\omega) = -\arctg \frac{\sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi_k^H(\omega)}{\sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi_k^u(\omega)}, \quad (10.15)$$

где

$$\Phi_k^u(\omega) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} \cos(\omega \Delta t i) \varphi(k, i), \quad (10.16)$$

$$\Phi_k^H(\omega) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} \sin(\omega \Delta t i) \varphi(k, i). \quad (10.17)$$

Передаточная функция и частотные характеристики также содержат полную информацию о ЦФ и могут быть использованы как для анализа, так и синтеза ЦФ в спектральной области. Частотные характеристики можно записать и в функции нормированной частоты  $w$ , если положить в них  $\omega = 2\pi w / \Delta t$ .

Полученные зависимости алгоритмов, передаточной функции и частотных характеристик ЦФ в спектральной области являются инвариантными относительно системы базисных функций и справедливы для любых действительных и комплексных ортогональных СБФ. Они носят обобщенный характер и из них в частном случае при использовании системы единичных функций  $\{\delta(k-i)\}$  могут быть получены известные результаты во временной области, приведенные в главе 8.

В соответствии с общей структурой ЦФ в спектральной области их реализационные характеристики в преобладающей степени зависят от сложности анализатора спектра и спектрального фильтра, а та в свою очередь во многом определяется используемой СБФ. Поэтому вычислительная сложность ЦФ в спектральной области не является инвариантной относительно СБФ. Ставя задачу получения более простых в реализации ЦФ (и особенно НЦФ), можно сформулировать конкретные требования к СБФ, рекомендуемые для применения в цифровой фильтрации сигналов. Основными из них являются: 1) простота базисных функций, позволяющая исключить из анализа спектра трудоемкие операции умножения; 2) наличие быстрых алгоритмов анализа скользящего спектра, что сокращает число вычислительных операций в АС; 3) адекватность СБФ классу ИХ фильтра, проявляющаяся в соответствии свойств СБФ и ИХ, что может привести к спектральным характеристикам ЦФ  $b(k)$  и  $H(k)$  с большим числом нулевых значений. Это в свою очередь позволяет дополнительно сократить число операций, как при анализе спектра, так и при реализации спектрального фильтра по уравнениям (10.4) и (10.5).

Сущность задачи аналитического синтеза ЦФ в спектральной области состоит в определении коэффициентов  $b(k)$  и  $a_m$  в рекурсивных фильтрах и значений СИХ  $H(k)$  для нерекурсивных ЦФ. Возможны два подхода к ее решению. Первый подход основывается на использовании формул связи спектральных характеристик ЦФ в спектральной области с параметрами  $b_i$  и  $h(i)$  ЦФ во временной области и предполагает решение задачи аналитического синтеза ЦФ существующими методами во временной области с последующим переходом в спектральную область. Этот подход удобен применительно к ЦФ с известными алгоритмами функционирования во временной области.

Второй подход основывается на прямой постановке и решении задачи аналитического синтеза в спектральной области. Его применение целесообразно для вновь разрабатываемых ЦФ. Он является более общим. Кроме того, при его использовании за счет учета особенностей конкретных базисных систем возможно получение новых результатов, не достижимых известными методами во временной области.

Сама постановка задачи синтеза ЦФ в спектральной области и методы ее решения зависят от класса и типа ЦФ. В данной книге это задача рассматривается только применительно к нерекурсивным частотным и полиномиальным фильтрам. Ограничение только классом НЦФ объясняется их традиционной вычислительной сложностью и возможностью ее уменьшения за счет перехода в спектральную область.

Задача синтеза частотных НЦФ в спектральной области так же, как во временной области, является аппроксимационной задачей и ее постановка требует определения аппроксимируемой  $B(\omega)$  и аппроксимирующей  $\Phi(\omega, \{H(k)\})$  функций и выбора критерия приближения (см. главу 9). При этом аппроксимируемая функция зависит от вида желаемых частотных характеристик и имеет точно такой же вид, как и во временной области.

Аппроксимирующая функция должна приближаться к аппроксимируемой и относительно просто зависеть от СИХ  $H(k)$ . Чтобы выбрать удобную для решения задачи аппроксимации функцию  $\Phi(\omega, \{H(k)\})$ , рассмотрим частотные характеристики НЦФ с точно линейной ФЧХ. Учет четности или нечетности  $N$ , а также свойств симметрии или асимметрии ИХ возможных видов частотных НЦФ относительно середины их интервала определения в общих формулах (10.14), (10.16) и (10.17) приводит к следующим результатам:

1. Для НЦФ 1-го вида:

$$H_1(k) = h_1\left(\frac{N-1}{2}\right)\varphi(k, \frac{N-1}{2}) + \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} h_1\left(\frac{N-1}{2} - i\right) [\varphi(k, \frac{N-1}{2} - i) + \varphi(k, \frac{N-1}{2} + i)],$$

$$A_1(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} H_1(k) \Phi_{1,k}(\omega),$$

где

$$\Phi_{1,k}(\omega) = \frac{1}{NP_k} \varphi(k, \frac{N-1}{2}) + \frac{2}{NP_k} \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos(i\omega\Delta t) [\varphi(k, \frac{N-1}{2} - i) + \varphi(k, \frac{N-1}{2} + i)].$$

2. Для НЦФ 2-го вида:

$$H_2(k) = \sum_{i=0}^{\frac{N-2}{2}} h_2\left(\frac{N-2}{2} - i\right) [\varphi(k, \frac{N-2}{2} - i) + \varphi(k, \frac{N-2}{2} + i)],$$

$$A_2(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} H_2(k) \Phi_{2,k}(\omega),$$

где

$$\Phi_{2,k}(\omega) = \frac{2}{NP_k} \sum_{i=0}^{\frac{N-2}{2}} \cos[(i+0,5)\omega\Delta t] [\varphi(k, \frac{N-2}{2} - i) + \varphi(k, \frac{N-2}{2} + i)].$$

3. Для НЦФ 3-го вида:

$$H_3(k) = \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} h_3\left(\frac{N-1}{2} - i\right) [\varphi(k, \frac{N-1}{2} - i) - \varphi(k, \frac{N-1}{2} + i)],$$

$$A_3(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} H_3(k) \Phi_{3,k}(\omega),$$

где

$$\Phi_{3,k}(\omega) = \frac{2}{NP_k} \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \sin(i\omega\Delta t) [\varphi(k, \frac{N-1}{2} - i) - \varphi(k, \frac{N-1}{2} + i)].$$

4. Для НЦФ 4-го вида:

$$H_4(k) = \sum_{i=0}^{\frac{N-2}{2}} h_4\left(\frac{N-2}{2} - i\right) [\varphi(k, \frac{N-2}{2} - i) - \varphi(k, \frac{N-2}{2} + i)],$$

$$A_4(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} H_4(k) \Phi_{4,k}(\omega),$$

где

$$\Phi_{4,k}(\omega) = \frac{2}{NP_k} \sum_{i=0}^{\frac{N-2}{2}} \sin[(i+0,5)\omega\Delta t] [\varphi(k, \frac{N-2}{2} - i) - \varphi(k, \frac{N-2}{2} + i)].$$

Фазочастотные характеристики приведенных НЦФ в спектральной области совпадают с ФЧХ соответствующих НЦФ во временной области.

Полученные зависимости для АЧХ удовлетворяют требованиям, предъявляемым к аппроксимирующей функции, и могут быть использованы в ее качестве как для фильтров с линейной ФЧХ, так и для минимально-фазовых фильтров. Для минимально-фазовых НЦФ, когда заданы  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  и вводятся две аппроксимируемые функции  $B_1(\omega)$  и  $B_2(\omega)$ , представляемые выражениями

$$B_1(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad B_2(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega),$$

аппроксимирующие функции могут быть приняты равными

$$\begin{aligned} \Phi_1(\omega, \{H(k)\}) &= \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi_k^u(\omega), \\ \Phi_2(\omega, \{H(k)\}) &= \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi_k^H(\omega), \end{aligned}$$

где по-прежнему

$$\begin{aligned} \Phi_k^u(\omega) &= \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} \cos(i\omega\Delta t) \varphi(k, i), \\ \Phi_k^H(\omega) &= \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} \sin(i\omega\Delta t) \varphi(k, i), \end{aligned}$$

а в случае, когда задана только АЧХ  $A(\omega)$ , аппроксимирующую функцию удобно принять такой же, как в избирательных фильтрах с линейной ФЧХ, потребовав при этом, чтобы нули передаточной функции находились внутри и на единичной окружности на  $z$ -плоскости.

Особенности прямого подхода к синтезу нерекурсивных частотных фильтров продемонстрируем на примере неоптимизационного метода синтеза с использованием разложения аппроксимируемой функции в тригонометрический ряд Фурье. В этом случае условие для нормированной частоты будет выполняться при следующем способе вычисления СИХ:

$$H(k) = \int_0^{0,5} B(w) \Phi_k(w) dw, \quad (10.18)$$

где функции  $\Phi_k(w)$  конкретных НЦФ, а аппроксимируемая функция  $B(w)$  строится на основе соответствующей желаемой АЧХ. Приведенный алгоритм (10.18) синтеза спектральных частотных НЦФ носит общий характер и справедлив для любой ортогональной базисной системы. Применение в нем,



например, системы единичных функций приводит к существующим результатам во временной области. Использование других базисов должно обуславливаться практической целесообразностью структур получаемых фильтров. Наличие в функциях  $\Phi_k(\omega)$ , входящих в формулу (10.18) для СИХ  $H(k)$ , сумм или разностей симметричных значений базисных функций позволяет сделать вывод в пользу базисных систем, состоящих из четных и нечетных относительно середины интервала определения базисных функций (например, составных систем), поскольку в этом случае половина значений  $H(k)$  будет равна нулю. Из множества возможных составных систем в этом случае следует выбирать такие, которые обладают быстрыми алгоритмами анализа скользящего спектра и функции которых имеют простые значения.

Из известных систем последнему условию удовлетворяют системы Уолша и Хаара, принимающие значения  $\pm 1$  и  $0$  и обладающие высокоэффективными БА скользящего анализа спектра, причем БПХ являются более быстрыми по сравнению с БПУ. Однако все системы Уолша состоят из четных и нечетных функций (а система Уолша-Хармута является еще и составной системой). Поэтому в базисах Уолша СИХ будут иметь только  $N/2$  ненулевых значений, а сигнальный граф скользящего БПУ будет носить прореженный характер. В результате реализация спектрального частотного НЦФ в базисе Уолша потребует затрат не более чем  $(2N-3)$  сложений и  $N/2$  умножений, причем реальное число сложений для конкретных значений  $N$  может быть и меньшим.

В базисе Хаара только две функции (нулевая и первая) обладают свойствами четности и нечетности и поэтому только одно значение СИХ будет равно нулю. Поэтому для частотных НЦФ в этом базисе в общем случае даже при использовании скользящего БПХ реализационные характеристики равны  $A = N + 2\log_2 N - 2$  и  $M = N - 1$  и НЦФ в базисе Хаара по количеству умножений уступают НЦФ в базисе Уолша, а по числу сложений – НЦФ в базисе единичных функций.

Следует отметить, что в системах Уолша и Хаара  $N$  является только четным числом (т.к. там  $N = 2^n$ ). Это вдвое сокращает число возможных видов НЦФ с линейными ФЧХ, которые могут быть использованы для построения избирательных частотных фильтров в спектральной области этих базисов. Общий алгоритм расчета СИХ (10.18) по методу разложения в тригонометрический ряд Фурье для конкретных фильтров может быть упрощен. Действительно, при подстановке в (10.18) конкретных функций  $\Phi_k(\omega)$  с последующим изменением порядка следования интегрирования по частоте и суммирования по  $i$  в формуле (10.18) появятся интегралы от произведения  $B(\omega)$  на тригонометрические функции косинуса либо синуса, которые при заданных  $B(\omega)$  могут быть вычислены аналитически.

Для случая некоррелированного шума можно предложить другой метод аналитического синтеза ЦДСФ, приводящий к аналитическому описанию алгоритм фильтрации любых порядков. Метод основывается на сведении

задачи аналитического синтеза ЦДСФ к задаче аппроксимации в спектральной области  $l_N^2$  функционального пространства ортогонального базиса и представляет собой по сути метод наименьших квадратов, записанный в спектральной области.

При использовании этого метода параметры  $\overline{p_m(j)}$  аппроксимирующей функции  $\Phi(i, \{\overline{p_m(j)}\})$  находятся в результате решения уравнения, представляющего собой математическую запись критерия минимума дисперсии погрешности оценки в спектральной области произвольного ортогонального базиса для некоррелированного входного шума:

$$\|x(j-i) - \Phi(i, \{\overline{p_m(j)}\})\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [X_j(k) - \Phi_j(k)]^2 P_k = \min. \quad (10.19)$$

При записи уравнения (10.19) использовано выражение (3.8) для метрики пространства  $l_N^2$ . В этом уравнении величины  $\Phi_j(k)$  являются спектром аппроксимирующей функции  $\Phi(i, \{\overline{p_m(j)}\})$  в произвольном ортогональном базисе с мощностью  $P_k$ . Его можно выразить через искомые параметры  $\overline{p_m(j)}$ :

$$\Phi_j(k) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi(i, \{\overline{p_m(j)}\}) \varphi(k, i) = \sum_{m=0}^r (-1)^m \overline{p_m(j)} b_k^m, \quad (10.20)$$

где, как и ранее,

$$b_k^m = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} i^m \varphi(k, i).$$

Тогда уравнение (10.19) можно привести к следующему виду

$$\sum_{k=0}^{N-1} [X_j(k) - \sum_{m=0}^r (-1)^m \overline{p_m(j)} b_k^m]^2 P_k = \min. \quad (10.21)$$

Решение уравнения (10.21) эквивалентно решению системы  $r+1$  алгебраических уравнений с  $r+1$  неизвестными

$$\sum_{m=0}^r (-1)^m \overline{p_m(j)} \sum_{k=0}^{N-1} b_k^m b_k^\alpha P_k = \sum_{k=0}^{N-1} X_j(k) b_k^\alpha P_k, \quad \alpha = 0, 1, \dots, r, \quad (10.22)$$

которая по структуре близка к аналогичной системе уравнений (10.22) во временной области, но носит более общий характер и справедлива для любого ортогонального базиса.

Применяя способ Крамера, из системы (10.22) можно получить решение, по форме записи совпадающем с решением (10.23) во временной области, но с другим представлением главного  $\Delta$  и частных  $\Delta_m$  определителей. Выражая частные определители через элементы столбца свободных членов, можно найти общее решение в спектральной области в прямой форме записи:

$$\overline{p_m(j)} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^m X_j(k) \sum_{\lambda=0}^r b_k^\lambda P_k \Delta_m(\lambda) / \Delta. \quad (10.23)$$

Это решение можно выразить и через СИХ, если принять

$$H_m^r(k) = \frac{(-1)^m}{\Delta} \sum_{\lambda=0}^r \Delta_m(\lambda) b_k^\lambda P_k. \quad (10.24)$$

В выражениях (10.23) и (10.24) величины  $\Delta_m(\lambda)$  означают алгебраические дополнения  $m$ -го определителя по элементам  $\lambda$ -го столбца системы уравнений (10.22).

Если для решения системы уравнений (10.22) использовать способ Гаусса, то можно получить ее решение в компенсационной форме записи:

$$\overline{p_m}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} X_j(k) H_m^r(k) + \sum_{\lambda=k+1}^r \overline{p_\lambda}(j) d(N, m, \lambda), \quad m = 0, 1, \dots, r-1. \quad (10.25)$$

Компенсационные коэффициенты  $d(N, m, \lambda)$  решения в спектральной области не зависят от базиса и должны совпадать с компенсационными коэффициентами в временной области. При использовании системы единичных функций решение (10.25) переходит в решение (10.27) во временной области. Коэффициенты сглаживания определяются так же, как и в предыдущих параграфах.

Решения (10.23) и (10.25) совпадают с решениями, полученными ранее в §10.4. Если спектры степенных функций конкретных базисных систем содержат нулевые значения, то систему уравнений (10.22) можно упростить, а следовательно, упростить и саму процедуру ее решения. Из приведенных ранее систем базисных функций таким свойством обладают спектры степенных функций в базисах Хаара, Уолша и в полиномиальных базисах.

Для систем Хаара  $b_0^0 = 1$ , а все  $b_k^0 = b_{2^\gamma+m}^0 = 0$ , поэтому система уравнений (10.22) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \overline{p_0}(j) + \sum_{\alpha=1}^r (-1)^\alpha \overline{p_\alpha}(j) b_0^\alpha &= X_j(0), \\ \overline{p_0}(j) + \sum_{\alpha=1}^r (-1)^\alpha \overline{p_\alpha}(j) (b_0^\alpha b_0^\lambda + \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{2^\gamma-1} b_{2^\gamma+m}^\alpha b_{2^\gamma+m}^\lambda 2^{-\gamma}) &= \\ = X_j(0) b_0^\lambda + \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{2^\gamma-1} X_j(2^\gamma+m) b_{2^\gamma+m}^\lambda 2^{-\gamma}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

В базисе Уолша-Пэли в спектрах  $b_k^\alpha$  степенных функций все составляющие с номерами ранга выше показателя степени  $\alpha$  равны нулю, поэтому система уравнений (10.22) может быть упрощена и приведена к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^r (-1)^\alpha \overline{p_\alpha}(j) b_0^\alpha &= X_j(0), \\ \sum_{\alpha=1}^r (-1)^\alpha \overline{p_\alpha}(j) \sum_{k(R=1)} b_k^\alpha b_k^1 &= \sum_{k(R=1)} X_j(k) b_k^1, \\ &\dots\dots\dots \\ (-1)^r \overline{p_r}(j) \sum_{k(R=r)} b_k^r b_k^r &= \sum_{k(R=r)} X_j(k) b_k^r. \end{aligned}$$

Специфика данной системы такова, что последнее уравнение включает в себя только один неизвестный параметр  $\overline{p_r(j)}$ , предпоследние – два параметра  $\overline{p_r(j)}$  и  $\overline{p_{r-1}(j)}$  и т.д. В соответствии с этим процесс вычисления параметров  $\overline{p_\alpha(j)}$  целесообразно проводить, начиная с параметра высшего порядка. В общем виде значение параметра  $\overline{p_m(j)}$  на выходе ЦДСФ  $r$ -го порядка можно записать так

$$\overline{p_m(j)} = \sum_{k(R=m)} X_j(k) \left[ \frac{(-1)^m b_k^m}{\sum_{k(R=m)} (b_k^m)^2} \right] - \sum_{\alpha=m+1}^r (-1)^{\alpha-m} \overline{p_\alpha(j)} \left[ \frac{\sum_{k(R=m)} b_k^\alpha b_k^m}{\sum_{k(R=m)} (b_k^m)^2} \right].$$

Его можно представить и в компенсационной форме записи

$$\overline{p_m(j)} = \sum_{k(R=m)} X_j(k) H_m^m(k) - \sum_{\alpha=m+1}^r \overline{p_\alpha(j)} d(N, m, \alpha), \quad (10.26)$$

если принять

$$H_m^m(k) = (-1)^m b_k^m / \sum_{k(R=m)} (b_k^m)^2, \quad (10.27)$$

$$d(N, m, \alpha) = (-1)^{\alpha-m} \sum_{k(R=m)} b_k^\alpha b_k^m / \sum_{k(R=m)} (b_k^m)^2 \quad (10.28)$$

Как следует из формул (10.27) и (10.28) и СИХ, и компенсационные коэффициенты зависят только от значений спектра Уолша-Пэли степенных функций, причем в ЦДСФ  $r$ -го порядка используются спектры ранга не более  $r$ . Используя их общую запись, СИХ  $m$ -го параметра, например, можно представить как

$$H_m^m(k(R=m)) = \frac{(-1)^{m+1} 2^{2m} 2^{-(\mu_1 + \dots + \mu_m)}}{N^m m! \sum_{\mu=0}^{n-m} \dots \sum_{\mu_m=\mu_{m-1}+1}^{n-1} 2^{-2(\mu_1 + \dots + \mu_m)}}, \quad m = 1, 2, \dots, r. \quad (10.39)$$

Результаты преобразований показывают, что значения компенсационных коэффициентов в базисе Уолша-Пэли совпадают с их значениями в базисах Хаара и единичных функций. Это подтверждает уже отмечавшийся факт независимости компенсационных коэффициентов от используемой системы базисных функций.

Этот метод позволяет записать задачу цифровой фильтрации в терминах выбранной системы базисных функций, что в конечном счете и обуславливает одну из важных его особенностей – возможность на единой математической основе решать задачи синтеза оптимальных и квазиоптимальных фильтров.

Обратимся к общей постановке задачи синтеза ЦДСФ, считая, что входной сигнал представляется в виде (10.1). Его спектр по некоторой системе базисных функций  $\{\varphi(k, i)\}$  записывается выражением (10.2) и в следствии свойств аддитивности помехи состоит из двух составляющих

$$X_j(k) = U_j(k) + N_j(k). \quad (10.40)$$

Первая из них определяет спектр полезного сигнала  $u(j-i)$ , а вторая - спектр помехи  $n(j-i)$ :

$$N_j(k) = \frac{1}{NP_k} \sum_{i=0}^{N-1} n(j-i) \varphi(k, i).$$

Если система базисных функций  $\{\varphi(k, i)\}$  выбрана таким образом, что часть спектральных коэффициентов полезного сигнала равна нулю, то данные коэффициенты в соответствии с выражением (10.40) будут содержать только помеховую составляющую и, следовательно, могут быть исключены без искажения полезного сигнала.

При восстановлении сигнала по оставшемуся спектру образуется сигнал  $\bar{x}(j-i)$ , состоящий из той же полезной составляющей  $u(j-i)$  и оставшейся не отфильтрованной части помехи  $n'(j-i)$ :

$$\bar{x}(j-i) = u(j-i) + n'(j-i) = \sum_{k \in k^*} X_j(k) \varphi(k, i). \quad (10.41)$$

В выражении (10.52) суммирование проводится по номерам, принадлежащим области  $k^*$  номеров неисключенных спектральных коэффициентов.

Сигнал  $\bar{x}(j-i)$  по виду совпадает с полезной составляющей  $u(j-i)$ , однако имеет другие значения параметров  $\bar{p}_\lambda(j)$ , представляющих собой оценку искомых параметров  $p_\lambda(j)$ :

$$\bar{x}(j-i) = \sum_{\lambda=0}^r (-1)^\lambda \bar{p}_\lambda(j) i^\lambda. \quad (10.42)$$

Таким образом, при этом способе преобразования сигнал  $\bar{x}(j-i)$  является отфильтрованным сигналом, с определенной степенью точности аппроксимирующим исследуемый входной сигнал  $x(j-i)$ . Его можно рассматривать в качестве аппроксимирующей функции  $\Phi(i, \{\bar{p}_m(i)\})$ . На рис. 10.4а приведена геометрическая интерпретация процесса аппроксимации полезного сигнала  $u(j-i)$  (кривая 1) с наложенным случайным шумом (кривая 2). Аппроксимирующая функция имеет вид кривой 3. На рис. 10.4б представлено изображение этого процесса в спектральной области базиса  $\{\varphi(k, i)\}$ , причем неучитываемые (исключаемые) коэффициенты условно отмечены «крестиком».

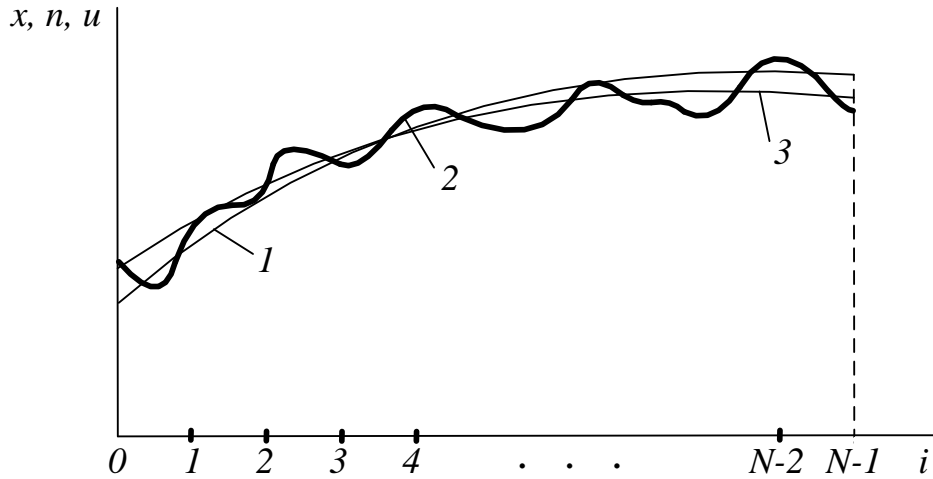
Для определения параметров аппроксимирующего полинома (10.42) разложим сигнал  $\bar{x}(j-i)$  (10.41) с учетом его записи в виде (10.42) по системе функций  $\{\varphi(k, i)\}$ . Тогда

$$\sum_{\lambda=0}^r (-1)^\lambda \bar{p}_\lambda(j) \frac{1}{NP_m} \sum_{i=0}^{N-1} i^\lambda = \sum_{k \in k^*} X_j(k) \frac{1}{NP_m} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(k, i) \varphi(m, i).$$

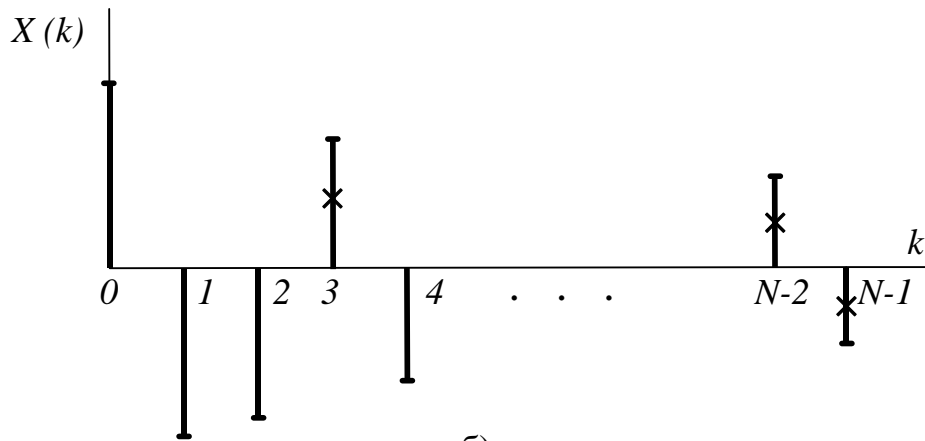
Из данного выражения, используя свойство ортогональности СБФ, нетрудно получить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{\lambda=0}^r (-1)^\lambda \overline{p_\lambda}(j) b_k^\lambda = X_j(k), \quad k \in k^*. \quad (10.43)$$

Из возможных структурных организация этой системы уравнений, зависящих от вида выбранного базиса, практическое значение имеют системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных и в которых число уравнений больше числа неизвестных.



а)



б)

Рис. 11.4 Аппроксимация полезного сигнала

а) во временной области;

б) в спектральной области

В первом случае система (10.43) имеет единственное решение

$$\overline{p_m}(j) = \sum_{k \in k^*} (-1)^m X(k) \sum_{\lambda=0}^r b_k^\lambda \Delta_m(\lambda) / \Delta, \quad (10.44)$$

по виду записи близкое к решению и для некоррелированной помехи совпадающее с ним в смысле равенства нулю систематических и минимума

дисперсии случайных погрешностей. Коэффициент сглаживания оценки  $m$ -го параметра при этом будет иметь следующий вид

$$\rho_m^r = \frac{1}{N} \sum_{k \in k^*} [\sum_{\lambda=0}^r b_k^\lambda \Delta_m(\lambda) / \Delta]^2 / P_k \quad (10.45)$$

и совпадет с его оптимальной записью.

Во втором случае для решения системы (10.43) можно использовать различные методы, приводящие к различным видам фильтрующих алгоритмов. Если применить к ней известный метод нормальных уравнений Гаусса, то параметры  $\overline{p_m(j)}$  можно найти из решения эквивалентной системы уравнений

$$\sum_{m=0}^r (-1)^m \overline{p_m(j)} \sum_{k \in k^*} b_k^\lambda b_k^m = \sum_{k \in k^*} X_j(k) b_k^\lambda, \quad \lambda = 0, 1, \dots, r,$$

так же приводящей к алгоритмам оптимальной оценки с коэффициентом сглаживания в виде (10.45). Можно изменить процедуру Гаусса и учитывать при формировании каждого эквивалентного уравнения не все уравнения системы (10.43), а только некоторую ее часть. Такая модификация метода Гаусса упрощает получаемые при этом алгоритмы фильтрации за счет уменьшения размерности спектрального фильтра, однако приводит к увеличению уровня случайных погрешностей по сравнению с их минимальной величиной в оптимальном фильтре. Если это увеличение допустимо, то с помощью модифицированного метода нормальных уравнений Гаусса на основе системы (10.43) можно решать задачу синтеза квазиоптимальных ЦДСФ. Выбор количества и вида используемых уравнений системы (10.43) можно осуществлять в этом случае из решения неравенства

$$\rho_m^r \leq \rho_{m \text{ доп}}^r, \quad (10.46)$$

где  $\rho_{m \text{ доп}}^r$  – допустимое значение коэффициента сглаживания  $m$ -го параметра, связанное с допустимым уровнем дисперсии случайных погрешностей в оценке  $m$ -го параметра ЦДСФ  $r$ -го порядка.

Задачу квазиоптимальной оценки параметров в подобной постановке можно решить и с использованием другого метода решения системы уравнений (10.43). Этот метод назван методом *конечных сумм*. Суть его состоит в том, что каждое уравнение эквивалентной системы формируется простым суммированием правых и левых частей определенного числа уравнений системы (10.43). Получаемая при этом система в общем виде записывается так:

$$\sum_{m=0}^r (-1)^m \overline{p_m(j)} \sum_{k \in k_\lambda^*} b_k^m = \sum_{k \in k_\lambda^*} X_j(k), \quad \lambda = 0, 1, \dots, r, \quad (10.47)$$

где в каждом  $\lambda$ -м уравнении суммирование проводится по всем значениям индекса  $k$ , принадлежащим подобласти  $k_\lambda^*$  области  $k^*$ .

Решение системы (10.47) так же можно представить в форме уравнения (10.46) с соответствующими записями алгебраических дополнений  $\Delta_m(\lambda)$  и главного определителя  $\Delta$ . При этом коэффициент сглаживания определится

выражением (10.47), а вид и необходимое число уравнений системы (10.43), используемых при формировании каждого уравнения эквивалентной системы (10.47), – из условия (10.46).

Модифицированный метод нормальных уравнений Гаусса и метод конечных сумм позволяют найти алгоритмы фильтрации, отличающиеся по сложности реализации. Выбор конкретного метода зависит от допустимого уровня случайных погрешностей и сложностных требований, предъявляемым к ЦФ.

Проиллюстрируем возможности приведенных методов синтеза ЦДСФ на примерах использования полиномиальных базисных функций и функций Уолша. В соответствии со свойством спектров степенных сигналов в полиномиальном ортогональном базисе  $\{Pol(m,i)\}$  система уравнений (10.43) в развернутой форме записи представляется так:

$$\left. \begin{aligned} &\overline{p_0}(j)b_0^0 - \overline{p_1}(j)b_0^1 + \dots + (-1)^r \overline{p_r}(j)b_0^r = X_j(0), \\ &\quad -\overline{p_1}(j)b_1^1 + \dots + (-1)^r \overline{p_r}(j)b_1^r = X_j(1), \\ &..... \\ &\qquad(-1)^r \overline{p_r}(j)b_r^r = X_j(r), \end{aligned} \right\} \tag{10.48}$$

где

$$X_j(m) = \frac{1}{NP_m} \sum_{i=0}^{N-1} x(j-i) Pol(m, i); \quad b_m^k = \frac{1}{NP_m} \sum_{i=0}^{N-1} i^k Pol(m, i).$$

Система (10.48) совместна и имеет единственное решение, которое можно записать в виде (10.44). Однако треугольный вид этой системы позволяет получить более удобное аналитическое описание ее решения в компенсационной форме записи:

$$\overline{p_k}(j) = \frac{(-1)^k}{b_k^k} X_j(k) - \sum_{\lambda=k+1}^r (-1)^{\lambda-k} \overline{p_\lambda}(j) \frac{b_k^\lambda}{b_k^k}, \quad k = 0, 1, \dots, r. \quad (10.49)$$

Выражение (10.49) определяет алгоритм работы  $r$ -го порядка в базисе  $\{Pol(m, i)\}$ . Здесь  $(-1)^k / b_k^k$  – спектральная ИХ  $k$ -го параметра ЦФ  $k$ -го порядка;  $(-1)^{\lambda-k} b_k^\lambda / b_k^k$  – компенсационные члены по параметрам более высокого порядка. При  $r = k$  выражение (10.49) приобретает простой вид:

$$\overline{p_k(j)} = \frac{(-1)^k}{b_k^k} X_j(k).$$

В спектре Уолша-Пэли дискретных степенных функций  $i^k$  все составляющие ранга более  $k$  равны нулю. Поэтому в базисе Уолша-Пэли  $\{pal(m, i/N)\}$  система уравнений (10.54) имеет вид



$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^r (-1)^\lambda \overline{p_\lambda}(j) b_0^\lambda &= X_j(0); \\ \sum_{\lambda=1}^r (-1)^\lambda \overline{p_\lambda}(j) b_{k(R=1)}^\lambda &= X_j(k(R=1)) \quad ((\overset{1}{n}) \text{ уравнений}); \\ \dots\dots\dots \\ (-1)^r \overline{p_r}(j) b_{k(R=r)}^r &= X_j(k(R=1)) \quad ((\overset{r}{n}) \text{ уравнений}). \end{aligned} \right\} \quad (10.50)$$

Здесь

В системе (10.50) число неизвестных ( $r$ ) меньше числа уравнений. Это позволяет в базисе Уолша-Пэли решать задачи синтеза как оптимальных, так и квазиоптимальных ЦДСФ.

Для ЦДСФ по методу конечных сумм в общем случае характерно существенное ухудшение качества фильтрации по отношению к оптимальным ЦДСФ с увеличением величины порядка фильтра. В этом смысле они уступают ЦДСФ, синтезированным с использованием модифицированного метода нормальных уравнений Гаусса. Однако для малых  $r$  ( $r \leq 2$ ) увеличение уровня дисперсии случайных погрешностей в оценке параметров для ЦДСФ по методу конечных сумм лежит в пределах 20-30%, что не превышает 6% в величине среднеквадратической погрешности и часто допустимо на практике. Это позволяет сделать вывод о практической перспективности и этого метода цифровой обработки сигналов малых порядков.

**ТЕМА №11.** Понятие непрерывного wavelet-преобразования. Материнские wavelet-ы. Локализирующие свойства и интерпретация, свойства CWT. Дискретизация непрерывного wavelet-а. Применение непрерывного wavelet-преобразования.

Непрерывное wavelet-преобразование (Continue Wavelet Transform - CCWT) было разработано как альтернатива кратковременному преобразованию Фурье с целью преодолеть сложности, связанные с разрешением по времени и частоте.

Анализ с помощью wavelet-преобразования выполняется примерно таким же образом, как и анализ с помощью кратковременного преобразования Фурье в том смысле, что сигнал умножается на некоторую функцию (*wavelet*), подобную окну в STFT, и преобразование выполняется отдельно для различных сегментов сигнала во временной области. Однако существуют два основных различия между STFT и CWT:

- при CWT не выполняется преобразование Фурье взвешенного сигнала.

- при CWT ширина окна меняется по мере того, как вычисляется преобразование для каждой из компонент спектра, что, возможно, является самой существенной особенностью wavelet-преобразования.

Математическое определение непрерывного wavelet-преобразования имеет вид:

$$s(x) \mapsto S(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_{ab}}(x) s(x) dx, \quad (11.1)$$

где  $s$  - сигнал, и  $\psi_{ab}$  - анализирующая функция (мы обозначаем переменную времени за  $x$ ). Для преобразования Фурье и для CWT, функция анализа  $\psi_{ab}$  получена действием группы преобразований над базисной (или порождающей) функцией  $\psi$  (*mother wavelet*). Существенная разность между двумя этими способами в представлении частотного параметра  $a$ . Для CWT:

$$\psi_{ab}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (11.2)$$

Действие  $a$  на функции  $\psi$ : расширение (при  $a > 1$ ), или сжатие (при  $a < 1$ ): форма функции не изменяется. Что касается  $b$ , это - просто перенос.

В отличие от CWT, при STFT  $\psi_{ab} : \psi_{ab}(x) = e^{ix/a} \psi(x-b)$ . Это означает что, зависимость от  $a$  - это модуляция ( $1/a \sim$  частота); окно имеет постоянную ширину, но чем ниже  $a$ , тем большее число колебаний в окне  $\psi$ .

Термин "wavelet" означает "маленькая волна" русский аналог – слово "всплеск". Малость соответствует условию того, что эта функция ("окно")

имеет конечную длину. Волна соответствует условию осцилляции. Термин "материнская" подразумевает, что функции с разными носителями, используемые в преобразовании, получены из одной главной функции ("mother wavelet"). Другими словами, материнская волна - прототип для генерации других функций.

Термин "сдвиг" имеет тот же смысл, что и в STFT; он определяет местонахождение окна по оси времени, по мере того как окно сдвигается. Однако, того частотного параметра, который был в STFT, теперь нет. Вместо этого появился масштаб, который определяется как  $1/\text{частота}$ . Частота в большей степени специфична для STFT. Масштаб, используемый в wavelet-преобразовании, похож на тот масштаб, который применяется в картографии. Как и на карте, крупный масштаб соответствует глобальному обзору (сигнала), а малый масштаб - подробному. Подобно этому, в терминах частоты, низкая частота (крупный масштаб) соответствует общей информации о сигнале (обычно охватывает весь сигнал), в то время как высокая частота (мелкий масштаб) соответствует подробной информации о скрытых особенностях сигнала (обычно продолжается не очень долго). К счастью, на практике мелкий масштаб (высокая частота) не занимает всей длительности сигнала. Он появляется время от времени в виде кратковременной "вспышки". Масштабирование, как математическая операция, растягивает либо сжимает сигнал. Крупный масштаб соответствует растянутому сигналу, а более мелкий - сжатому. На языке функций, по заданной функции  $f(t)$  можно построить функцию  $f(at)$ , являющуюся сжатой версией исходной при  $a > 1$ , и растянутой версией  $f(t)$  при  $a < 1$ . Однако, в определении wavelet-преобразования масштаб стоит в знаменателе, поэтому выполняется обратное преобразование, т.е.  $a > 1$  растягивает сигнал, а  $a < 1$  - сжимает. Такая интерпретация масштаба и будет использоваться в дальнейшем.

CWT задается базисной формулой преобразования, которая выглядит, согласно (1) и (2):

$$S(a, b) = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(a^{-1}(x - b))} s(x) dx \quad (11.3)$$

где  $a > 0$  - параметр масштаба и  $b \in \mathbb{R}$  - параметр сдвига. В соотношении (3),  $s$  - сигнал с конечной энергией, и функция  $\Psi$ , анализирующий wavelet, считается хорошо локализованным и в области времени и в области частоты. Кроме того,  $\Psi$  должен удовлетворять условию допустимости, которое гарантирует обратимость CWT, и в большинстве случаев, может быть сокращено к требованию, что  $\Psi$  имеет среднее значение равное нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$$

Так как  $\Psi_{ab}$  действует подобно фильтру (как свертка), то CWT:  $s \rightarrow S$  обеспечивает локальную (то есть полосовую) фильтрацию как в пространстве ( $b$ ) и по масштабу ( $a$ ). Объединяя эти особенности с локализирующими свойствами  $\Psi(t)$  и ее преобразованием Фурье  $\hat{\psi}(w)$  мы видим, что CWT работает в постоянной относительной ширине полосы частот ( $\Delta w/w = \text{const}$ ).

Таким образом, это более эффективно в высокой частоте, то есть при малых масштабах, в частности для обнаружения особенностей в сигнале.

Кроме того, преобразование  $W_\psi: s(x) \rightarrow S(a, b)$  может быть точно инвертировано:

$$s(x) \approx \int_{-\infty}^{\infty} db \int_0^{\infty} \frac{da}{a^2} \psi_{ab}(x) S(a, b)$$

Это означает, что CWT обеспечивает декомпозицию сигнала, как линейную суперпозицию wavelet-ов  $\psi_{ab}$  с коэффициентами  $S(a, b)$  - аналогия с интегралами Фурье очевидна.

Как ясно из (3), CWT - проекция сигнала, в смысле  $L^2$ , на совокупность  $\{\psi_{ab}, a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ , сгенерированных из одной функции  $\psi$  переносом и расширением:

$$\begin{aligned} S(a, b) &= \left\langle \psi_{ab} / s \right\rangle = a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(a^{-1}(x-b))} s(x) dx = \\ &= \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(aw)} s(w) e^{ibw} dw \end{aligned} \quad (11.4)$$

Шляпка обозначает преобразование Фурье. Таким образом преобразование  $S(a, b)$  лежит в полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2 = \{a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ . Wavelet  $\psi$  должен удовлетворять ряду условий.

(i) Для корректности формулировки  $\psi(x)$ , и, следовательно, также  $\hat{\psi}(w)$ , должен быть квадратично интегрируем:  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

(ii)  $\psi$  должен быть допустимым, то есть следующий интеграл должен сходиться:

$$c_\psi \equiv 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(w)|^2 \frac{dw}{|w|} < \infty \quad (11.5)$$

Это условие подразумевает

$$\hat{\psi}(0) = 0 \quad (6)$$

Которое эквивалентно условию равенства нулю среднего значения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (7)$$

(iii) Чтобы получать эффективное преобразование (хорошее полосовое фильтрацию, и в пространстве времени и в пространстве частоты),  $\psi(x)$  и  $\hat{\psi}(w)$  должны быть оба хорошо локализованы (достаточно потребовать, чтобы  $\psi$ , тоже было интегрируемо  $\psi \in L^1 \cap L^2$ ), но на практике будет полезна лучшая локализация).

(iv) В дополнение к (ii), может требоваться, чтобы  $\psi$  имело некоторое число обращений в нуль моментов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \psi(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (11.8)$$

(Это свойство улучшает эффективность  $\psi$  при обнаружении особенностей в сигнале, так как это слепо к многочленам до порядка  $N$ ).

(v) В заключение, часто требуется, чтобы  $\hat{\psi}(w)$  было вещественно, и  $\hat{\psi}(w) = 0$  для  $w < 0$  (такой  $\Psi$  также называется аналитическим сигналом или функцией Харди).

Как мы увидим далее, wavelet  $\Psi$  удовлетворяющий, этим требованиям генерируется из (4) преобразованием  $W_\Psi : s(x) \rightarrow S(a,b)$ , которое производит хороший анализ сигнала, и обеспечивает эффективное восстановление  $S(a, b) \rightarrow s(x)$  сигнала из преобразования.

Два наиболее часто используемых практически wavelet-a - это Mexican Hat и wavelet Morlet-a.

Mexican Hat - просто вторая производная Гауссиана,

$$\psi_H(x) = (1-x^2)\ell^{-x^2/2}, \quad \hat{\psi}_H(w) = w^2\ell^{-w^2}. \quad (11.9)$$

Это вещественный wavelet с двумя обращающимися в нуль моментами ( $n = 0,1$ ).

Morlet wavelet - это модулированный Гауссиан

$$\psi_M(x) = \ell^{i w_0 x} \ell^{-x^2/2\sigma_0^2} + corr \quad (11.10)$$

$$\hat{\psi}_M(x) = \ell^{-\left[(w-w_0)\sigma_0\right]^2/2} + corr \quad (11.11)$$

Фактически первое выражение в отдельности не удовлетворяет условиям допустимости (11.6) и (11.7) и, следовательно, есть потребность в исправлении. Однако, для достаточно большого  $w_0$  (обычно  $w_0 \Rightarrow 5.5$ ), эта коррекция численно незначительна. Без коррекции, (10) это функция Gabor-a, наиболее общая функция, используемая в STFT.

Morlet wavelet комплексен, следовательно, соответствующее преобразование  $S(a,b)$  - также комплексно, и можно рассматривать отдельно фазу и модуль. Оказывается, что фаза преобразования - определяющий компонент алгоритма обнаружения особенностей в сигнале.

Главные достоинства CWT следуют из того, что  $\Psi$  имеет компактный носитель при этом  $\Psi$  и  $\hat{\psi}$  должны быть настолько хорошо локализованы, насколько возможно. Пусть  $\Psi$  имеет 'существенный' носитель ширины  $L$ , центрированный вокруг 0, в то время как  $\hat{\psi}$  имеет 'существенный' носитель ширины  $\Omega$ , центрированный вокруг  $w_0$ , тогда wavelet-ы  $\Psi_{ab}$  и  $\hat{\psi}_{ab}$ , имеют, соответственно, 'существенный' носитель ширины  $aL$  вокруг  $b$  и 'существенный' носитель ширины  $\Omega/a$  вокруг  $w_0/a$ . Заметьте, что произведение двух ширин постоянно. И она должна быть ограничена снизу фиксированной константой. Учтем также, что  $1/a$  ведет себя подобно частоте. Следовательно:

- если  $a \gg 1$ , то  $\Psi_{ab}$  - широкое окно, в то время как  $\hat{\psi}_{ab}$  является очень узким вокруг малой частоты  $w_0/a$ : это преобразование наиболее чувствительно к низким частотам.

• если  $a \ll 1$ , то  $\Psi_{ab}$  является узким окном и  $\hat{\psi}_{ab}$  широка и центрирована вокруг высокой частоты  $w_0$ : этот wavelet имеет хорошую возможность локализации в пространственной области и обычно чувствителен к высоким частотам.

Таким образом, мы получили средство, которое воспроизводит корреляцию между продолжительностью и средней частотой, обсужденную во введении: низкие части частоты сигнала имеют тенденцию быть длинными, в то время как высокие частоты, в общем, встречаются на коротких промежутках времени.

Объединяя эти локализирующие свойства с условием нулевого среднего и факт того, что  $\Psi_{ab}$  действует подобно фильтру (свертка), мы видим, что ССWT выполняет локальную фильтрацию и во времени и по масштабу.

При принятии всех этих свойств вместе, мы естественно подошли к интерпретации СWT как математического микроскопа, с оптикой  $\Psi$ , положением  $b$  и глобальным увеличением  $1/a$ . Кроме того анализ работает в постоянной относительной ширине полосы частот ( $\Delta w/w = \text{const}$ ) так, чтобы это имело лучшее разрешение в высокой частоте, то есть в малых масштабах.

Это свойство делает это идеальным средством для обнаружения особенностей (например, разрывы в сигнале или одной из производных), и также свойств, зависящих от масштаба, в частности для анализа фракталов.

Данный допустимый wavelet  $\Psi$ , то есть такой, что  $c_\Psi < \infty$  (см. (11.5)), соответствующий СWT  $W_\Psi : s(x) \rightarrow S(a, b)$  - линейное отображение, со следующими свойствами:

(1)  $W_\Psi$  - ковариантно при переносе и расширении (изменение масштаба):

$$W_\Psi : s(x - x_0) \rightarrow S(a, b - x_0) \quad (11.12)$$

$$W_\Psi : \frac{1}{\sqrt{a_0}} s\left(\frac{x}{a_0}\right) \rightarrow S\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right) \quad (11.13)$$

(2)  $W_\Psi$  сохраняет энергию сигнала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2 dx = c_\Psi^{-1} \iint_{R_+^2} |S(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \quad (11.14)$$

Соотношение (11.14) означает, что отображение  $W_\Psi$  изометрия из пространства сигналов  $L^2(\mathbb{R})$  на закрытое подпространство  $L^2(\mathbb{R}_+^2, dad b/a^2)$ . Эквивалентная формулировка - то, что wavelet  $W_\Psi$  генерирует решение тождества:

$$c_\Psi^{-1} \iint_{R_+^2} |\Psi_{ab}\rangle \langle \Psi_{ab}| \frac{dad b}{a^2} = I \quad (11.15)$$

(3) Как следствие, отображение  $W_\Psi$  обратимо, и обратное преобразование - просто сопряженное с  $W_\Psi$ . Таким образом, сигнал  $s(x)$  может быть восстановлен из преобразования формулой:

$$s(x) = c_{\psi}^{-1} \iint_{R_+^2} \psi_{ab}(x) S(a, b) \frac{dad b}{a^2} \quad (11.16)$$

Это означает что, SWT обеспечивает разложение сигнала как линейное наложение wavelet-ов  $\psi_{ab}$  с коэффициентами  $S(a, b)$  — точно так, как для преобразования Фурье.

(4) Проекция из  $L^2(R_+^2, dad b/a^2)$  на  $W_{\psi}$ , то есть пространство wavelet преобразований, является составным оператором, чье ядро

$$K(a', b'; a, b) = c_{\psi}^{-1} (\psi_{a'b'} | \psi_{ab}) \quad (11.17)$$

является автокорреляционной функцией  $\psi$ . Это также называется воспроизводящим ядром, потому что формулировка выше означает в точности, что функция  $f \in L^2(R_+^2, dad b/a^2)$  - это SWT некоторых сигналов тогда и только тогда, когда она удовлетворяет свойству воспроизведения:

$$f(a' b') = \iint_{R_+^2} K(a', b'; a, b) f(a, b) \frac{dad b}{a^2} \quad (11.18)$$

Замечание: соотношение (16) означает, что wavelet  $\psi$ , используется и для анализа и для восстановления. Это необязательное ограничение. Действительно, можно восстанавливать сигнал, используя wavelet с отличающийся от анализирующего wavelet-а  $\psi$ :

$$s(x) = c_{\chi\psi} \iint_{R_+^2} \chi_{ab}(x) (W_{\psi} s)(a, b) \frac{dad b}{a^2} \quad (11.19)$$

если  $s$  и  $\psi$  удовлетворяют условию совместимости

$$0 < \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(w) \hat{\chi}(w) \frac{dw}{|w|} \right| < \infty. \quad (11.20)$$

Таким образом, можно получать более простые формулы, в частности для восстановления (как показано первоначально Morlet-ом).

*Вычисление SWT.*

Пусть  $s(t)$  - анализируемый сигнал. Материнский wavelet выбирается так, чтобы служить прототипом всех окон в процессе вычисления. Все окна - это расширенные (или сжатые) и смещенные версии материнского wavelet'a. Имеется ряд функций, которые используются для этой цели. Если материнский wavelet выбран, вычисляется непрерывное wavelet-преобразование вначале для  $a = 1$ , а затем для всех значений  $a$  (меньших и больших 1). Однако в полном преобразовании обычно нет необходимости. Для практических целей обычно достаточно произвести вычисления для ограниченного интервала значений масштаба.

Для удобства процедура будет начата с масштаба  $a=1$  и продолжится для увеличивающихся значений  $a$ , т.е. анализ начнется с высоких частот и перейдет к низким частотам. Это первое значение  $a$  будет соответствовать наиболее сжатому wavelet. Поскольку если значение  $a$  увеличивается, wavelet расширяется.

Wavelet помещается в начало сигнала в точку, которая соответствует нулевому моменту времени. Wavelet-функция в масштабе "1" умножается на

сигнал и затем интегрируется по всей временной оси. Результат интегрирования затем умножается на константу  $1/\sqrt{a}$ . Это умножение необходимо для нормализации энергии так, чтобы преобразованный сигнал имел одинаковую энергию при любом значении масштаба.

Конечный результат - значение непрерывного wavelet-преобразования в точке  $\tau=0, a=1$ .

Wavelet в масштабе  $a=1$  затем сдвигается вправо на величину  $\tau$ , и вычисляется значение преобразования в точке  $t=\tau, a=1$ .

Эта процедура повторяется, пока wavelet не достигнет конца сигнала. Затем  $a$  увеличивается на маленькое значение, и вся процедура выполняется для каждого значения  $a$ . Вычисление для каждого конкретного значения  $s$  заполняет соответствующую полосу на плоскости "время - масштаб". Когда процесс завершен для всех значений  $a$ , CWT сигнала вычислено.

Очевидно, что произведение отлично от нуля только на носителе wavelet-функции. Посредством сдвига wavelet по времени сигнал локализуется во времени, а благодаря изменению значения  $a$ , сигнал локализуется в масштабе (частоте).

Если сигнал имеет спектральную компоненту, которая соответствует текущему значению  $a$  (1 в данном случае), произведение wavelet с сигналом в точке, где эта спектральная компонента существует, дает относительно большое значение. Если такая спектральная компонента не представлена в сигнале, значение произведения будет относительно малым или равным нулю. С другой стороны, для крупных масштабов непрерывное wavelet-преобразование даст большие значения для почти всей продолжительности сигнала, так как низкие частоты присутствуют все время.

Самый простой способ состоит в том, чтобы попрактиковаться на очень простом академическом сигнале, типа простого разрыва во времени или монохроматического сигнала (чистой синусоиды).

Мы теперь анализируем два академических сигнала, упомянутый выше. Ось масштаба, в единицах  $a$ , указывает вниз, так, чтобы высокие частоты (малые  $a$ ) соответствовали вершине графиков, и низкие частоты (большие  $a$ ) к низу. Результаты представлены кодированием значений коэффициентов цветом от белого до черного.

#### *Простой разрыв.*

Самый простой сигнал - простой разрыв во времени, при  $x = x_0$ , смоделированный как  $s(x)=d(x-x_0)$ . Полученный CWT выглядит так:

$$S(a,b) = a^{-1/2} \psi(a^{-1}(x_0 - b)) \quad (11.21)$$

Следующие особенности видны из уравнения (11.21):

- Фаза  $S(a, b)$  постоянна на линиях,  $b/a =$  константа, возникающая из точки  $b = x_0$  на горизонте: эти линии указывают на положение особенности, подобно пальцу.

- На тех же самых линиях постоянного фазы модуль  $S(a,b)$  увеличивается как  $a^{-0.5}$ , при  $a \rightarrow 0$ . Результат даже более явен, если используется  $L^1$  нормализация.



*Единственная монохроматическая волна.*

Рассмотрим комплексный сигнал с единственной гармоникой (монохроматическая волна):

$$s(x) = e^{i w_s x} \Leftrightarrow \hat{s}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(w - w_s), \quad (11.22)$$

который дает:

$$S(a, b) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \hat{\psi}(a w_s) e^{i w_s b} = S(a, 0) e^{i w_s b} \quad (11.23)$$

Те же самые соотношения остаются истинными для реального монохроматического сигнала,  $s(x) = \sin(w_s x)$  или  $s(x) = \cos(w_s x)$ , если wavelet  $\Psi$  такой, что  $\hat{\psi}(w) = 0$  для  $w \leq 0$ .

Еще два важных свойства следуют из (23):

- модуль  $S(a, b)$  независит от  $b$ :

$$|S(a, b)| = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \hat{\psi}(a w_s) \quad (11.24)$$

График  $|S(a, b)|$  состоит из горизонтальных полос, и профиль для фиксированного времени  $b$  по существу воспроизводит профиль "подокна"  $\hat{\psi}$ .

- Фаза  $S(a, b)$  линейна по  $b$

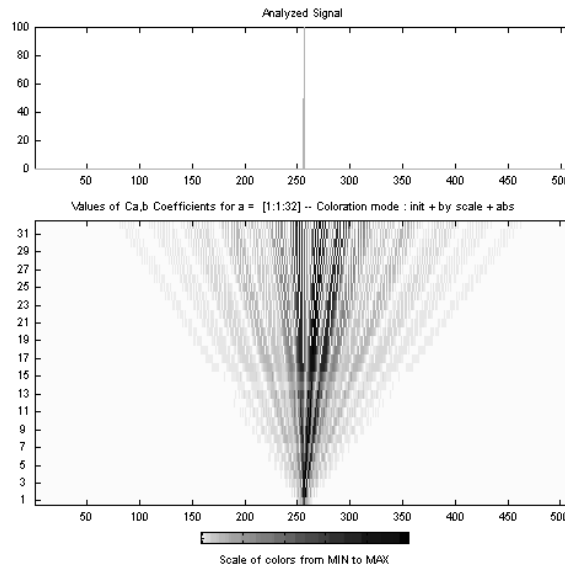


Рис.11.1. CWT дельта функции  $\delta(t-256)$  с  $a=1:32$ ,  $t=1:512$  с использованием wavelet-a Мейера

Параметры  $a$  и  $b$  меняются непрерывно и, поэтому, множество базисных функций избыточно. Необходима дискретизация значений  $a$  и  $b$ , при сохранении возможности восстановления сигнала из его преобразования. Можно показать, что дискретизация должна осуществляться следующим образом:

$$a = a_0^m; \quad b = n b_0 a_0^m, \quad m, n \in \mathbb{Z}, a_0 > 1, b_0 \neq 0. \quad (11.25)$$

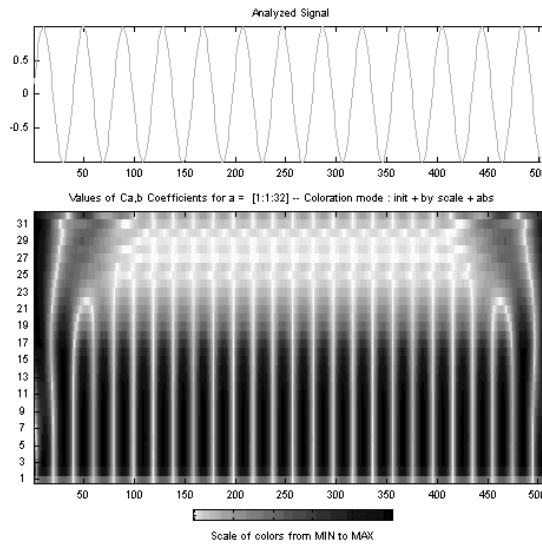


Рис. 11.2. CWT синусоидального сигнала с  $a=1:32$ ,  $t=1:512$  с использованием wavelet-a Mexican Hat

Возможен произвольный выбор параметра  $b_0$ . Без потери общности, выберем  $b_0 = 1$ . Из (11.25) видно, что параметр местоположения зависит от параметра масштаба. С увеличением масштаба увеличивается размер шага сдвига. Это интуитивно понятно, так как при анализе с большим масштабом детали не так важны.

Для дискретных значений  $a$  и  $b$  wavelet -функции представляются в виде:

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} x - n).$$

Дискретизированное преобразование также называется wavelet - преобразованием. Однако, кажется более правильным ввести по аналогии с терминологией преобразований Фурье название рядов wavelet непрерывного времени (CTWS), так как мы имеем дело с дискретным представлением непрерывного сигнала. CTWS определяется путем дискретизации CWT:

$$(CTWS_f)_{m,n} = d_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} x - n) f(x) dx.$$

Восстановление  $f(x)$  из последовательности возможно в том случае, если существуют числа  $A > 0$  и  $B < \infty$ , такие что

$$A \|f(x)\|^2 \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_{m,n}|^2 \leq B \|f(x)\|^2,$$

для всех  $f(x)$  в  $L^2(R)$ . Это означает, что хотя реконструкция  $f(x)$  из ее wavelet-коэффициентов может не совпадать точно с  $f(x)$ , она будет близка к ней в среднеквадратическом смысле. Если  $A = B = 1$  то существует тонкий фрейм, и  $a_0 = 2$ , то возможно полное восстановление и семейство базисных функций  $\psi_{a,b}(x)$  образуют ортогональный базис. Тогда

$$f(x) = C_{\psi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{m,n} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} x - n).$$

Если базисные функции нормализованы, то  $C_{\psi} = 1$ .

Итак, мы дали определение wavelet -преобразования и ряда wavelet-ов для функций непрерывного времени по аналогии с соответствующими формулами для преобразования и ряда Фурье.

CWT нашел широкое многообразие приложений в различных прикладных областях, связанных с обработкой сигналов. Во всех случаях CWT прежде всего используется для анализа переходного процесса, обнаружения резких изменений в сигнале или сравнения этого с данной моделью.

- *Звук и акустика:*

Первые приложения CWT были в области акустики. Несколько примеров - музыкальный синтез, речевой анализ и моделирование звуковых систем, летучих мышей и дельфинов. Другие примеры включают различные задачи в подводную акустику, типа развязывания различных компонент подводной преломляющейся волны, и идентификация препятствия.

- *Геофизика:*

В этой области приложений впервые было предложено использование wavelet (в работах J.Morlet) для анализа записи микроземлетрясений, используемых в нефтяной промышленности. CWT применялся к анализу различных типов геофизических данных, например в гравиметрии (колебания локальной гравитационной области), в сейсмологии (время поступления различных волн), в геомагнетизме (колебания магнитного поля Земли).

- *Спектроскопия:*

Это было одно из самых ранних и наиболее успешных приложений, в частном для ядерной магнитно-резонансной (NMR) спектроскопии, где метод доказал чрезвычайную эффективность в вычитании нежелательных спектральных линий или отфильтровывания фонового шума.

- *Медицинские приложения:*

CWT использовался для анализа или контроля различных электрических или механических явлений в мозге (EEG) или сердце (ECG).

- *Индустриальные приложения:*

Важный аспектами применения CWT является контроль, например обнаружение аномалий в функционировании ядерных, электрических или механических инсталляций.

- *распознавание образов:*

Стандартная задача в искусственной системе технического зрения является опознавание предмет по его форме. Недавно разработанный метод основан на представлении контура предмета как кривой в комплексной плоскости и анализе его с помощью CWT.

**ТЕМА №12.** Дискретное wavelet-преобразование. Матричное описание и свойства DWT. Применение дискретного wavelet-преобразования. Адаптивные ортогональные преобразования.

В большинстве приложений мы имеем дело с дискретными сигналами. Поэтому, с точки зрения практики представляют интерес дискретные аналоги SWT. К сожалению, формулы для wavelet-преобразования дискретного времени нельзя получить простой дискретизацией соответствующих формул для непрерывного времени. Также невозможно определить кратномасштабный анализ для дискретных сигналов, так как не существует базисных функций, масштабированные и смещенные версии которых давали бы нам базис пространства  $L^2(R)$ , пространства квадратично суммируемых последовательностей бесконечной длины.

Рассмотрим сначала, как можно получить представление SWT в виде wavelet-рядов для дискретного времени (DTWS -discrete time wavelet set).

Пусть имеется некоторая непрерывная функция  $f_0(x) \in V_0$ . Наш дискретный сигнал  $c_n$  представим как последовательность коэффициентов при масштабирующих функциях, по которым раскладывается  $f_0(x)$ :

$$f_0(x) = \sum_n c_{0,n} \phi_{0,n}(x).$$

где  $c_{0,n} = c_n$ . Другими словами, мы интерпретируем наш сигнал как последовательность коэффициентов разложения, полученную в ходе кратномасштабного анализа функции  $f_0(x)$ . Тогда мы можем вычислить аппроксимации этой функции, принадлежащие пространствам  $V_1, V_2, \dots$ . Пространства  $V_{-1}, V_{-2}, \dots$  не имеют значения при данной интерпретации.

Согласно концепции кратномасштабного анализа, функция  $f_0(x)$  декомпозируется на две функции  $f_1(x) \in V_1$  и  $e_1(x) \in W_1$ :

$$f_0(x) = f_1(x) + e_1(x) = \sum_k c_{1,k} \phi_{1,k}(x) + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(x).$$

Таким образом, получили две новые последовательности,  $c_{1,n}$  и  $d_{1,n}$ . Этот процесс может быть продолжен для  $f_1(x)$  и функция  $f_0(x)$  (а также и последовательность  $c_n$ ) будет представлена совокупностью коэффициентов  $d_{m,n}$ ,  $m \in Z^+$ ,  $n \in Z$ .

Однако вычисления пока зависят от непрерывных функций  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$ . Поэтому покажем, как вычисления DTWS могут быть выполнены с использованием операций только над дискретными сигналами.

С учетом того, что масштабирующая функция образует базис соответствующего пространства, можно получить:

$$\begin{aligned} c_{1,k} &= \langle \phi_{1,k}(x), f_1(x) \rangle = \langle \phi_{1,k}, f_0(x) - e_1(x) \rangle = \left\langle \phi_{1,k}(x), \sum_n c_{0,n} \phi_{0,n}(x) \right\rangle \\ &= \sum_{n \in Z} c_{0,n} \langle \phi_{1,k}(x), \phi_{0,n}(x) \rangle = 2^{1/2} \sum_{n \in Z} c_{0,n} h_{n+2k}. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Так что оказывается возможным итеративное вычисление коэффициентов  $c_{j,k}$  и  $d_{j,k}$  без непосредственного использования функций  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$ . По аналогии с (12.1) можно записать для произвольного  $j$ ,

$$c_{j,k} = 2^{1/2} \sum_n c_{j-1,n} h_{n+2k}, \quad (12.2)$$

$$d_{j,k} = 2^{1/2} \sum_n c_{j-1,n} g_{n+2k}, \quad (12.3)$$

получив, таким образом, полностью дискретный процесс декомпозиции. Последовательности  $h_n$  и  $g_n$  называются wavelet-фильтрами. Отметим, что  $c_{j,k}$  и  $d_{j,k}$  имеют "половинную" длину по сравнению с  $c_{j-1,k}$ , хотя на данном этапе все последовательности бесконечны. Таким образом, не вводится избыточность.

Обратный процесс заключается в получении  $c_{j-1}$  из  $c_j$  и  $d_j$ :

$$\begin{aligned}
c_{j-1,n} &= \langle \phi_{j-1,n}, f_{j-1}(x) \rangle = \langle \phi_{j-1,n}(x), f_j(x) + e_j(x) \rangle \\
&= \left\langle \phi_{j-1,n}, \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \right\rangle + \left\langle \phi_{j-1,n}, \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \right\rangle \\
&= \sum_k c_{j,k} \langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j,k}(x) \rangle + \sum_k d_{j,k} \langle \phi_{j-1,n}, \psi_{j,k}(x) \rangle \\
&= 2^{1/2} \sum_k c_{j,k} h_{n+2k} + 2^{1/2} \sum_k d_{j,k} g_{n+2k}.
\end{aligned} \tag{12.4}$$

Отметим, что в данном случае суммирование производится по другим переменным по сравнению с формулами (12.2) и (12.3). Длина последовательности  $c_{j-1}$  вдвое больше длины последовательности  $c_j$  или  $d_j$ .

Подставляя (12.1) и (12.2) в (12.3), получаем следующие ограничения на фильтры  $h_n$  и  $g_n$ :

$$2 \sum_k (h_{n+2k} h_{p+2k} + g_{n+2k} g_{p+2k}) = \delta_{n,p}, \tag{12.5}$$

$$2 \sum_n h_{n+2k} h_{n+2p} = 2 \sum_n g_{n+2k} g_{n+2p} = \delta_{k,p}, \tag{12.6}$$

$$2 \sum_n h_{n+2k} h_{n+2p} = 0. \tag{12.7}$$

На практике DTWS должно применяться к сигналам конечной длины. Получившееся преобразование называется "дискретное wavelet-преобразование" (DWT).

Вначале опишем DWT в матричном виде, а затем – на основе банков фильтров, что наиболее часто используется при обработке сигналов.

В обоих случаях мы предполагаем, что базисные функции  $\phi(x)$  и  $\psi(x)$  компактно определены. Это автоматически гарантирует финитность последовательностей  $h_n$  и  $g_n$ . Далее предположим, что сигнал, подвергаемый преобразованию, имеет длину  $N = 2^d$ ,  $d \in \mathbb{Z}^+$ .

Обозначим через вектор  $\nu^j$  последовательность конечной длины  $c_{j,n}$  для некоторого  $j$ . Этот вектор преобразуется в вектор  $\nu^{j+1}$ , который содержит последовательности  $c_{j+1,n}$  и  $d_{j+1,n}$ , каждая из которых половинной длины. Преобразование может быть записано в виде матричного умножения

$\nu^{j+1} = \mathbf{M}_j \nu^j$ , где матрица  $\mathbf{M}_j$  - квадратная и состоит из нулей и элементов  $h_n$ , умноженных на  $\sqrt{2}$ . В силу свойств  $h_n$ , полученных в предыдущем разделе, матрица  $\mathbf{M}_j$  является ортонормированной и обратная ей матрица равна транспонированной. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Возьмем фильтр длиной  $L = 4$ , последовательность длиной  $N = 8$ , а в качестве начального значения -  $j = 0$ . Последовательность  $g_n$  получим из  $h_n$  по формуле (12.1), где  $t = L/(2-1) = 4$ . Тогда операция матрично-векторного умножения будет представлена в виде

$$\begin{bmatrix} c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{1,3} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & & & \\ & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & \\ & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \\ h_2 & h_3 & & & & & & \\ h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & & & \\ & & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & \\ & & & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & \\ h_1 & -h_0 & & & & h_1 & -h_0 & \\ & & & & & h_3 & -h_2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{0,2} \\ c_{0,3} \\ c_{0,4} \\ c_{0,5} \\ c_{0,6} \\ c_{0,7} \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

Обратное преобразование есть умножение  $\nu^{j+1}$  на обратную матрицу  $\mathbf{M}_j^T$ :

$$\begin{bmatrix} c_{0,0} \\ c_{0,1} \\ c_{0,2} \\ c_{0,3} \\ c_{0,4} \\ c_{0,5} \\ c_{0,6} \\ c_{0,7} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} h_0 & & & h_2 & h_3 & & h_1 & \\ h_1 & & & h_3 & -h_2 & & -h_0 & \\ h_2 & h_0 & & h_1 & h_3 & & & \\ h_3 & h_1 & & -h_0 & -h_2 & & & \\ & h_2 & & h_1 & h_3 & & & \\ & h_3 & h_1 & & -h_0 & -h_2 & & \\ & & h_2 & & h_1 & h_3 & & \\ & & h_3 & h_1 & & -h_0 & -h_2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{1,3} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{1,2} \\ d_{1,3} \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

Таким образом, (12.8) - это один шаг DWT. Полное DWT заключается в итеративном умножении верхней половины вектора  $\nu^{j+1}$  на квадратную

матрицу  $\mathbf{M}_{j+1}$ , размер которой  $2^{d-j}$ . Эта процедура может повторяться  $d$  раз, пока длина вектора не станет 1.

В матрице (12.8) в четвертой и восьмой строках последовательность  $h_n$  циркулярно сдвинута: коэффициенты, выходящие за пределы матрицы справа, помещены в ту же строку слева. Это означает, что DWT есть точно один период длины  $N$  DTWS сигнала  $\tilde{c}_{0,n}$ , получаемого путем бесконечного периодического продолжения  $c_{0,n}$ . Так что DWT, будучи определенным таким образом, использует периодичность сигнала, как и в случае с DFT.

Однако, при обработке сигналов, DWT чаще всего описывается посредством блок-диаграммы.

Пусть у нас есть некоторая дискретная временная реализация случайного процесса. Если случайный процесс является стационарным в широком смысле, то соседние отсчеты являются коррелированными друг с другом. То есть у нас есть некоторая избыточная информация. Применяя к реализации преобразование Фурье, мы получим некоторую реализацию в частотной области, причем соседние отсчеты не будут коррелированы друг с другом. То есть вся информация будет сосредоточена в нескольких отсчетах, а все остальные будут близки к нулю.

К большому сожалению, в реальных сигналах не соблюдается свойство стационарности, поэтому при применении преобразования Фурье отсчеты в частотной области опять будут коррелированы друг с другом, и опять будет некоторая излишняя информация. Это происходит, потому что преобразование Фурье не предназначено для анализа нестационарных сигналов и разложение нестационарного сигнала по базису из синусов или косинусов не очень удачно. Wavelet-преобразование более приспособлено для анализа нестационарных сигналов. При переходе из временной области в область время/масштаб только небольшое количество коэффициентов будет существенно отличаться от нуля и, практически, вся информация, содержащаяся в исходной выборке будет представлена в меньшем количестве коэффициентов  $\bar{x} = Wx$  - DWT-сигнала  $x$

Определим некоторый порог  $\varepsilon_i$  (зависит от уровня разложения wavelet) и выполним следующее преобразование:

$$x' = \begin{cases} 0 & \text{если } \bar{x}_i < \varepsilon_i \\ \bar{x} & \text{если } \bar{x}_i \geq \varepsilon_i \end{cases}$$



Ясно, что чем больше порог  $\varepsilon_i$ , тем больше нулевых коэффициентов (большая степень сжатия), но меньший процент сохраненной энергии сигнала.

Очевидно, что на количество ненулевых коэффициентов так же влияет выбор подходящего базиса. По различным оценкам степень сжатия при разложении по "хорошему" базису и наилучшему различается на 15-20 %. Очевидно, что базис будет зависеть от вида анализируемого сигнала, таким образом, возникает проблема выбора базиса для разложения сигнала. Для достижения хороших результатов нам необходимо, чтобы как можно больше информации о сигнале было сосредоточено в наименьшем количестве коэффициентах разложения.

Удаление шума из сигнала.

Пусть  $X_i = k_i + v_i$ , где  $v_i \approx N(0, \sigma^2)$  – белый шум.  $i=0..N-1$

Идея удаления шума из сигнала тоже базируется на определении некоторого порога  $\varepsilon_i$  и вычитания его из коэффициентов wavelet-преобразования сигнала. Существуют два правила "hard" и "soft".

$$T_h(\vec{x}, \varepsilon_i) = \begin{cases} 0 & \text{если } \vec{x}_i < \varepsilon_i \\ \vec{x} & \text{если } \vec{x}_i \geq \varepsilon_i \end{cases}$$

$$T_s(\vec{x}, \varepsilon_i) = \text{sign}(\vec{x}) \max(0, |\vec{x}| - \varepsilon_i)$$

Wavelet -преобразование сигнала является сигнально-независимым. Октавополосное разбиение спектра, производимое им, подходит для большинства, но не для всех реальных сигналов. Желательно было бы иметь преобразование, адаптированное к сигналу. Это эквивалентно тому, чтобы преобразование было бы способно произвольно менять структуру разбиения частотно-временной плоскости, в зависимости от сигнала. Каскадно-соединенные блоки wavelet -фильтров позволяют достичь этого. Здесь будут рассмотрены адаптивные преобразования, которые на основе введенной функции стоимости реализуют произвольное разбиение частотно-временной плоскости сигнала.

Wavelet -преобразование сигнала выполняется путем его пропускания через каскадно-соединенные двухканальные схемы. При этом каскадирование производится по низкочастотной области. Причина этого в том, что неявно предполагается, что эта область содержит больше информации об исходном сигнале. В результате получается «однобокое» дерево. Данное предположение

оправдано для многих реальных сигналов. В самом деле, оно означает, что наш сигнал является низкочастотным на большом интервале времени, а высокочастотные составляющие появляются на коротком интервале. Однако для некоторых сигналов это предположение не выполняется. Метод пакетов wavelet -ов основан на определении того, по какой области на данном уровне выгоднее производить каскадирование. Для этого вначале производится каскадирование по обоим субполосам. В результате получается так называемое «полное», «сбалансированное» дерево.

Будем придерживаться следующей схемы: раскладываем пространство  $V_0$  на два ортогональных подпространства  $V_{-1}$  и  $W_{-1}$ , затем разложим пространство  $V_{-1}$  еще раз ( $V_{-1}V_{-2}$  и  $V_{-1}W_{-2}$ ) как в обычной схеме, но в дополнение разложим пространство  $W_{-1}$  на  $W_{-1}V_{-2}$  и  $W_{-1}W_{-2}$  и так далее, т.е. будем раскладывать дальше не только низкочастотную ( $V$ ) составляющую, но и высокочастотную ( $W$ ). Общая схема разложения будет иметь вид двоичного дерева (рис. 12.1).

На каждом уровне пакета находятся пространства, отвечающие за  $2^j$  часть спектра пространства  $V_0$ . Пакетом всплесков является любой подграф  $G$  полного графа разложения, удовлетворяющий следующим свойствам:

1.  $V_0$  принадлежит  $G$
2. В каждой из вершин граф  $G$  либо делится на две части, либо прерывается

Получим формулу вычисления базисов для соответствующих подпространств. Через  $W_k^j$ , где  $j < 0$ ,  $0 \leq k < 2^{-j}$  будем обозначать подпространство, находящееся на уровне  $j$  и на месте  $k$  слева (нумерация начинается с нуля),

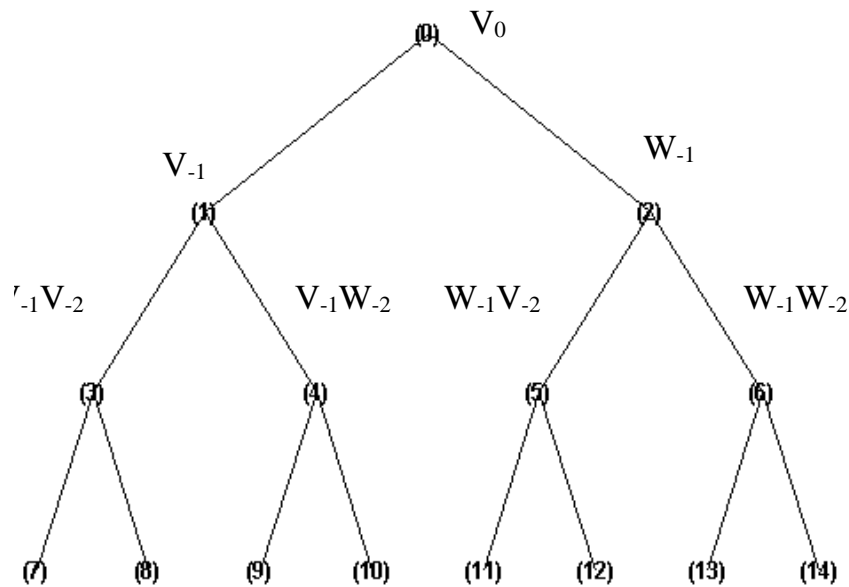


Рис. 12.1. Граф пакета всплесков.

т.е.  $W_0^j = V_j$ ,  $W_0^j = W_j$ , а через  $\psi_k^j$ -будем обозначать функцию, чьи сдвиги образуют ортонормированный базис пространства  $W_k^j$ .

Справедливо следующее выражение:

$$\hat{\psi}_k^j(w) = m_i(2^{-j-1}w)\hat{\psi}_k^{j+1}(w)$$

где  $i=0,1$ ;  $m_0$ - функция, определяемая масштабирующим уравнением,  $m_1(w)=e^{jw}m_0(w)^*$ .

Можно получить более общий результат:

$$\hat{\psi}_k^j(w) = \varphi(w) \prod_{l=0}^{|j|-1} m_{a_l}(2^l w)$$

где  $j < 0$ ,  $0 \leq k < 2^{-j}$ ,  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_j$  – двоичное представление числа  $k$ . Сложность вычисления полной схемы составляет  $O(N \log N)$  (в отличие от стандартной схемы, где сложность составляет  $O(N)$ ).

Далее, на основе введенной функции стоимости определяется наилучший путь по этому дереву. Если исходный блок wavelet -фильтров был ортогональным, то и схема, соответствующая любой конфигурации дерева будет ортогональной, так как она есть не что иное, как каскадное соединение ортогональных блоков.

Таким образом, получается базис, адаптированный к сигналу. Отметим, что эта адаптация не требует обучения или знания статистических свойств сигнала. Wavelet -преобразование (DWT), как и STFT являются частными

случаями этого базиса. Адаптивность достигается за счет увеличения вычислительной стоимости. Существует быстрый алгоритм поиска наилучшего базиса.

Пакеты wavelet были разработаны и исследованы Койфманом и Викархаузером. В качестве функции стоимости они использовали энтропию, понимаемую ими, как «концентрацию» числа коэффициентов  $m$ , требующихся для описания сигнала. Данная функция будет большая, если коэффициенты примерно одной величины и мала, если все, кроме нескольких коэффициентов близки к нулю. Таким образом, любое усреднение приводит к увеличению энтропии. Функция стоимости должна быть аддитивной. Это означает, что

$$M(0) = 0 \quad \text{и} \quad M(\{x_i\}) = \sum_i M(x_i)$$

Под энтропией в данном контексте понимается величина

$$M = e^{-\sum_n p_n \log p_n},$$

$$\text{где } p_n = |x_n|^2 / \|x\|^2.$$

Данная энтропия вычисляется для каждого узла полного дерева пакета wavelet. Далее сравнивается сумма энтропии двух потомков и энтропия их предка на дереве. Если энтропия предка оказалась меньше, отказываемся от его декомпозиции, то есть «обрезаем» дерево. Алгоритм рекурсивно продолжается до достижения вершины дерева. Доказано, что данный алгоритм приводит к наилучшему базису относительно  $M$ .

**ТЕМА №13.** Математическое описание непрерывных изображений. Представление непрерывных изображений, системы преобразования непрерывных преобразований. Детерминированное и вероятностное описание непрерывных изображений. Дискретизация и квантование изображений.

Обычно под изображением подразумевается некоторая функция от интенсивности исследуемого поля в плоскости, называемой плоскостью изображения. Интенсивность можно представить как функцию  $c(x, y, t, \lambda)$ , которая зависит от двух пространственных координат  $x$  и  $y$ , времени  $t$  и длины волны  $\lambda$ . Как в зрительной системе человека, так и в искусственных регистрирующих приборах реакция на воздействие поля зависит от спектральной чувствительности регистрирующей среды, поэтому мгновенное изображение, формируемое регистрирующей средой, можно представить в виде

$$f(x, y, t) = \int_0^{\infty} c(x, y, t, \lambda) s(\lambda) d\lambda, \quad (13.1)$$

где  $s(\lambda)$  - спектральная чувствительность среды.

По аналогии с естественным зрительным восприятием, где цветовые ощущения формируются за счет наличия в зрительной системе регистрирующих сред с различной спектральной чувствительностью, искусственные спектрозональные системы формируют набор изображений

$$f_i(x, y, t) = \int_0^\infty c(x, y, t, \lambda) s_i(\lambda) d\lambda, \quad (13.2)$$

где  $s_i(\lambda)$  - спектральная чувствительность  $i$ -й регистрирующей среды.

В этом курсе в большинстве случаев будут рассматриваться изображения, от времени не зависящие, либо зависящие дискретным образом. Поэтому при дальнейшем описании непрерывных изображений аргумент  $t$  будет опущен.

В системе преобразования непрерывных изображений набор исходных функций  $f_1(x, y), \dots, f_N(x, y)$  преобразуется в набор функций  $g_1(x, y), \dots, g_M(x, y)$  посредством воздействия на исходные функции операторов  $\mathcal{Q}_M\{\bullet\}$ :

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= Q_1\{f_1(x, y), \dots, f_N(x, y)\}, \\ &\dots\dots\dots \\ g_M(x, y) &= Q_M\{f_1(x, y), \dots, f_N(x, y)\}. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Особый интерес в дальнейшем будут представлять линейные системы, удовлетворяющие принципу суперпозиции, для которых справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= Q_1\{a_{11}f_1(x, y) + \dots + a_{1N}f_N(x, y)\} = a_{11}Q_1\{f_1(x, y)\} + \dots + a_{1N}Q_1\{f_N(x, y)\}, \\ &\dots\dots\dots (13.4) \\ g_M(x, y) &= Q_M\{a_{M1}f_1(x, y) + \dots + a_{MN}f_N(x, y)\} = a_{M1}Q_M\{f_1(x, y)\} + \dots + a_{MN}Q_M\{f_N(x, y)\}. \end{aligned}$$

Удобным вспомогательным инструментом при анализе двумерных линейных систем является оператор вида

$$Q\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta,$$

где  $\delta(x, y)$  – дельта-функция Дирака, обладающая следующими свойствами:

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = \begin{cases} \infty, & x = \xi, y = \eta \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}, \quad (13.5a)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1 \text{ при сколь угодно малом положительном значении } \varepsilon, \quad (13.5б)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = f(x, y). \quad (13.5в)$$

В декартовых координатах двумерную дельта-функцию можно представить как произведение двух одномерных:

$$\delta(x, y) = \delta(x) \delta(y), \quad (13.6)$$

определяемых аналогичным (13.5) образом.

В дальнейшем полезным будет иметь в виду следующее тождество:

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[u(x - \xi) + v(y - \eta)]\} du dv, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (13.7)$$

Дельта-функция часто используется в качестве модели точечного источника света.

Рассмотрим простую двумерную линейную систему, преобразующую входное изображение  $f(x, y)$  в выходное  $g(x, y)$  посредством воздействия на входное изображение оператора  $Q\{\bullet\}$ :

$$g(x, y) = Q\{f(x, y)\}.$$

Представим входное изображение в виде (13.5в). В силу линейности оператора  $Q$  получим

$$g(x, y) = Q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q \{ f(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) \} d\xi d\eta.$$

Но поскольку оператор  $Q$  действует только на функцию, зависящую от переменных  $x$  и  $y$ , то

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) Q \{ \delta(x - \xi, y - \eta) \} d\xi d\eta.$$

Введем обозначение

$$h(x, y; \xi, \eta) \equiv Q \{ \delta(x - \xi, y - \eta) \}. \quad (13.8)$$

Рассматривая  $\delta(x - \xi, y - \eta)$  как изображение точечного объекта, помещенного в точку с координатами  $\xi, \eta$ , функцию  $h(x, y; \xi, \eta)$  можно интерпретировать как преобразование этого изображения линейной системой, описываемой оператором  $Q$ . Эта функция называется импульсным откликом системы, а в применении к оптическим системам – функцией рассеяния точки (ФРТ). Таким образом, воздействие линейной двумерной системы на изображение можно представить в виде интеграла суперпозиции

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (13.9)$$

Как следует из (13.8), в общем случае линейная система по-разному воздействует на различные участки входного изображения, в частности, одинаковые точечные объекты, помещенные в разных участках входного изображения, могут иметь различную форму в выходном изображении. Форма выходного изображения точечного объекта сохраняется, если импульсный отклик системы зависит только от разности координат  $x - \xi, y - \eta$ . В этом случае воздействие линейной системы представляется в виде интеграла свертки

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (13.10)$$

который в символической форме записывается как

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y). \quad (13.10a)$$

Линейные двумерные системы, описываемые соотношением (13.10), называются пространственно-инвариантными (в оптике – изопланатическими).

С точки зрения определенности конкретных значений изображения в данных координатах и в данный момент времени существует два основных подхода к его описанию. Первый подход, называемый детерминированным, предполагает, что в каждой точке функция  $f(x, y)$  определяется единственным образом. Иногда более плодотворным для анализа изображений представляется их вероятностное описание, когда данное изображение рассматривается как реализация случайного процесса. Случайный процесс  $f(x, y)$  в  $J$  точках отсчета  $x_j, y_j, j = \overline{1, J}$  полностью описывается совместной плотностью вероятности

$$p(f_1, f_2, \dots, f_J; x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_J, y_J), \quad (13.11)$$

определяющей вероятность того, что  $\xi_j$  – значения процесса в точках с координатами  $x_j, y_j$  удовлетворяют условиям

$$f_j \leq \xi_j < f_j + \Delta f_j, \Delta f_j \rightarrow 0, j = \overline{1, J}. \quad (13.12)$$

Получение совместных плотностей вероятности высокого порядка для изображений является практически непреодолимой проблемой (исключая случаи построения модельных функций плотности). В ряде случаев для описания изображения как реализации случайного процесса достаточно знать плотности вероятности первого и второго порядка, которые могут быть построены на основе физических моделей или оценены экспериментально. Используя эти плотности вероятности, случайный процесс можно описать его статистическими моментами первого и второго порядков.

Первый момент (математическое ожидание, среднее значение) функции  $f(x, y)$  определяется как

$$m_f(x, y) = E\{f(x, y)\} = \int_{\Omega} f(x, y) p(f; x, y) df. \quad (13.13)$$

Здесь  $\Omega$  – область допустимых значений функции  $f$ .

Символом  $E\{\bullet\}$  здесь и далее будет обозначаться операция усреднения по ансамблю.

Второй момент, или автокорреляционная функция, по определению равен

$$R_f(x_1, y_1; x_2, y_2) = E\{f_1(x_1, y_1) f_2^*(x_2, y_2)\} = \iint_{\Omega} f_1(x_1, y_1) f_2^*(x_2, y_2) p(f_1, f_2; x_1, y_1, x_2, y_2) df_1 df_2. \quad (13.14)$$

Здесь подстрочные индексы 1 и 2 при  $f$  соответствуют не двум разным процессам, а значениям одного процесса, соответствующим двум разным



точкам пространства. Второй центральный момент, автоковариационная функция, определяется как

$$K_f(x_1, y_1; x_2, y_2) = E\{[f_1(x_1, y_1) - m_f(x_1, y_1)][f_2^*(x_2, y_2) - m_f^*(x_2, y_2)]\}. \quad (13.15)$$

Нетрудно показать, что

$$K_f(x_1, y_1; x_2, y_2) = R_f(x_1, y_1; x_2, y_2) - m_f(x_1, y_1)m_f^*(x_2, y_2). \quad (13.16)$$

Аналогичным образом для двух разных процессов  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  определяются кросс-корреляционная и кросс-ковариационная функции:

$$R_{fg}(x_1, y_1; x_2, y_2) = E\{f(x_1, y_1)g^*(x_2, y_2)\} = \iint_{\Omega} f(x_1, y_1)g^*(x_2, y_2)p(f, g; x_1, y_1, x_2, y_2)dfdg \quad (13.17a)$$

и

$$K_{fg}(x_1, y_1; x_2, y_2) = E\{[f(x_1, y_1) - m_f(x_1, y_1)][g^*(x_2, y_2) - m_g^*(x_2, y_2)]\}. \quad (13.17a)$$

Еще один момент второго порядка, дисперсия, есть

$$\sigma_f^2(x, y) = E\{|[f(x, y) - m_f(x, y)]|^2\} = K_f(x, y; x, y). \quad (13.18)$$

Случайный процесс, порождающий изображения, называется стационарным в широком смысле, если его среднее значение и дисперсия постоянны, а автокорреляционная (автоковариационная) функция зависит только от разностей  $\tau_x = x_2 - x_1$ ,  $\tau_y = y_2 - y_1$ . Для стационарного процесса

$$m_f(x, y) = m_f, \quad (13.19a)$$

$$\sigma_f^2(x, y) = \sigma_f^2, \quad (13.20a)$$

$$K_f(x_1, y_1; x_2, y_2) = K_f(\tau_x, \tau_y). \quad (13.21a)$$

Несложно убедиться, что автокорреляционная (автоковариационная) функция действительного стационарного процесса есть функция четная, т.е.

$$R_f(\tau_x, \tau_y) = R_f(-\tau_x, -\tau_y).$$

Выполнение условия (13.11a) для случайного процесса не гарантировано, поэтому нельзя говорить о его преобразовании Фурье. Однако к ковариационной функции стационарного процесса, которая есть функция детерминированная, преобразование Фурье может быть применено. Функция

$$W_f(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau_x, \tau_y) \exp[-i(\tau_x \omega_x + \tau_y \omega_y)] d\tau_x d\tau_y \quad (13.22)$$

называется спектром мощности стационарного случайного процесса  $f(x, y)$ . Результат преобразования Фурье кросс-ковариационной функции, иногда называемый кросс-спектром мощности, по определению есть

$$W_{fg}(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{fg}(\tau_x, \tau_y) \exp[-i(\tau_x \omega_x + \tau_y \omega_y)] d\tau_x d\tau_y. \quad (13.23a)$$

Рассмотрим линейную пространственно-инвариантную систему, действие которой на входное изображение, являющееся реализацией стационарного случайного процесса  $f(x, y)$  представляется выражением (13.10). Вычислим среднее значение выходного изображения  $g(x, y)$ :

$$\begin{aligned} m_g(x, y) &= E\{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{f(\xi, \eta)\} h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = \\ &= m_f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx dy = m_f H(0, 0). \end{aligned} \quad (13.24)$$

Аналогично вычисляется корреляционная функция выходного изображения

$$K_g(\tau_x, \tau_y) = E\{g(x, y) g^*(x + \tau_x, y + \tau_y)\} = K_f(\tau_x, \tau_y) * h(\tau_x, \tau_y) * h^*(-\tau_x, -\tau_y) \quad (13.25)$$

и спектр мощности

$$W_g(\omega_x, \omega_y) = W_f(\omega_x, \omega_y) |H(\omega_x, \omega_y)|^2. \quad (13.26)$$

**ТЕМА №14.** Математическое описание дискретных изображений. Векторное представление и линейные преобразования дискретных изображений. Вероятностное описание дискретных изображений.

При идеальной дискретизации предполагается, что исходное непрерывное изображение  $f_I(x, y)$  имеет бесконечные размеры, а дискретизованное получается посредством взятия значений исходного в узлах некоторой бесконечной решетки. Для простоты изложения рассмотрим прямоугольную решетку, ориентированную вдоль координатных осей и имеющую шаг  $\Delta x$  вдоль оси  $x$  и  $\Delta y$  вдоль оси  $y$ .

Дискретизованное изображение в непрерывных координатах можно представить как набор дельта-функций в узлах решетки, умноженных на значения соответствующих отсчетов непрерывного изображения:

$$f_D(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_I(j\Delta x, i\Delta y) \delta(x - j\Delta x, y - i\Delta y). \quad (14.1)$$

Поскольку вне точек  $(j\Delta x, i\Delta y)$   $\delta(x - j\Delta x, y - i\Delta y) = 0$ , это представление можно переписать в виде

$$f_D(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_I(x, y) \delta(x - j\Delta x, y - i\Delta y) = f_I(x, y) d(x, y), \quad (14.2)$$

где  $d(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - j\Delta x, y - i\Delta y)$  – пространственная дискретизирующая функция.

Рассмотрим Фурье-спектр дискретизованного изображения. В силу (1.15а)

$$F_D(u, v) = (2\pi)^{-2} F_I(u, v) * D(u, v), \quad (14.3)$$

где  $F_I(u, v)$  – Фурье-спектр непрерывного изображения, а  $D(u, v)$  – Фурье-спектр дискретизирующей функции. Используя (1.7), можно показать, что

$$D(u, v) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(u - j\Delta u, v - i\Delta v), \quad (14.4)$$

причем  $\Delta u = 2\pi / \Delta x$ ,  $\Delta v = 2\pi / \Delta y$ .

Подставляя (14.4) в (14.3) и вычисляя свертку согласно (114.10), получим

$$F_D(u, v) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_I(u - j\Delta u, v - i\Delta v). \quad (14.5)$$

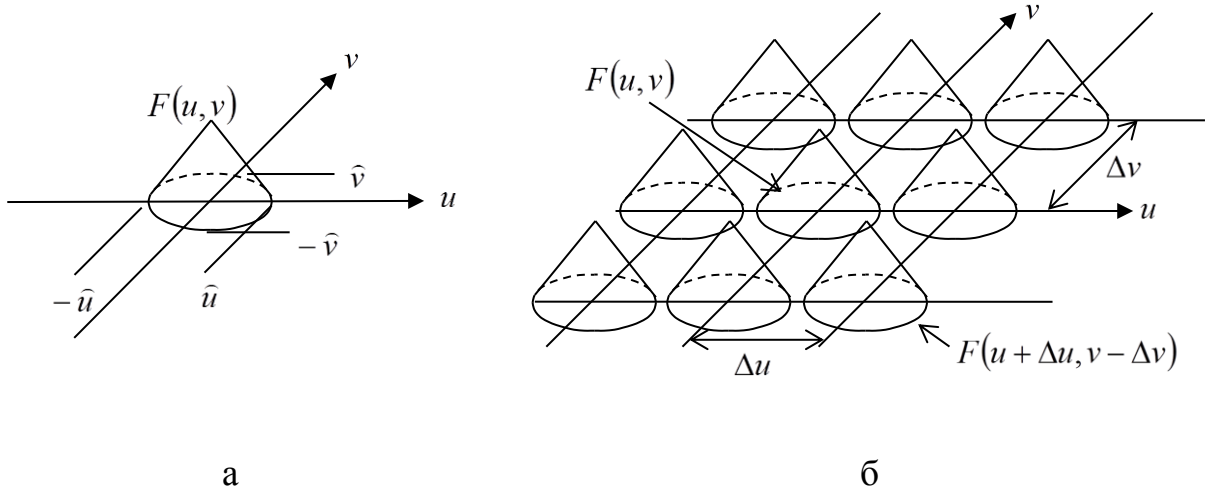


Рис. 14.1. Спектры непрерывного (а) и дискретизованного (б) изображений

Из (14.5) следует, что спектр дискретизованного изображения является результатом суперпозиции спектров непрерывного изображения, прямоугольно периодически повторяющихся с периодами  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  (рис. 14.1). При этом, если спектр непрерывного изображения ограничен частотами  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$ , т.е.

$$F_I(u, v) = 0 \text{ при } (|u| \geq \hat{u}) \cup (|v| \geq \hat{v}), \quad (14.6)$$

и периоды повторения удовлетворяют условию

$$\Delta u > 2\hat{u}, \quad \Delta v > 2\hat{v}, \quad (14.7)$$

то повторяющиеся спектры не перекрываются, и возможно выделение любого из них. В частности, выделив из  $F_D(u, v)$  составляющую  $F_I(u - i\Delta u, v - i\Delta v)$  при  $i=0$ ,  $j=0$  и применив к ней обратное преобразование Фурье, можно восстановить исходное непрерывное изображение. Такое выделение можно выполнить, например, с помощью пространственно-инвариантного фильтра с частотной характеристикой

$$H_R(u, v) = \begin{cases} \Delta x \Delta y, & |u| < u_R, \quad |v| < v_R \\ 0, & \text{если иначе} \end{cases}. \quad (14.8)$$

Действие фильтра описывается соотношением

$$F_R(u, v) = H_R(u, v) F_D(u, v) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} H_R(u, v) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_I(u - j\Delta u, v - i\Delta v). \quad (14.9)$$

Если при этом  $\hat{u} \leq u_R \leq \Delta u/2$  и  $\hat{v} \leq v_R < \Delta v/2$ , то  $F_R(u, v) = F_I(u, v)$ , т.е. выделенный спектр совпадает со спектром исходного непрерывного изображения, поэтому данный фильтр является восстанавливающим фильтром.

Используя свойство (1.15) преобразования Фурье и применив обратное преобразование Фурье к  $F_R(u, v)$ , получим изображение

$$f_R(x, y) = f_D(x, y) * h_R(x, y), \quad (14.10)$$

где

$$h_R(x, y) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_R(u, v) \exp[i(ux + vy)] du dv = \frac{\Delta x \Delta y u_R v_R}{\pi^2} \frac{\sin(u_R x)}{u_R x} \frac{\sin(v_R y)}{v_R y} \quad (14.11)$$

– импульсный отклик восстанавливающего фильтра.

Подстановка в (14.10) представления дискретизованного изображения в форме (14.1) дает

$$\begin{aligned} f_R(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_I(j\Delta x, i\Delta y) \delta(\xi - j\Delta x, \eta - i\Delta y) h_R(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_I(j\Delta x, i\Delta y) h_R(x - j\Delta x, y - i\Delta y). \end{aligned} \quad (14.12)$$

Из (14.12) следует, что импульсный отклик восстанавливающего фильтра является функцией, интерполирующей непрерывное изображение в промежутках между дискретными отсчетами.

Тем самым показано, что дискретизация непрерывного изображения с ограниченным спектром допускает его последующее точное восстановление, если соблюдается условие (14.7). Теорема о восстановлении непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам известна в теории сигналов как теорема Шеннона-Котельникова, а условие (14.7) – как критерий Найквиста.

Использование в приведенных рассуждениях преобразования Фурье позволяет применить полученный результат только к детерминированным

изображениям. Пусть теперь  $f_I(x, y)$  – непрерывное случайное изображение, порожденное стационарным случайным процессом с автокорреляционной функцией  $R_I(\tau_x, \tau_y)$ . Аналогично (14.2) дискретизованное изображение можно представить в виде

$$f_D(x, y) = f_I(x, y)d(x, y) = f_I(x, y) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - j\Delta x, y - i\Delta y).$$

Его автокорреляционная функция есть

$$\begin{aligned} R_D(x_1, x_2; y_1, y_2) &= E\{f_D(x_1, y_1)f_D^*(x_2, y_2)\} = \\ &= E\{f_I(x_1, y_1)f_I^*(x_2, y_2)\}d(x_1, y_1)d(x_2, y_2) = R_I(\tau_x, \tau_y)d(x_1, y_1)d(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$d(x_1, y_1)d(x_2, y_2) = d(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = d(\tau_x, \tau_y).$$

Следовательно, дискретизованный процесс также стационарен и имеет автокорреляционную функцию

$$R_D(\tau_x, \tau_y) = R_I(\tau_x, \tau_y)d(\tau_x, \tau_y),$$

а его спектр мощности имеет вид

$$W_D(u, v) = (2\pi)^{-2} W_I(u, v) * D(u, v) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} W_I(u - j\Delta u, v - i\Delta v). \quad (14.13)$$

Полученное соотношение аналогично (14.5) из чего следует, что если спектр мощности непрерывного случайного стационарного процесса ограничен, а дискретизация выполнена в согласии с критерием Найквиста, то по дискретным отсчетам случайного изображения путем интерполяции, определяемой выражением (14.12), можно построить непрерывное изображение  $f_R(x, y)$ , порожденное тем же случайным процессом. В отличие от детерминированных изображений в этом случае равенство исходного и восстановленного изображений выполняется в среднеквадратическом смысле [1]:

$$E\{f_I(x, y) - f_R(x, y)\}^2 = 0.$$

Для эргодических процессов, усреднение по реализациям эквивалентно усреднению по пространству, из этого следует, что

$$f_I(x, y) - f_R(x, y) = 0.$$

Предположим теперь, что изображение  $f_I(x, y)$  является суммой полезного сигнала  $f(x, y)$  и случайного стационарного шума  $n(x, y)$  с ограниченными спектрами, причем спектр мощности шума шире, чем спектр мощности полезного сигнала. При условии некоррелированности сигнала и шума спектр мощности дискретизованного изображения имеет вид

$$F_D(u, v) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [W_f(u - j\Delta u, v - i\Delta v) + W_n(u - j\Delta u, v - i\Delta v)]. \quad (14.14)$$

Из этого следует, что при недостаточной частоте дискретизации, меньшей, чем двойная верхняя граничная частота шума, происходит подмешивание боковых спектров шума к центральному спектру полезного сигнала, что приводит к дополнительным искажениям в восстановленном изображении.

Реальная система дискретизации имеет два важных отличия от идеальной. Во-первых, изображения в реальных системах всегда имеют ограниченные размеры. Поэтому дискретизирующую функцию представим в виде

$$d_s(x, y) = d(x, y)s(x, y),$$

$$\text{где } s(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| \leq J\Delta x, |y| \leq I\Delta y, \\ 0, & \text{если иначе} \end{cases}.$$

(В этом случае размер изображения равен  $(2J - 1)\Delta x \times (2I - 1)\Delta y$ .)

Во-вторых, отсчет непрерывного изображения берется не в точке с координатами  $j\Delta x, i\Delta y$ , а получается интегрированием изображения по окрестности  $E$  этой точки с некоторой весовой функцией  $p(x, y)$ :

$$f_s(j\Delta x, i\Delta y) = \iint_E f_I(x, y) p(x - j\Delta x, y - i\Delta y) dx dy. \quad (14.15)$$

Вид окрестности и весовой функции определяется свойствами регистрирующего прибора.

Если форма весовой функции не зависит от координат  $j\Delta x, i\Delta y$ , то (14.15) можно представить в виде свертки, положив, что  $p(x, y) = 0$  вне окрестности  $E$ :

$$f_s(j\Delta x, i\Delta y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_I(x, y) p(x - j\Delta x, y - i\Delta y) dx dy = f_I(x, y) * p(-x, -y). \quad (14.16)$$

Т.о., в реальной системе дискретизованное изображение представляется как

$$f_D(x, y) = [f_I(x, y) * p(-x, -y)]d(x, y)s(x, y),$$

а его спектр имеет вид

$$F_D(u, v) = (2\pi)^{-4} \{ [F_I(u, v)P(-u, -v)] * S(u, v) \} * D(u, v). \quad (14.17)$$

Спектр Фурье  $P(u, v)$  функции  $p(x, y)$  обычно является функцией с монотонно убывающей огибающей, что приводит к сужению спектра дискретизируемого изображения. В то же время ограниченность размеров изображения вызывает появление в спектре бесконечных, хотя и убывающих, “хвостов” (первая свертка в (14.17)). Действие дискретизации по-прежнему выражается в наложении бесконечного числа сдвинутых спектров (вторая свертка), которые из-за наличия в “хвостов” обязательно будут перекрываться. При восстановлении непрерывного изображения первое обстоятельство приводит к “размытию” изображения, а второе — к появлению паразитных колебаний, в основном проявляющихся на краях изображений.

Операция квантования сводится к разбиению диапазона возможных значений сигнала на конечное число интервалов, внутри каждого из которых сигналу присваивается одно и то же значение. Здесь мы рассмотрим влияние квантования на точность представления сигнала. Пусть  $f$  — сигнал, значения которого могут изменяться в непрерывном интервале  $(a_L, a_H)$ . Разобьем этот интервал с помощью  $J$  непересекающихся интервалов, полностью его покрывающих. Обозначим через  $d_j$ ,  $j = \overline{0, J}$ , пороговые уровни, соответствующие границам интервалов и положим  $d_0 = a_L$ ,  $d_J = a_H$ . Сравнивая исходный сигнал  $f$  с набором пороговых уровней, квантованный сигнал  $\hat{f}$  определим как

$$\hat{f} = r_j, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad \text{если } d_j \leq f < d_{j+1},$$

где  $r_j$  — уровни квантования (естественно считать, что  $d_j \leq r_j < d_{j+1}$ ).

Чтобы сказать что-либо определенное об ошибке квантования, необходимы дополнительные сведения о поведении  $f$ . Будем считать, что  $f$  непрерывная случайная величина, распределенная с плотностью вероятности  $p(f)$ . В качестве меры ошибки используем среднеквадратичную ошибку  $\varepsilon$ , определенную как

$$\varepsilon = E\{(f - \hat{f})^2\} = \int_{a_L}^{a_H} p(f)(f - \hat{f})^2 df = \sum_{j=0}^{J-1} \int_{d_j}^{d_{j+1}} p(f)(f - r_j)^2 df.$$



Если количество интервалов квантования велико, а  $p(f)$  – достаточно гладкая функция, то внутри  $j$ -го интервала квантования можно считать, что  $p(f) = p(r_j)$ . Тогда

$$\varepsilon = \sum_{j=0}^{J-1} p(r_j) \int_{d_j}^{d_{j+1}} (f - r_j)^2 df = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{J-1} p(r_j) [(d_{j+1} - r_j)^3 - (d_j - r_j)^3]. \quad (14.18)$$

Когда пороги квантования заданы, из (14.18) нетрудно получить уровни квантования, минимизирующие ошибку. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_k} = 0, \quad 0 \leq k < J-1. \quad (14.19)$$

Решение этой системы имеет вид

$$r_k = (d_{k+1} + d_k)/2, \quad (14.20)$$

т.е. оптимальные уровни квантования лежат посередине между порогами. В этом случае

$$\varepsilon = \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{J-1} p(r_j) (d_{j+1} - d_j)^3. \quad (14.21)$$

Обычно (из-за простоты реализации квантователя) пороги квантования выбираются равноотстоящими, т.е.

$$\Delta d = d_{j+1} - d_j = \frac{a_H - a_L}{J}.$$

Учитывая, что  $\sum_{j=0}^{J-1} p(r_j) \Delta d \approx \int_{a_L}^{a_H} p(f) df = 1$ ,

из (14.12) в этом случае получим

$$\varepsilon = \frac{(\Delta d)^2}{12}. \quad (14.22)$$

Естественным способом представления дискретного изображения является его представление в виде двумерного массива отсчетов в прямоугольной области

$$f_{i,j}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (14.23)$$

который иногда интерпретируется как матрица  $\mathbf{F} = [f_{i,j}]$ .

При анализе дискретных изображений их иногда удобно представлять в векторном виде, “вытягивая” столбцы или строки массива (14.23) в один длинный вектор. Переход от матричного представления изображения к векторному можно осуществить с помощью матрично-векторного преобразования

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^J \mathbf{N}_j \mathbf{F} \mathbf{v}_j, \quad (14.24)$$

$$\text{где } \mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ j-1 \\ j \\ j+1 \\ \vdots \\ J \end{matrix}, \quad \mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ j-1 \\ j \\ j+1 \\ \vdots \\ J \end{matrix}, \quad \mathbf{0} - \text{матрица размера } I \times I \text{ с нулевыми}$$

элементами, а  $\mathbf{I}$  - единичная матрица того же размера.

Этим преобразованием вектор  $\mathbf{F} \mathbf{v}_j$ , являющийся  $j$ -м столбцом матрицы  $\mathbf{F}$ , помещается в позиции с  $I(j-1)+1$  по  $Ij$  вектора  $\mathbf{f}$ .

С помощью аналогичной процедуры вектор  $\mathbf{f}$  преобразуется в матрицу  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^J \mathbf{N}_{j_j}^T \mathbf{f} \mathbf{v}_{j_j}^T. \quad (14.25)$$

Дискретное двумерное преобразование Фурье двумерного массива  $f_{j,k}$ ,  $j = \overline{0, J-1}$ ,  $k = \overline{0, K-1}$  определяется в виде ряда

$$F_{u,v} = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{K-1} f_{j,k} \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{ju}{J} + \frac{kv}{K} \right) \right], \quad (14.26)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ .

$F_{u,v}$  называется дискретным спектром Фурье массива  $f_{j,k}$ .

Обратное преобразование имеет вид

$$f_{j,k} = \frac{1}{JK} \sum_{u=0}^{J-1} \sum_{v=0}^{K-1} F_{u,v} \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{ju}{J} + \frac{kv}{K} \right) \right]. \quad (14.27)$$

Дискретный спектр Фурье периодичен, т.е.

$$F_{u+mJ, v+nK} = F_{u,v}$$

для любых целых значений  $m$  и  $n$ .

Во-вторых, он обладает комплексно-сопряженной симметрией:

$$F_{u,v} = F_{-u+mJ, -v+nK}^*$$

Подставляя в (14.5) вместо  $(j, k)$   $(j+mJ, k+nK)$  и учитывая, что для любых целых  $m$  и  $n$   $\exp(2\pi i m u) = \exp(2\pi i n v) = 1$ ,

получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{j+mJ, k+nK} &= \frac{1}{JK} \sum_{u=0}^{J-1} \sum_{v=0}^{K-1} F_{u,v} \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{(j+mJ)u}{J} + \frac{(k+nK)v}{K} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{JK} \sum_{u=0}^{J-1} \sum_{v=0}^{K-1} F_{u,v} \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{ju}{J} + \frac{kv}{K} \right) \right] = f_{j,k} \end{aligned}$$

т.е. дискретным спектром Фурье в действительности представляется периодически продолженное изображение  $\tilde{f}_{j,k}$ ,  $-\infty < j < \infty$ ,  $-\infty < k < \infty$ , подчиняющееся соотношению

$$\tilde{f}_{j+mJ, k+nK} = \tilde{f}_{j,k}. \quad (14.28)$$

Определим результат воздействия линейной системы на изображение  $f_{j,k}$  как изображение  $g_{s,t}$ ,  $s = \overline{0, J-1}$ ,  $t = \overline{0, K-1}$ :

$$g_{s,t} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} f_{j,k} h_{s,t,j,k}, \quad (14.29)$$

где  $h_{s,t,j,k}$  - дискретный импульсный отклик системы. Если система является пространственно-инвариантной, ее воздействие на изображение выражается дискретной сверткой

$$g_{s,t} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} f_{j,k} h_{s-j, t-k} \quad (14.8)$$

Следует заметить, что дискретное преобразование (14.29) не может быть строго пространственно инвариантным, поскольку при вычислении близких к границам значений  $g$  в сумму (14.29) включаются не все возможные значения  $h$ . Рис. 14.1 иллюстрирует возникновение граничных эффектов при вычислении

дискретной свертки. Заштрихованы области, по которым выполняется суммирование при вычислении различных значений  $g(s,t)$ .

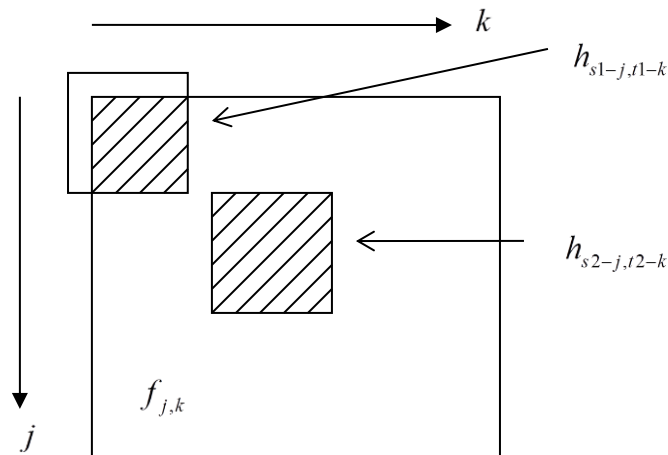
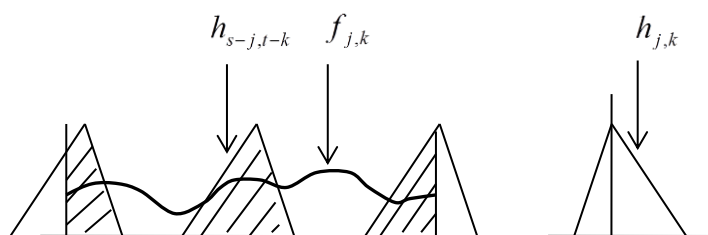


Рис. 14.2. Граничные эффекты при вычислении дискретной свертки

Построим продолженные периодически с периодами  $J$  и  $K$  исходное изображение  $\tilde{f}_{j,k}$  и  $\tilde{h}_{j,k}$ . Тогда изображение

$$\tilde{g}_{s,t} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} \tilde{f}_{j,k} \tilde{h}_{s-j, t-k} \quad (14.30)$$

тоже будет периодическим, хотя и не будет точным периодическим продолжением  $g_{s,t}$ . Выражением (14.30) представляется циклическая свертка. На рис. 14.2 схематично изображено отличие обычной и циклической свертки в одномерном случае.



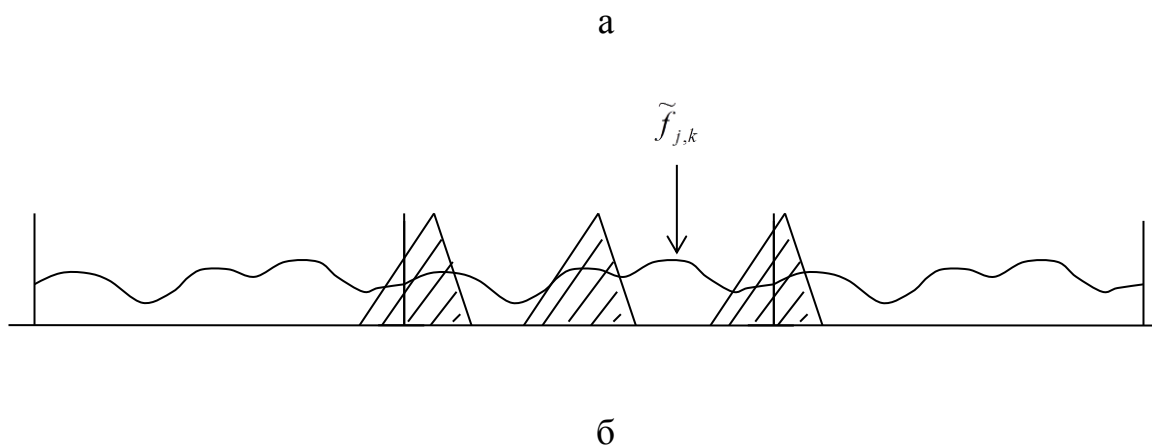


Рис. 14.3. Обычная (а) и циклическая свертки. Заштрихованы области, внутри которых выполняется суммирование

Воспользовавшись периодичностью дискретного спектра Фурье нетрудно показать, что спектры периодически продолженных исходного изображения, импульсного отклика и результата их циклической свертки связаны соотношением

$$\tilde{G}_{u,v} = \tilde{F}_{u,v} \tilde{H}_{u,v}. \quad (14.31)$$

Рассматривая дискретное изображение  $f$  как реализацию некоторого множества случайных величин, его можно полностью определить  $N$ -мерной ( $N = J \times K$ ) функцией распределения вероятностей

$$p(f_1, \dots, f_N; j_1, k_1, \dots, j_N, k_N).$$

Как и в случае непрерывных изображений, получение многомерных функций распределения для дискретных изображений является практически неразрешимой задачей, поэтому при статистическом анализе обычно используются одномерные либо двумерные функции распределения.

Если отсчеты дискретного изображения представляются конечным набором значений (квантованное изображение), соответствующие ему функции распределения вероятностей дискретны. На практике наиболее широко используется оценка одномерной функции распределения вероятностей (одномерная гистограмма), которая имеет вид

$$\hat{p}_f(m) = \frac{n_m}{N}, \quad m = \overline{1, M} \quad (14.32)$$

где  $M$  - количество возможных значений, которые могут принимать отсчеты изображения,  $n_m$  - количество отсчетов изображения, принимающих значение  $m$ . Поскольку  $N$  - полное количество отсчетов изображения, то  $\sum_{m=1}^M n_m = N$  и

$$\sum_{m=1}^M \hat{p}_f(m) = 1.$$

Так же как и для непрерывных изображений, для описания случайных дискретных изображений определяются статистические моменты.

Среднее значение дискретного изображения, представленного в виде матрицы  $\mathbf{F}$ , представляет собой матрицу средних значений элементов матрицы  $\mathbf{F}$ .

$$m_{\mathbf{F}}(i, j) = E\{\mathbf{F}\} = [E\{f_{i,j}\}]. \quad (14.33)$$

Корреляция двух элементов изображения с координатами  $i_1, j_1$  и  $i_2, j_2$  определяется как

$$R_{\mathbf{F}}(i_1, j_1; i_2, j_2) = E\{f_{i_1, j_1} f_{i_2, j_2}\}, \quad (14.34)$$

ковариация – как

$$K_{\mathbf{F}}(i_1, j_1; i_2, j_2) = E\{[f_{i_1, j_1} - m_{\mathbf{F}}(i_1, j_1)][f_{i_2, j_2} - m_{\mathbf{F}}(i_2, j_2)]\}, \quad (14.35)$$

а дисперсия элемента изображения по определению есть

$$\sigma_{\mathbf{F}}^2(i, j) = E\{[f_{i,j} - m_{\mathbf{F}}(i, j)]^2\} = K_{\mathbf{F}}(i, j; i, j). \quad (14.36)$$

Аналогичным образом определяется кросс-корреляция и кросс-ковариация двух элементов, принадлежащих двум разным изображениям  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ :

$$R_{\mathbf{FG}}(i_1, j_1; i_2, j_2) = E\{f_{i_1, j_1} g_{i_2, j_2}\} \quad (14.37)$$

и

$$K_{\mathbf{FG}}(i_1, j_1; i_2, j_2) = E\{[f_{i_1, j_1} - m_{\mathbf{F}}(i_1, j_1)][g_{i_2, j_2} - m_{\mathbf{G}}(i_2, j_2)]\}. \quad (14.38)$$

В математической статистике случайным векторам сопоставляются векторы средних значений, корреляционные и ковариационные матрицы. Поэтому для изображения, представленного в векторном виде посредством преобразования (14.2), можно ввести вектор средних значений

$$\mathbf{m}_{\mathbf{f}} = E\{\mathbf{f}\} = \sum_{j=1}^J \mathbf{N}_j E\{\mathbf{F}\} \mathbf{v}_j \quad (14.39)$$

и корреляционную матрицу

$$\mathbf{R}_f = E\{\mathbf{f}\mathbf{f}^T\} = E\left\{\sum_{j=1}^J \mathbf{N}_j \mathbf{F} \mathbf{v}_j \sum_{k=1}^J \mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T \mathbf{N}_k^T\right\} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \mathbf{N}_j E\{\mathbf{F} \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T\} \mathbf{N}_k^T = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \mathbf{N}_j \mathbf{R}_{jk} \mathbf{N}_k^T.$$

Размер корреляционной матрицы равен  $IJ \times IJ$ .

Матрица  $\mathbf{R}_{jk} = E\{\mathbf{F} \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T\}$  представляет собой корреляционную матрицу  $j$ -го и  $k$ -го столбцов изображения  $\mathbf{F}$  и имеет размер  $I \times I$ . Следовательно, корреляционную матрицу изображения можно представить в виде  $J \times J$  блоков

$$\mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \dots & \mathbf{R}_{1J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{J1} & \dots & \mathbf{R}_{JJ} \end{bmatrix}. \quad (14.40)$$

Ковариационная матрица изображения, представленного в виде вектора, связана с корреляционной матрицей и вектором средних значений как

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{R}_f - \mathbf{m}_f \mathbf{m}_f^T. \quad (14.41)$$

Вектор дисперсий  $\sigma_f^2$ , состоящий из дисперсий элементов вектора  $\mathbf{f}$ , построен из диагональных элементов матрицы  $\mathbf{K}_f$ :

$$\sigma_f^2 = (\text{diag}(\mathbf{K}_{11}, \dots, \text{diag}(\mathbf{K}_{JJ}))^T. \quad (14.42)$$

Для нас особый интерес будут представлять изображения, стационарные в широком смысле. Для них среднее значение и дисперсия не зависят от координат, т.е.

$$m_F(i, j) = m_F, \quad (14.43)$$

$$\sigma_F^2(i, j) = \sigma_F^2, \quad (14.44)$$

а корреляционная и ковариационная функции зависят только от разностей  $i_2 - i_1$ ,  $j_2 - j_1$ :

$$R_F(i_1, j_1; i_2, j_2) = R_F(i_2 - i_1, j_2 - j_1) = R_F(i, j), \quad (14.45)$$

$$K_F(i_1, j_1; i_2, j_2) = K_F(i_2 - i_1, j_2 - j_1) = K_F(i, j). \quad (14.46)$$

Соответственно, для изображения, представленного в векторном виде,

$$\mathbf{m}_f = m_F \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\} IJ, \quad (14.47)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f^2 = \sigma_f^2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\} IJ, \quad (14.48)$$

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 & \dots & \mathbf{K}_J \\ \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \dots & \mathbf{K}_{J-1} \\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_1 & \dots & \mathbf{K}_{J-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_J & \mathbf{K}_{J-1} & \mathbf{K}_{J-2} & \dots & \mathbf{K}_1 \end{bmatrix}, \quad (14.49)$$

где  $\mathbf{K}_k = \mathbf{K}_{ij}$ ,  $k = |i - j| + 1$ .

Заметим, что такое представление моментов стационарного изображения очень избыточно, однако эта избыточность окупается возможностью использования привычного аппарата линейной алгебры.



**ТЕМА №15.** Повышение качества изображения. Линейная фильтрация изображений. Совмещение изображений и линейный прогноз. Математическая морфология и обработка изображений.

Пусть исходное изображение задано двумерным массивом  $x_{ij}$ , где  $i$  - номер строки,  $j$  - номер столбца. В общем виде поэлементное преобразование определяется как

$$y_{ij} = f_{ij}(x_{ij}). \quad (15.1)$$

Здесь  $f_{ij}(\cdot)$  - некоторая однозначная функциональная зависимость выходного изображения от входного. Подстрочные индексы у  $f$  указывают на то, что вид преобразования может изменяться при изменении координат. Такое преобразование называется пространственно-неоднородным, в отличие от пространственно-однородного, где ко всем элементам массива применяется одна и та же функция

$$y = f(x). \quad (15.1a)$$

Заметим, что если входное и выходное изображения квантованы, функция  $f$  включает в себя округление до ближайшего уровня квантования. Простейшим видом поэлементного однородного преобразования является линейное контрастирование, которое имеет вид

$$y = ax + b. \quad (15.2)$$

Обычно такое преобразование применяется при отображении изображения на экране дисплея или твердой копии, когда динамический диапазон сигнала не совпадает с динамическим диапазоном устройства отображения. Для согласования динамического диапазона входного изображения, заданного значениями  $x_{\min}, x_{\max}$ , с динамическим диапазоном выходного,  $y_{\min}, y_{\max}$ , применяется преобразование

$$y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}(x - x_{\min}) + y_{\min}. \quad (15.3)$$

На рис. 15.1. приведен пример линейного контрастирования.



а



б

Рис. 15.1. Линейное контрастирование изображений: а – исходное изображение, б – изображение, подвергнутое преобразованию (15.2)

Одним из примеров нелинейных преобразований служит так называемая соляризация, используемая для улучшения “выразительности” изображений. Соляризация описывается соотношением

$$y = k(x - x_{\min})(x_{\max} - x). \quad (15.4)$$

При соляризации яркие участки изображения становятся темными, а наиболее яркими становятся участки, имевшие значения в середине диапазона. Пример соляризации приведен на рис. 15.2.



а



б

Рис. 15.2. Соляризация изображений: а – исходное изображение, б – изображение, подвергнутое преобразованию (15.4)

Другое нелинейное преобразование, эквализация гистограммы, приводит изображение с произвольным распределением яркости в изображение с распределением, близким к равномерному. Каким образом можно построить функцию  $f$ , осуществляющую подобное преобразование? Рассмотрим сначала преобразование некантованных изображений. Будем рассматривать изображения  $x$  и  $y = f(x)$  как совокупности случайных величин, которые подчиняются распределениям с плотностью вероятности  $p_x(x)$  и  $p_y(y)$  соответственно. Из определения функции распределения вероятностей следует, что

$$\int_{-\infty}^{x'} p_x(x) dx = \Pr\{x \leq x'\} = \Pr\{y \leq f(x')\} = \int_{-\infty}^{f(x')} p_y(y) dy.$$

Дифференцируя левый и правый интегралы по параметру  $x'$ , получим

$$p_x(x') = p_y(y = f(x')) \frac{df(x)}{dx}. \quad (15.5)$$

Определим теперь  $f$  как

$$y = f(x) = \int_{-\infty}^x p_x(t) dt. \quad (15.6)$$

Из (15.6), во-первых, следует что  $0 \leq y \leq 1$ , а во-вторых, что  $\frac{df(x)}{dx} = p_x(x)$ .

Следовательно,

$$p_y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{если иначе} \end{cases},$$

т.е. преобразованное изображение равномерно распределено в диапазоне  $[0, 1]$ .

Пусть теперь значения изображения  $x$  представляются  $K$  квантами со значениями  $x_k$ ,  $0 \leq k \leq K-1$ . Гистограмма этого изображения есть по определению

$$H_x(k) = \frac{n_k}{N},$$

где  $n_k$  - количество отсчетов изображения, имеющих значение  $x_k$ , а  $N$  - полное количество отсчетов изображения.

Определим преобразование эквализации как

$$y_m = f(x_k) = m, \quad m = \overline{0, M-1}, \quad \text{если } m < \left\lceil M \sum_{i=0}^k H_k(i) \right\rceil \leq m+1, \quad (15.7)$$

где  $M \leq K$  - количество квантов в выходном изображении, а символом  $\lceil \cdot \rceil$  обозначена операция получения целой части числа. На рис. 15.3 показаны исходное и преобразованное посредством (15.7) изображения. Для согласования с динамическим диапазоном принтера выходное изображение подвергнуто 4-кратному линейному усилению. Хорошо видно, что выравнивание гистограммы позволяет сделать различимыми темные детали исходного изображения.

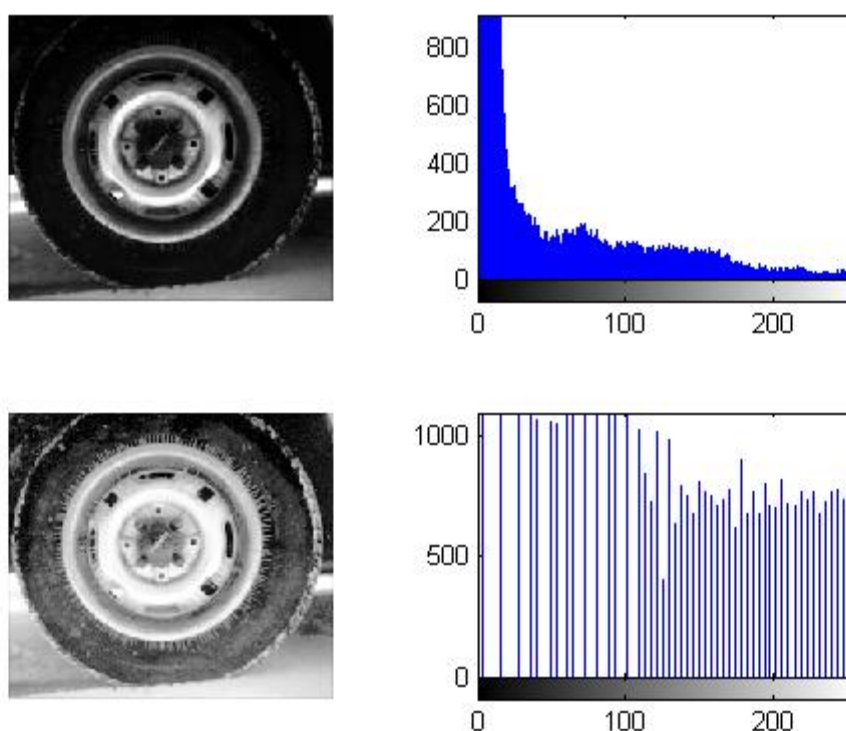


Рис. 15.3. В левой колонке сверху – исходное изображение, внизу – эквализованное. В правой колонке – гистограммы. Количество уровней квантования  $K = 256$ ,  $M = 64$ .

Довольно часто употребляемым нелинейным преобразованием является бинаризация, описываемая функцией

$$y = f(x) = \begin{cases} y_{\max}, & x \geq x_0 \\ y_{\min}, & x < x_0 \end{cases}, \quad (15.8)$$

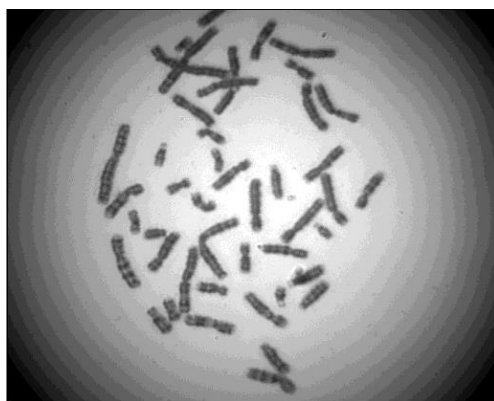
где  $x_0$  - пороговое значение, определяемое контекстом исходного изображения.

Это преобразование используется, например, для препарирования изображений, содержащих объекты, яркость которых резко отличается от яркости фона, если интерес представляют только размеры или форма объектов.

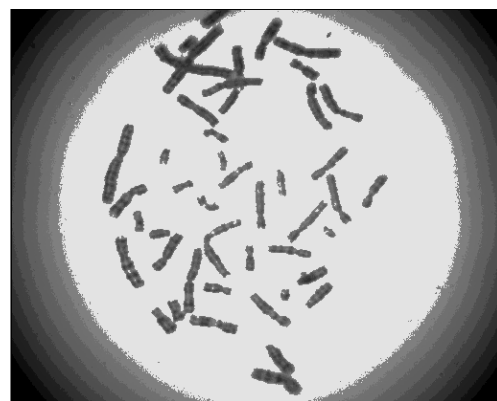
На рис. 15.4 показано действие преобразования, представляющего собой комбинацию линейного и порогового

$$y = f(x) = \begin{cases} y_{\max}, & x \geq x_0 \\ \frac{y_{\max}}{x_0} x, & x < x_0 \end{cases} \quad (15.9)$$

Такое преобразование делает постоянной яркость фоновой части изображения, линейно контрастируя объекты.



а



б

Рис. 15.15. Комбинация линейного и порогового преобразований: а – исходное изображение хромосом в поле зрения микроскопа, б – изображение, подвергнутое преобразованию (6)

Приведенное на рис. 15.4а изображение получено в микроскопе с сильным виньетированием, которое проявляется в падении освещенности по мере удаления от центра поля. Поэтому при фиксированном пороге  $x_0$  в препарированном изображении 4б сохраняется часть фона, а объекты в центре поля начинают “разрушаться”. Устранить этот недостаток можно, если известен характер виньетирования. В данном случае формирование изображения в микроскопе достаточно хорошо описывается преобразованием

$$y_{ij} = t_{ij} k_{ij},$$

где  $t_{ij}$  - коэффициент пропускания препарата хромосом, а  $k_{ij}$  - функция, описывающая виньетирование. Убрав из микроскопа препарат, можно получить изображение  $k_{ij}$ .

После этого с помощью пространственно-неоднородного преобразования

$$\hat{t}_{ij} = y_{ij} / k_{ij} \quad (15.10)$$

получается “чистое” изображение препарата хромосом, которое далее можно подвергнуть преобразованию вида (15.9). Действие преобразования (15.10) иллюстрируется рисунком 15.5.

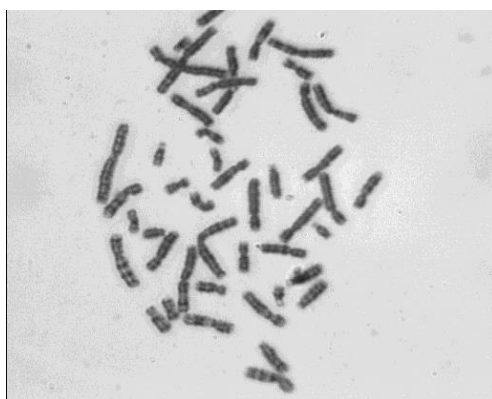


Рис. 15.5. Пространственно-неоднородная коррекция виньетирования

Пространственные преобразования являются наиболее распространенными преобразованиями изображений и используются для достижения самых различных целей. Более подробный анализ пространственных преобразований, основанный на использовании строгих критериев, будет дан в последующих лекциях, здесь же мы рассмотрим лишь достаточно простые преобразования, приводящие к интуитивно понятному результату.

Довольно часто в изображениях присутствует шум, значения которого могут резко изменяться в соседних элементах изображения. В то же время соседние значения полезной составляющей реального изображения обычно изменяются значительно медленнее. Это позволяет использовать пространственное усреднение соседних элементов изображения для ослабления влияния шума. Такое усреднение может быть выполнено посредством вычисления скользящего среднего значения

$$y_{ij} = \frac{1}{9} \sum_{l=-1}^1 \sum_{k=-1}^1 x_{i+k, j+l} . \quad (15.11)$$

Если значения шума в соседних элементах изображения не коррелированы, преобразование (15.11) позволяет уменьшить дисперсию шума в 9 раз. Увеличение размеров окрестности (параметров  $k$  и  $l$ ) приводит к еще большему снижению уровня шума, но при этом начинают существенно искажаться (сглаживаться) мелкие детали изображения. Модификацией преобразования (15.11) является вычисление взвешенного среднего значения

$$y_{ij} = \frac{1}{A} \sum_{l=-L}^L \sum_{k=-K}^K h(k, l) x_{i+k, j+l} , \quad A = \sum_{l=-L}^L \sum_{k=-K}^K h(k, l) , \quad (15.12)$$

где весовые коэффициенты  $h(k, l)$  уменьшаются с удалением от центра окрестности. Такое преобразование оказывает меньшее сглаживающее влияние на полезную компоненту изображения.

Импульсные помехи в изображении с гладкой полезной составляющей можно ослабить с помощью преобразования

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ij} , & \left| x_{ij} - \frac{1}{N-1} \sum_{k, l \neq 0} x_{i+k, j+l} \right| < \varepsilon \\ \frac{1}{N-1} \sum_{k, l \neq 0} x_{i+k, j+l} , & \text{если иначе} \end{cases} , \quad (15.13)$$

где  $N = (2L+1)(2K+1)$  - количество элементов окрестности, а пороговое значение  $\varepsilon$  выбирается в зависимости от уровня шума. Это преобразование сохраняет значения отсчетов изображения, если они не сильно отличаются от значений окрестности, и заменяет их на среднее значение по окрестности в случае появления резких отличий.

Другое применение пространственных преобразований заключается в подчеркивании резких перепадов яркости, которые обычно соответствуют границам отдельных объектов. Например, преобразования с весовыми коэффициентами

$$h(k, l) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } h(k, l) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad (15.14)$$

являясь аналогами непрерывных операторов дифференцирования в горизонтальном и вертикальном направлениях, выделяют горизонтальные и

вертикальные перепады яркости, причем в зависимости от знака перепада зависит знак преобразованного изображения. Независимое от знака перепада преобразование можно выполнить с помощью весовых коэффициентов

$$h(k,l) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15.15)$$

Сохраняя среднюю яркость, преобразование делает перепады зрительно более четкими. Рис. 15.6 демонстрирует действие преобразования (15.15) на дефокусированное изображение.



Рис. 15.6. Подчеркивание перепадов яркости: а – исходное изображение, б – изображение, подвергнутое преобразованию (15.15)

В приведенном примере хорошо видно, что выходное изображение зашумлено значительно сильнее, чем исходное. Это связано с тем, что дифференциальные преобразования, приводят к усилению высокочастотных шумов, уровень которых в исходном изображении, как правило, значительно выше уровня высокочастотной полезной составляющей. Преобразования, оптимальным образом учитывающие статистические свойства изображений, будут рассмотрены далее.

В результате несовершенства формирующей изображение системы возникают искажения, которые проявляются в потере четкости и появлении



случайных шумов. Зная характеристики системы, посредством фильтрации можно ослабить эти искажения. Рассмотрим линейную пространственно-инвариантную систему с импульсным откликом  $h(x, y)$ , воздействующую на входное изображение  $f(x, y)$ . Выходное изображение  $g(x, y)$  представляет собой свертку входного изображения с импульсным откликом системы, искаженную аддитивным шумом  $n(x, y)$  с нулевым средним значением (рис. 15.7). Дискретный аналог этой системы представляется соотношением

$$g_{s,t} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} f_{j,k} h_{s-j,t-k} + n_{s,t}, \quad (15.16)$$

где  $K$  и  $J$  - размеры исходного изображения по горизонтали и вертикали соответственно.

Рассмотрим сначала идеальный случай непрерывных изображений бесконечного размера.

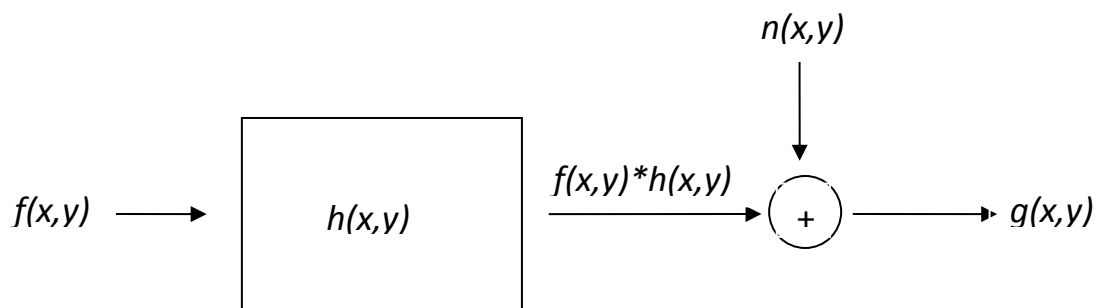


Рис. 15.7. Схема формирования изображения линейной пространственно-инвариантной системой с аддитивным шумом

Попытаемся построить линейную пространственно-инвариантную систему с импульсным откликом  $r(x, y)$ , действуя которой на изображение  $g(x, y)$  можно получить изображение  $\hat{f}(x, y)$ , “максимально похожее” на исходное изображение  $f(x, y)$ . Термин “максимально похожее” является весьма неопределенным. Одним из широко распространенных критериев оптимальности качества обработки сигналов является критерий минимума среднего квадрата ошибок. Будем рассматривать исходное изображение  $f(x, y)$  и результаты его преобразований как действительные стационарные случайные сигналы, подразумевая, что для описания изображений можно использовать

статистические характеристики, в частности, первые и вторые моменты. Для простоты будем считать, что изображения имеют нулевые средние значения (если это не так, вычтем сначала из изображений их средние значения).

В этом случае средний квадрат ошибок можно представить в виде

$$J = E\left\{\left[\hat{f}(x, y) - f(x, y)\right]^2\right\}, \quad (15.17)$$

где символом  $E\{\cdot\}$  обозначена операция вычисления среднего значения.

Подставив в (5.2)  $\hat{f}(x, y)$ , выраженное через  $g(x, y)$  и  $r(x, y)$ , получим

$$J = E\left\{\left[f(x, y) - g(x, y) * r(x, y)\right]^2\right\}. \quad (15.18)$$

Задача построения восстанавливающей системы состоит в поиске импульсного отклика  $r(x, y)$ , минимизирующего средний квадрат ошибки  $J$ .

Вычислим отдельно компоненты ошибки:

$$\begin{aligned} E\{f^2(x, y)\} &= \sigma_f^2, \\ 2E\{f(x, y)[g(x, y) * r(x, y)]\} &= 2E\left\{f(x, y) \iint g(x-s, y-t)r(s, t)dsdt\right\} = \\ &= 2 \iint E\{f(x, y)g(x-s, y-t)\}r(s, t)dsdt = \\ &= 2 \iint K_{gf}(s, t)r(s, t)dsdt \\ E\{[g(x, y) * r(x, y)]^2\} &= \\ &= E\left\{\iint g(x-s_1, y-t_1)r(s_1, t_1)ds_1dt_1 \times \iint g(x-s_2, y-t_2)r(s_2, t_2)ds_2dt_2\right\} = \\ &= \iint \iint E\{g(x-s_1, y-t_1)g(x-s_2, y-t_2)\}r(s_1, t_1)r(s_2, t_2)ds_1dt_1ds_2dt_2 = \\ &= \iint \iint K_g(s_2-s_1, t_2-t_1)r(s_1, t_1)r(s_2, t_2)ds_1dt_1ds_2dt_2 \end{aligned}$$

Здесь все интегралы берутся в бесконечных пределах,  $K_{gf}$  - кросс-ковариационная функция изображений  $g$  и  $f$ ,  $K_g$  - автоковариационная функция изображения  $g$ .

Теперь можно записать средний квадрат ошибки в виде

$$J = \sigma_f^2 - 2 \iint K_{gf}(s, t)r(s, t)dsdt + \iint \iint K_g(s_2-s_1, t_2-t_1)r(s_1, t_1)r(s_2, t_2)ds_1dt_1ds_2dt_2. \quad (15.9)$$

Поиск импульсного отклика  $r(x, y)$ , минимизирующего  $J$ , можно осуществить, руководствуясь следующими соображениями. Допустим, что  $r(x, y)$  обеспечивает минимальное значение  $J$ , и  $\delta r(x, y)$  - произвольная

функция. Тогда независимо от выбора  $\delta r(x, y)$  использование в (15.19) вместо  $r(x, y)$  импульсного отклика  $r(x, y) + \varepsilon \delta r(x, y)$ , где  $\varepsilon$  - некоторая скалярная величина, приведет к увеличению  $J$ , скажем, до значения  $J + \delta J$ . Если при  $r(x, y)$  действительно достигается минимум ошибки, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (J + \delta J) = 0.$$

Подставляя в (5.4)  $r(x, y) + \varepsilon \delta r(x, y)$  вместо  $r(x, y)$  и дифференцируя получившееся выражение по  $\varepsilon$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (J + \delta J) = & -2 \iint K_{gf}(s, t) \delta r(s, t) ds dt + \\ & \iint \iint K_g(s_2 - s_1, t_2 - t_1) [r(s_1, t_1) \delta r(s_2, t_2) + \delta r(s_1, t_1) r(s_2, t_2) + 2\varepsilon \delta r(s_1, t_1) \delta r(s_2, t_2)] ds_1 dt_1 ds_2 dt_2 \end{aligned}$$

Вычисляя предел по  $\varepsilon$  и приравнявая его нулю, получим уравнение

$$\iint [-K_{gf}(s, t) + \iint K_g(s - s_1, t_2 - t_1) r(s_1, t_1) ds_1 dt_1] \delta r(s, t) ds dt,$$

которое должно удовлетворяться при любой функции  $\delta r(x, y)$ . Это условие выполняется, если

$$\iint K_g(s - s_1, t_2 - t_1) r(s_1, t_1) ds_1 dt_1 = K_{gf}(s, t). \quad (15.20)$$

Полученное интегральное уравнение позволяет найти импульсный отклик системы, восстанавливающей исходное изображение с минимальной среднеквадратичной ошибкой при условии, что известны ковариационная функция искаженного изображения и кросс-ковариационная функция исходного и искаженного изображения. Это уравнение проще всего решить, используя энергетические спектры. Пусть  $W_g(u, v)$  - спектр мощности случайного процесса, порождающего изображение  $g$ , а  $W_{gf}(u, v)$  - кросс-спектр мощности процессов  $g$  и  $f$ .

Учитывая, что левая часть уравнения (5.5) представляет собой свертку, и выполнив преобразование Фурье обеих частей уравнения, получим простое соотношение

$$W_g(u, v) R(u, v) = W_{gf}(u, v),$$

где  $R(u, v)$  - частотная характеристика восстанавливающей системы. Следовательно, при известных авто- и кросс-ковариационной функциях,

однозначно определяющих соответствующие спектры мощности, можно вычислить частотную характеристику

$$R(u, v) = \frac{W_{gf}(u, v)}{W_g(u, v)}, \quad (15.21)$$

а следовательно, и импульсный отклик восстанавливающей системы. Система с частотной характеристикой (15.19) известна как фильтр Винера.

Заметим, что до сих пор свойства шума и связь изображений  $f$  и  $g$  через импульсный отклик искажающей системы нигде не использовались. Нетрудно показать, что при аддитивном шуме, некоррелированном с исходным изображением  $f$ , ковариационная функция  $K_g$  связана с ковариационными функциями исходного изображения  $K_f$  и шума  $K_n$  соотношением

$$K_g(s, t) = K_f(s, t) * h(s, t) * h(-s, -t) + K_n(s, t),$$

а кросс-ковариационная функция  $K_{gf}$  - соотношением

$$K_{gf}(u, v) = K_f(s, t) * h(-s, -t).$$

(Здесь  $K_n$  - ковариационная функция шума).

Соответствующие спектры мощности связаны как

$$W_g(u, v) = W_f(u, v) |H(u, v)|^2 + W_n,$$

$$W_{fg}(u, v) = W_f(u, v) H^*(u, v).$$

В этом случае оптимальная частотная характеристика восстанавливающей системы, минимизирующей средний квадрат ошибки восстановления, может быть представлена в виде

$$R(u, v) = \frac{W_f(u, v) H^*(u, v)}{W_f(u, v) |H(u, v)|^2 + W_n(u, v)} \quad (15.22)$$

или

$$R(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \frac{W_n(u, v)}{W_f(u, v)}}. \quad (15.22a)$$

Часто под фильтром Винера подразумевают систему, обладающую именно частотной характеристикой (15.22).

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если шум в регистрирующей системе отсутствует, то  $W_n(u, v) = 0$  и (5.7) приводится к очень простому виду

$$R(u, v) = \frac{1}{H(u, v)}. \quad (15.23)$$

Фильтр такого типа называется инверсным. Для применения инверсного фильтра не требуется знания спектров мощности исходного изображения и шума. Существенный его недостаток состоит в бесконечном усилении гармоник, где  $H(u, v) = 0$ . На практике это означает, что любое возмущение во входном изображении, отличающее его от  $f(x, y) * h(x, y)$ , приводит к неустойчивости изображения, восстановленного инверсным фильтром, тогда как наличие в знаменателе фильтра Винера члена  $W_n(u, v)/W_f(u, v)$  стабилизирует восстановленное изображение. Если спектры мощности исходного изображения и шума неизвестны, отношение  $W_n(u, v)/W_f(u, v)$  можно заменить отношением дисперсий  $\sigma_n^2/\sigma_f^2$ , которое на практике определить значительно проще.

Рассмотрим теперь дискретную систему восстановления изображений. Для этого сначала периодически продолжим с периодами  $J$  и  $K$  исходное изображение  $f$  и импульсный отклик  $h$ . Тогда изображение, формируемое системой, показанной на рис. 5.1, будет также периодическим с периодами  $J$  и  $K$  результатом циклической свертки, искаженным периодически продолженным аддитивным шумом

$$\tilde{g}_{s,t} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} \tilde{f}_{j,k} \tilde{h}_{s-j,t-k} + \tilde{n}_{s,t}.$$

Вывод, аналогичный приведенному выше, показывает, что оптимальный восстанавливающий фильтр, минимизирующий средний квадрат ошибки, должен обладать частотной характеристикой

$$R_{u,v} = \frac{H_{u,v}^* W_{f u,v}}{|H_{u,v}|^2 W_{f u,v} + W_{n u,v}}. \quad (15.24)$$

Восстановленное изображение проще всего получить, вычислив сначала спектр искаженного изображения  $G_{u,v}$ . Обратное дискретное преобразование Фурье произведения

$$\hat{F}_{u,v} = R_{u,v} G_{u,v} \quad (15.25)$$

даст искомое изображение.

Рассмотрим два типичных случая линейных искажающих систем и соответствующих им восстанавливающих фильтров. При съемке космических объектов через атмосферу Земли происходит “размытие” изображения, обусловленное турбулентностью атмосферы. Этот эффект приближенно можно представить действием линейной системы с импульсным откликом вида

$$h(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\rho^2}\right), \quad (15.26)$$

которому соответствует частотная характеристика

$$H(u, v) = \exp\left[-2\rho^2(u^2 + v^2)\right].$$

Задача обнаружения объектов заключается в установлении наличия на изображении фрагмента, обладающего определенными, заранее известными, характеристиками. Один из подходов к решению этой задачи базируется на статистической теории принятия решений. Рассмотрим сначала простую задачу, которая состоит в следующем: необходимо решить, присутствует ли в точке изображения с координатами  $(i, j)$  объект, если известно, что изображение в этой точке может быть представлено в виде

$$f_{i,j} = \begin{cases} o + n_{i,j}, & \text{объект присутствует} \\ n_{i,j}, & \text{объекта нет} \end{cases}. \quad (15.27)$$

Если  $o$  и  $n_{i,j}$  - известные детерминированные величины, то способ решения этой задачи очевиден – необходимо выбрать некоторое пороговое значение  $n_{i,j} < l < o + n_{i,j}$ , и принимать решение о наличии объекта, если  $f_{i,j} > l$ , и об его отсутствии в противном случае. Такой подход всегда будет приводить к правильному решению задачи.

Пусть теперь  $o$  - по-прежнему известная детерминированная величина, а  $n_{i,j}$  - случайная величина с распределением, характеризуемым плотностью вероятности  $p_n(x)$ . При этом известно, что объект может появляться в

рассматриваемой точке с вероятностью  $P$ . Теперь изображение в точке с координатами  $(i, j)$  тоже является случайной величиной, которая характеризуется распределением  $p_0(f) = (1 - P)p_n(f)$ , если объект отсутствует, и распределением  $p_1(f) = Pp_{n+o}(f) = Pp_n(f - o)$  при наличии объекта. Если наличие и отсутствие объекта равновероятны, то  $P = 1 - P = 0.5$ . Соответствующие этому случаю распределения показаны на рис. 15.8 ( $\sigma_n^2$  - дисперсия  $n_{i,j}$ ).

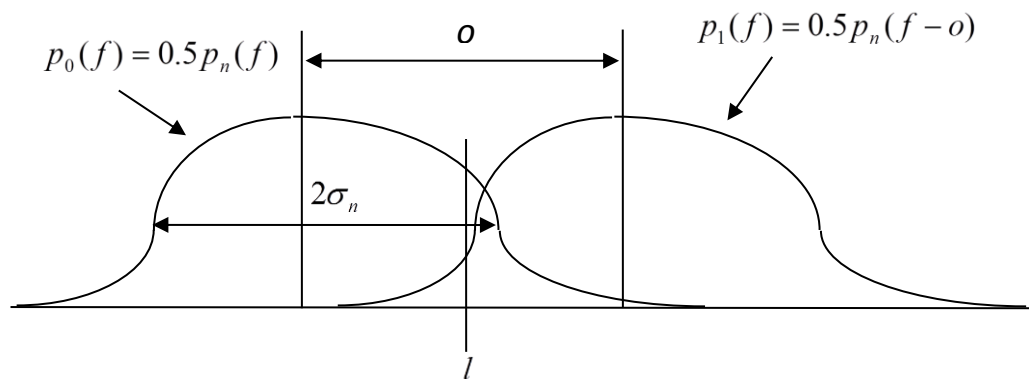


Рис. 15.8. Распределение случайной величины  $f$  в точке с координатами  $(i, j)$

В такой, вероятностной, постановке задаче выбор порога не является столь же очевидным, как в предыдущем случае.

Необходимость совмещения изображений возникает при решении таких задач как выявление отличий в серии изображений, анализ движения, объединение информации от различных сенсоров. В общем случае отличия в изображениях могут заключаться в некоторых преобразованиях координат и яркости (возможно, нелинейных), и задача совмещения заключается не только в корректном выполнении этих преобразований, но и, как правило, в предварительном оценивании параметров преобразований. Далее будет рассмотрен сравнительно простой случай совмещения изображений, когда изображения отличаются только сдвигом по координатам и линейным преобразованием яркости. Формально такую ситуацию можно представить следующим образом. Даны два непрерывных изображения  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ , которые связаны друг с другом соотношением

$$g(x, y) = cf(x + a, y + b) + d, \quad (15.28)$$

где  $a$  и  $b$  - сдвиги вдоль координат, а  $c$  и  $d$  - параметры линейного преобразования яркости.

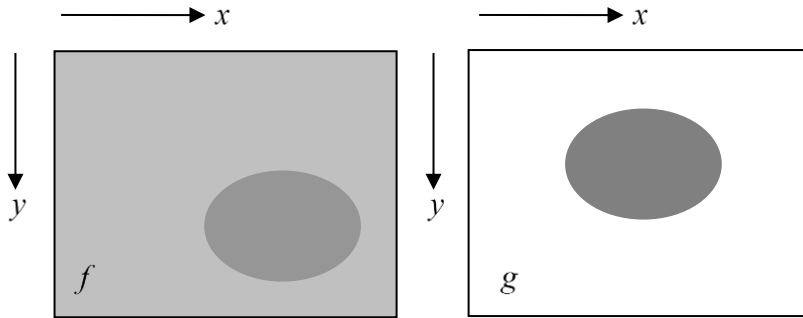


Рис. 15.9. Сдвинутые линейно преобразованные по яркости изображения

В результате дискретизации получим соответствующие дискретные изображения

$$\hat{f}_{j,i} = f(i\Delta x, j\Delta y), \quad i = \overline{0, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (15.29)$$

$$\hat{g}_{j,i} = g(i\Delta x, j\Delta y) = f(i\Delta x + a, j\Delta y + b) = f[(i+k)\Delta x + \delta, (j+l)\Delta y + \varepsilon], \quad (15.30)$$

где  $\Delta x, \Delta y$  интервалы дискретизации соответственно вдоль осей  $x$  и  $y$ ,  $k = \left\lfloor \frac{a}{\Delta x} \right\rfloor$

,  $l = \left\lfloor \frac{b}{\Delta y} \right\rfloor$ ,  $\delta = a - k\Delta x$ ,  $\varepsilon = b - l\Delta y$ ,  $\lfloor \bullet \rfloor$  - целая часть от  $\bullet$ .

Если смещения  $a$  и  $b$  кратны соответствующим интервалам дискретизации, то  $\delta, \varepsilon = 0$ , и, следовательно,

$$\hat{g}_{j,i} = \hat{f}_{j+l, i+k}. \quad (5.30a)$$

В этом случае неизвестные параметры сдвига можно найти, вычислив взаимную ковариационную функцию изображений  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  при различных их взаимных сдвигах  $s$  и  $t$ :

$$K(s, t) = \frac{\sum_W (\hat{f}_{j+t, i+s} - \bar{\hat{f}})(\hat{g}_{j, i} - \bar{\hat{g}})}{\sqrt{\sum_W (\hat{f}_{j+t, i+s} - \bar{\hat{f}})^2} \sqrt{\sum_W (\hat{g}_{j, i} - \bar{\hat{g}})^2}}, \quad (5.31)$$



где  $W$  - область перекрытия изображения  $\hat{f}$  и сдвинутого на  $t, s$  изображения  $\hat{g}$ ,

$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_W \hat{f}_{j,i}$ ,  $\bar{g} = \frac{1}{N} \sum_W \hat{g}_{j,i}$  - средние значения изображений  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$ , вычисленные по области  $W$ ,

$N$  - количество точек в области  $W$ .

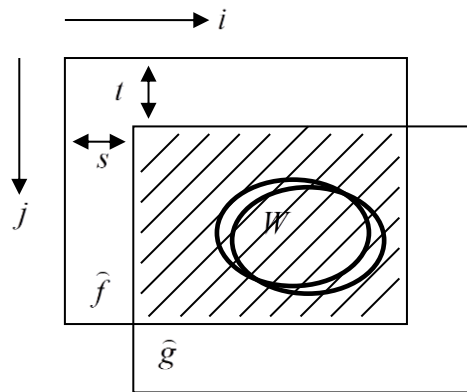


Рис. 15.10. Вычисление взаимной ковариационной функции  $K(s, t)$ .

Заштрихована область перекрытия  $W$

В соответствии с известным неравенством Коши-Шварца максимального значения взаимная ковариационная функция достигает при  $s = k$ ,  $t = l$ . Поэтому, находя координаты максимума взаимной ковариационной функции, можно определить сдвиг одного изображения относительно другого, после чего изображения можно совместить посредством целочисленного сдвига

Напомним некоторые основные понятия из теории множеств, которые потребуются в дальнейшем. Пусть  $E^n$  -  $n$ -мерное пространство. Ниже обычно предполагается, что  $E^n = R^n$  или  $E^n = Z^n$ , где  $R^n$  -  $n$ -мерное евклидово пространство, а  $Z^n$  -  $n$ -мерное дискретное пространство ( $n$ -мерная решетка). В применении к изображениям, как правило, рассматриваются двумерные пространства. Если  $X = \{x\}$  и  $Y = \{y\}$  - множества в  $E^n$ , то *объединением множеств*  $X$  и  $Y$  называется множество  $Z = \{z : z \in X \text{ или } z \in Y\} = X \cup Y$ , (т.е. множество, состоящее из таких элементов  $z$ , которые принадлежат  $X$  или  $Y$ ), а *пересечением множеств*  $X$  и  $Y$  называется множество  $Z = X \cap Y = \{z : z \in X, z \in Y\}$ . Множество  $Z = X^c = \{z : z \notin X\}$  называется *дополнением множества*  $X$ . *Разностью множеств*  $X$  и  $Y$  называется множество  $Z = \{z : z \in X, z \notin Y\} = X \setminus Y$ .

Множество  $Z$  называется пустым, если оно не содержит ни одного элемента. Обозначается такое множество как  $Z = \emptyset$ . Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}(X \cup Y)^c &= X^c \cap Y^c; \\ (X \cap Y)^c &= X^c \cup Y^c; \\ X \setminus Y &= X \cap Y^c.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Определим на  $E^n$  *индикаторную функцию* множества  $X$  следующим образом:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}.$$

Определим также меру множества  $X$ :

$$\begin{aligned}Mes(X) &= \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_X(x) dx - \text{ для непрерывного пространства } \mathbf{R}^n \text{ и} \\ Mes(X) &= \sum_{x_i \in X} \varphi_X(x_i) - \text{ для дискретного пространства } \mathbf{Z}^n.\end{aligned}$$

Для изображений эти определения означают, что мерой множества  $X$  является его площадь в непрерывном случае и количество узлов решетки, входящих в множество – в дискретном.

Для данного множества  $X$  можно зафиксировать некоторый элемент (не обязательно принадлежащий этому множеству), который назовем центром (или началом) множества  $X$ . Обозначим через  $X_a$  множество  $X$ , центр которого помещен в точку  $a$ . Одним из основных понятий математической морфологии является понятие *структурного элемента*. Структурный элемент  $B$  – это множество, состоящее из двух непересекающихся подмножеств  $B^1$  и  $B^2$ , для которых определено общее начало.

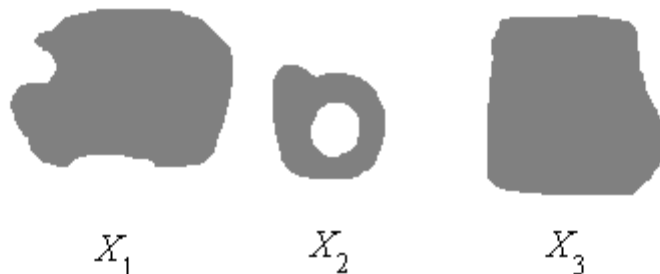


Рис.15.11. Двухградационное изображение

## НМ-преобразование

Базовым преобразованием, позволяющим строить набор различных операций математической морфологии, является преобразование Hit or Miss. Нам не удалось найти адекватного перевода этому названию, поэтому далее будем пользоваться названием “НМ-преобразование”. Для данного множества  $X = \{x \in \mathbf{E}^n\}$  и данного структурного элемента  $B$  результат НМ-преобразования определяется как

$$Y = X \otimes B = \{x : B_x^1 \subset X, B_x^2 \subset X^c\}. \quad (15.12)$$

(Здесь через  $X^c$  обозначено дополнение множества  $X$ .)

В результате НМ-преобразования на исходном изображении выделяются элементы, окрестность которых совпадает со структурным элементом (заметим, что форма окрестности определяется формой структурного элемента). Условие (15.12) выполняется для элементов, лежащих на нижней границе  $X$  (например, 1- 4 позиции структурного элемента). В позиции 5  $B_x^1 \subset X$ , но  $B_x^2 \not\subset X^c$ , в позиции 6, наоборот,  $B_x^1 \not\subset X$ , но  $B_x^2 \subset X^c$ , а в позиции 7 не выполняются оба условия.

Применяя НМ-преобразование с различными структурными элементами можно выделять специфические геометрические особенности изображений.

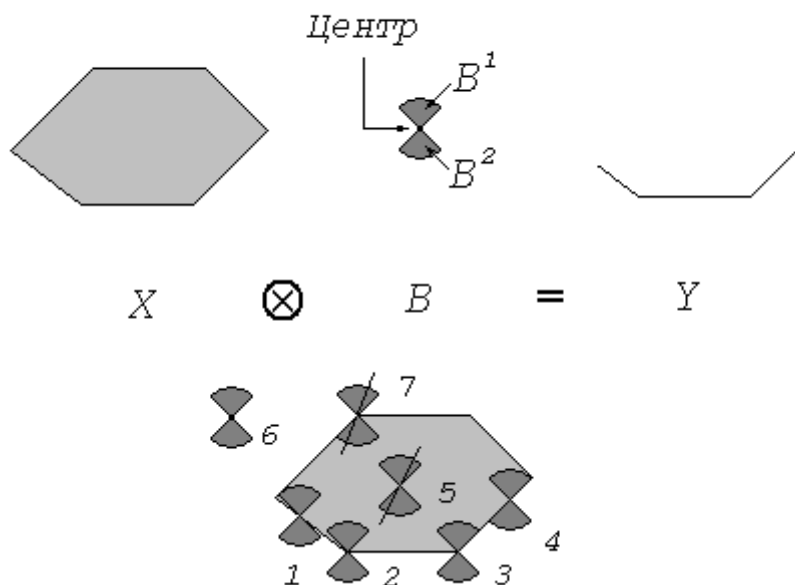


Рис.15.12. НМ-преобразование

### Эрозия

Частным случаем НМ-преобразования является операция *эрозии* (*erosion*). Пусть в структурном элементе  $B$  подмножество  $B^2$  - пусто ( $B^2 = \emptyset$ ). При этом условие  $B_x^2 \subset X^c$  всегда выполняется, и в множество  $Y$  включаются только те элементы исходного множества  $X$ , для которых выполняется условие  $B_x \subset X$ :

$$Y = X \odot B = \{x : B_x \subset X\}. \quad (15.13)$$

Иначе говоря, если  $x \in X$ , а  $b \in B$ , то в множество  $Y$  включаются такие элементы, для которых выполняется условие  $x+b \in X$  (рис.8.3).

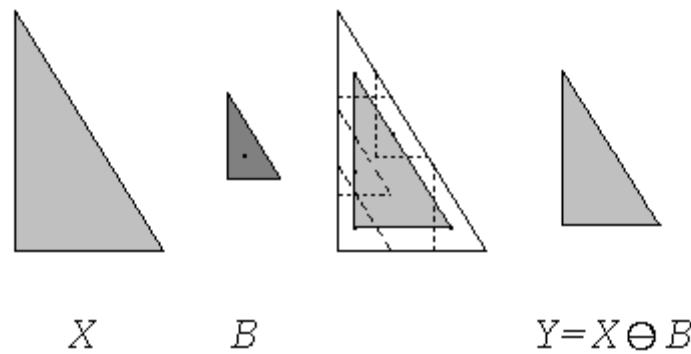


Рис.15.13. Эрозия

С другой стороны, если  $b$  пробегает все возможные положения в  $B$ , условие  $x+b \in X$  выполняется тогда и только тогда, когда  $x$  принадлежит смещенному множеству  $X_{-b}$  (рис.8.4). Поэтому другое, эквивалентное, представление операции эрозии имеет вид

$$Y = X \odot B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} = \bigcap_{-b \in B} X_b = \bigcap_{b \in \tilde{B}} X_b, \quad (15.13')$$

где  $\tilde{B} = \{b : -b \in B\}$  - множество, симметричное  $B$  относительно его начала. Это представление может оказаться полезным при численной реализации операции эрозии.

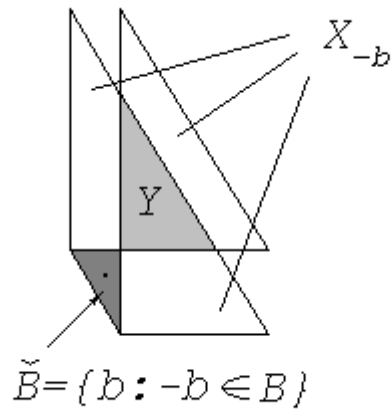


Рис.15.14. Эрозия как пересечение смещенных множеств

### Дилатация

Операцией, двойственной к эрозии, является *дилатация* (*dilation*), которая определяется следующим образом (рис.15.15):

$$Y = X \oplus B = \{x : B_x \cap X \neq \emptyset\}. \quad (15.14)$$

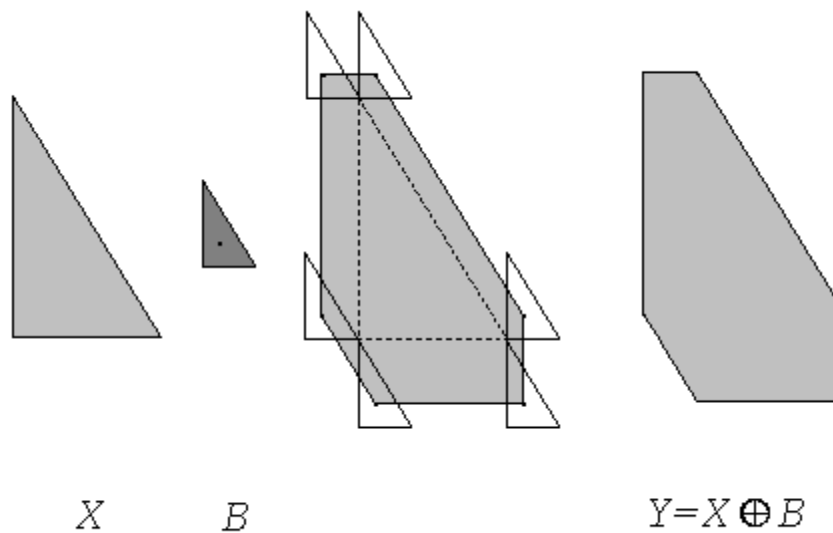


Рис.15.15 Дилатация

Другое представление дилатации имеет вид

$$Y = X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b, \quad (15.14')$$

как это показано на рис.15.16.

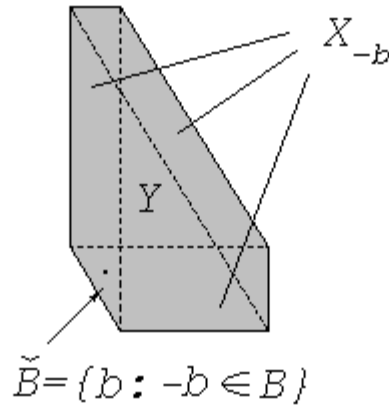


Рис.15.16. Дилатация как объединение смещенных множеств

Если рассматривать множество  $X$  как объект, а  $X^c$  как фон в изображении, то дилатацию объекта можно интерпретировать как эрозию фона:

$$X \oplus B = (X^c \odot B)^c. \quad (15.15)$$

Действительно,

$$(X^c \odot B)^c = \left( \bigcap_{b \in \tilde{B}} X_b^c \right)^c = \bigcup_{b \in \tilde{B}} X_b = X \oplus B.$$

#### Алгебраические свойства дилатации и эрозии

Приведем здесь без доказательства ряд полезных свойств рассмотренных операций.

а) Дистрибутивность:

дилатация дистрибутивна относительно объединения

$$\left( \bigcup_{i=1}^I X_i \right) \oplus B = \bigcup_{i=1}^I (X_i \oplus B), \quad (15.16)$$

а эрозия - относительно пересечения множеств

$$\bigcap_{i=1}^I (X_i \odot B) = \left( \bigcap_{i=1}^I X_i \right) \odot B. \quad (15.16')$$

Свойство дистрибутивности с учетом соотношения (15.15) позволяет выполнять операции над  $X$  по фрагментам, комбинируя затем результаты посредством объединения или пересечения.

б) Итеративность:

$$(X \oplus A) \oplus B = X \oplus (A \oplus B); \quad (15.17)$$

$$(X \odot A) \odot B = X \odot (A \oplus B). \quad (15.17')$$

Это чрезвычайно важное свойство, поскольку оно позволяет разлагать сложные структурные элементы в композицию более простых (рис.15.17). Соответственно, операции со сложными элементами могут быть заменены последовательностью операций с более простыми. Так, эрозию некоего множества  $X$  посредством структурного элемента  $H$ , приведенного на рис. 15.17, можно заменить четырьмя последовательными эрозиями со структурными элементами  $A - D$ .

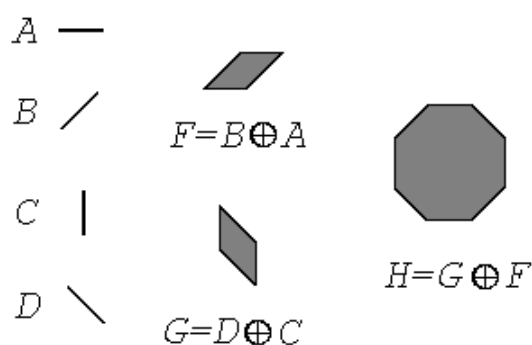


Рис.15.17. Декомпозиция структурных элементов

в) Инвариантность к изменению масштаба (рис.15.18):

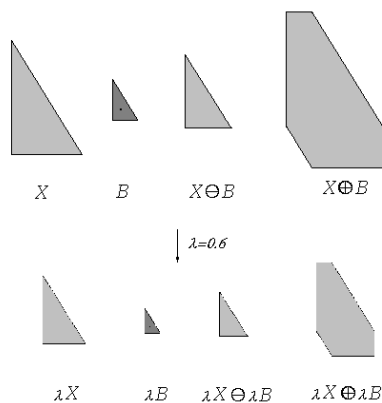


Рис.15.18. Инвариантность эрозии и дилатации к масштабным преобразованиям

$$\lambda X \oplus \lambda B = \lambda(X \oplus B); \quad (15.18)$$

$$\lambda X \odot \lambda B = \lambda(X \odot B). \quad (15.18')$$

В этих соотношениях через  $\lambda B$ ,  $\lambda X$  обозначены множества

$$B' = \lambda B = \{b' = \lambda b : b \in B\} \text{ и } X' = \lambda X = \{x' = \lambda x : x \in X\}.$$



## СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПО КУРСУ

Косых В.П. Цифровая обработка изображений: учебное пособие. – Новосибирск: НГТУ, 2002. – 102 с.

Сюзев В.В. Цифровая обработка сигналов: методы и алгоритмы: учебное пособие. – М.: МГТУ, 2012. – 749 с.

Геппенер В.В., Черниченко Д.А., Экало С.А. Wavelet-преобразование в задачах цифровой обработки сигналов: учебное пособие. – Л.: ЛЭТИ, 2002. – 72 с.

Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов. – Самара: СНЦ РАН, 2000. – 208 с.

Прохоров С.А., Куликовских И.М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум. – Самара: СНЦ РАН, 2008. – 301 с.

# **ТЕОРИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Методические рекомендации  
к практическим занятиям

2013

СОДЕРЖАНИЕ	3
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	9
1. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ	15
1.1. Теоретические основы вычислительного практикума	15
1.2. Задание на самостоятельную работу	24
1.3. Содержание отчёта	25
1.4. Контрольные вопросы	25
2. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	26
2.1. Теоретические основы вычислительного практикума	26
2.2. Задание на самостоятельную работу	31
2.3. Содержание отчёта	31
2.4. Контрольные вопросы	32
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	33
3.1. Теоретические основы вычислительного практикума	33
3.2. Задание на самостоятельную работу	34
3.3. Содержание отчёта	34
3.4. Контрольные вопросы	35
4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	36
4.1. Теоретические основы вычислительного практикума	36
4.2. Задание на самостоятельную работу	48
4.3. Содержание отчёта	48
4.4. Контрольные вопросы	48
5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ	49
5.1. Теоретические основы вычислительного практикума	49
5.2. Задание на самостоятельную работу	70
5.3. Содержание отчёта	70
5.4. Контрольные вопросы	71
6. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ С УЧЕТОМ УСЛОВИЯ НОРМИРОВКИ	72
6.1. Теоретические основы вычислительного практикума	72
6.2. Задание на самостоятельную работу	80
6.3. Содержание отчёта	81
6.4. Контрольные вопросы	81
7. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ	82
7.1. Теоретические основы вычислительного практикума	82
7.2. Задание на самостоятельную работу	94
7.3. Содержание отчёта	94
7.4. Контрольные вопросы	94
8. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	95
8.1. Теоретические основы вычислительного практикума	95
8.2. Задание на самостоятельную работу	100
8.3. Содержание отчёта	101
8.4. Контрольные вопросы	101
9. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	102
9.1. Теоретические основы вычислительного практикума	102
9.2. Задание на самостоятельную работу	116
9.3. Содержание отчёта	117
9.4. Контрольные вопросы	117
10. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ (АИС)	118
10.1. Теоретические основы вычислительного практикума	118
10.2. Задание на самостоятельную работу	126

10.3.	Содержание отчёта	126
10.4.	Контрольные вопросы	127
11.	ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ АИС	128
11.1.	Теоретические основы вычислительного практикума	128
11.2.	Задание на самостоятельную работу	134
11.3.	Содержание отчёта	135
11.4.	Контрольные вопросы	135
12.	АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ	136
12.1.	Теоретические основы вычислительного практикума	136
12.2.	Задание на самостоятельную работу	138
12.3.	Содержание отчёта	138
12.4.	Контрольные вопросы	139
13.	ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НА УВЕЛИЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ	140
13.1.	Теоретические основы вычислительного практикума	140
13.2.	Задание на самостоятельную работу	144
13.3.	Содержание отчёта	144
13.4.	Контрольные вопросы	144
14.	АНАЛИЗ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ АИС	145
14.1.	Теоретические основы вычислительного практикума	145
14.2.	Задание на самостоятельную работу	150
14.3.	Содержание отчёта	151
14.4.	Контрольные вопросы	151
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	152
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	153
	ПРИЛОЖЕНИЕ	157
1.	Вид ортогональных полиномов 0 – 5 порядков	157
2.	Вычислительный практикум 1	159
3.	Вид ортогональных функций 0 – 5 порядков	165
4.	Правила действий над коэффициентами производящих функций и интегральное представление комбинаторных чисел	167
5.	Вычислительный практикум 2	171
6.	Вычислительный практикум 3	179
7.	Частотные характеристики ортогональных функций	184
8.	Частотные характеристики ортогональных фильтров	197
9.	Вычислительный практикум 4	208
10.	Алгебраические выражения для вычисления коэффициентов разложения	212
11.	Вычислительный практикум 5	219
12.	Вычислительный практикум 6	232
13.	Вычислительный практикум 7	247
14.	Вычислительный практикум 8	251
15.	Вычислительный практикум 9	253
16.	Алгоритмы рекурсивной фильтрации	257
17.	АИС корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах	259
18.	Руководство пользователя	268
19.	Формат вводимых и выводимых файлов	276
20.	Пример обработки экспериментальных данных	277
21.	Вид центрированных фотоплетизмограмм	285
22.	Вычислительный практикум 12	289
23.	Вычислительный практикум 13	294
24.	Краткие биографии математиков	298

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АСНИ – автоматизированная система научных исследований;  
ВКФ – взаимная корреляционная функция;  
ВНКФ – взаимная нормированная корреляционная функция;  
ВР – временной ряд;  
ИВК – измерительно-вычислительный комплекс;  
ИИС – информационно-измерительная система;  
КФ – корреляционная функция;  
НКФ – нормированная корреляционная функция;  
ПО – процессор обработки;  
ПРИС – процессорно-измерительное средство;  
СП – случайный процесс;  
 $A_{\Theta}\{\hat{x}(t_k)\}$  – алгоритм оценки вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $A_s\{\hat{x}(t_k)\}$  – алгоритм оценки сигнала;  
 $C_x(J)$  – интервальная корреляционная функция;  
 $d$  – параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );  
 $\hat{D}_x$  – оценка дисперсии;  
 $ent[ ]$  – операция взятия целой части числа;  
 $F_x(\omega)$  – спектральная функция;  
 $g[ ]$  – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;  
 $K_a(\tau)$  – аппроксимирующее выражение корреляционной функции;  
 $K_{axy}(\tau)$  – аппроксимирующее выражение взаимной корреляционной функции;  
 $K_x(\tau)$  – корреляционная функция стационарного случайного процесса;  
 $K_x(t, t')$  – корреляционная функция случайного процесса;  
 $K_{xy}(\tau)$  – взаимная корреляционная функция;  
 $\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$  – ортогональная функция  $k$ -го порядка;  
 $M[ ]$  – оператор математического ожидания;  
 $S_d$  – оператор усреднения;  
 $Sign$  – знаковая функция;  
 $S_{axy}(\omega)$  – аппроксимирующее выражение взаимной спектральной плотности мощности;  
 $S_x(\omega)$  – спектральная плотность мощности процесса  $\overset{\circ}{x}(t)$ ;  
 $S_{xH}(\omega)$  – нормированная спектральная плотность мощности процесса  $\overset{\circ}{x}(t)$ ;  
 $S_{xy}(\omega)$  – взаимная спектральная плотность мощности;  
 $W_k(j\omega)$  – частотная характеристика ортогональных функций  $k$ -го порядка;  
 $x_j(t)$  –  $j$ -ая реализация случайного процесса;  
 $\bar{x}(\bar{\Theta}, t)$  – реализация случайного процесса;  
 $\beta_k$  – коэффициент разложения ортогонального ряда;  
 $b_k$  – коэффициент разложения ортогонального ряда;

$c_k$  – коэффициент разложения ортогонального ряда;  
 $\Delta$  – погрешность аппроксимации;  
 $\delta$  – относительная погрешность аппроксимации;  
 $\Delta t_{ji}$  – интервал дискретизации;  
 $\Delta\omega_\varphi$  – полоса пропускания фильтра;  
 $\Delta\omega_c$  – эквивалентная ширина спектра мощности сигнала;  
 $\gamma_{см}$  – погрешность от смещенности оценки;  
 $\gamma_{см доп}, \gamma_{м доп}$  – допустимые значения погрешностей оценки;  
 $\gamma_m$  – методическая статистическая погрешность;  
 $\mu$  – показатель колебательности;  
 $\hat{\Theta}_j[X(t)]$  –  $j$ -текущая оценка вероятностной характеристики;  
 $\Theta[X(t)], \Theta$  – измеряемая вероятностная характеристика;  
 $\vec{\Theta}$  – вектор информативных параметров случайного процесса;  
 $\hat{\Theta}_{cp}[X(t)]$  – средняя оценка вероятностной характеристики;  
 $\hat{\Theta}[X(t)]$  – оценка измеряемой вероятностной характеристики;  
 $\hat{\Theta}_t[X(t)]$  –  $t$ -текущая оценка вероятностной характеристики;  
 $\rho_a(\tau, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  – аппроксимирующее выражение нормированной корреляционной функции;  
 $\rho_x(\tau)$  – нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса;  
 $\rho_x(t, t')$  – нормированная корреляционная функция случайного процесса;  
 $\rho_{xy}(\tau)$  – взаимная нормированная корреляционная функция;  
 $r_{xy}$  – коэффициент корреляции;  
 $\tau_k^{(i)}$  – интервал корреляции;  
 $\tau_{k \max}$  – максимальный интервал корреляции;  
 $\vec{\Omega}$  – вектор информативных параметров объекта исследований.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый Вашему вниманию вычислительный практикум, посвященный изучению ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов, подготовлен для преподавателей, научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов как руководство и дополняет следующие монографии:

1. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов/Самар. гос. аэро-косм. ун-т, 2001. 329 с., ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/3/>,

[http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rid=58659](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rid=58659)

2. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. 209 с.: ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/1/>,

[http://window.edu.ru/window/library?p\\_rid=58657](http://window.edu.ru/window/library?p_rid=58657)

3. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум/Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. 191 с.: ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/5/>,

[http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rid=58661](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rid=58661)

4. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. 375 с.: ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/2/>,

[http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rid=58658](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rid=58658)

5. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. 380 с.: ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/4/>,

[http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rid=58660](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rid=58660)

6. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./ СНЦ РАН, 2002. 277 с., ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/6/>,

[http://window.edu.ru/window/library?p\\_rid=58662](http://window.edu.ru/window/library?p_rid=58662)

7. Прохоров С.А., Иващенко А.В., Графкин А.В. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов/ СНЦ РАН, 2002. 286 с., ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/7/>,

[http://window.edu.ru/window/library?p\\_rid=58663](http://window.edu.ru/window/library?p_rid=58663)

8. Прохоров С.А., Графкин А.В. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах/СНЦ РАН, 2005, 198 с., ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/8/>,

[http://window.edu.ru/window/library?p\\_rid=58664](http://window.edu.ru/window/library?p_rid=58664)

9. Прикладной анализ случайных процессов. Под ред. Прохорова С.А./ СНЦ РАН, 2007. 582 с., ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/9/>,

[http://window.edu.ru/window/library?p\\_rid=58665](http://window.edu.ru/window/library?p_rid=58665)

10. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов. Лабораторный практикум/ СНЦ РАН, 2008. 301 с., ил.

<http://www.ssau.ru/resources/sotrudniki/prohorov/10/>,  
[http://window.edu.ru/window/catalog?p\\_rid=58666](http://window.edu.ru/window/catalog?p_rid=58666)

Представленные работы вычислительного практикума можно разбить на три блока:

- 1) изучение свойств ортогональных полиномов и функций с использованием системы Mathcad (1 - 4 работы);
- 2) построение ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик с использованием системы Mathcad и автоматизированной информационной системы (5 - 11 работы);
- 3) анализа погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик с использованием системы Mathcad и автоматизированной информационной системы (12 - 14 работы).

Материалы, представленные в вычислительном практикуме, получены в результате выполнения научно-исследовательских работ на кафедрах «Информационно-измерительная техника», «Информационная техника» Самарского государственного технического университета (СГТУ), «Информационные системы и технологии» Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ), Самарском филиале Российского НИИ информационных систем, естественно-математическом факультете Загребского университета и «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), выполненных под руководством и при непосредственном участии Прохорова С.А.

Отдельные разделы вычислительного практикума использовались при чтении лекций по ряду дисциплин при подготовке студентов по специальностям «Информационно-измерительная техника», «Автоматизированные системы обработки информации и управления» в Самарском государственном аэрокосмическом университете, Самарском государственном техническом университете, Самарском государственном университете, Волгоградском государственном университете, Оренбургском государственном университете, Саратовском государственном техническом университете, Уфимском государственном авиационно-техническом университете, также для научных сотрудников и аспирантов в «Центре исследования моря» института «Руджер Бошкович» (г. Загреб, Хорватия), на естественно-математическом факультете Загребского университета, Международном университете подготовки аспирантов (г. Дубровник, Хорватия), Пекинском техническом университете (Китай).

В полном объеме вычислительный практикум прошел апробацию на кафедре информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета при подготовке специалистов по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления-230102», Самарском государственном университете, кафедре радиотехники Саратовского государственного технического университета, и может быть рекомендован для подготовки специалистов по смежным специальностям.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять по адресу:

Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва, факультет информатики, кафедра «Информационные системы и технологии», заведующему кафедрой Прохорову С.А. E-mail: [sp @ smr. ru](mailto:sp@smr.ru)



## ВВЕДЕНИЕ

При проведении научных исследований, комплексных испытаний с помощью средств информационно-измерительной техники исследователь получает случайный сигнал  $x(t, \bar{\Theta})$ , характеристики которого  $\bar{\Theta}$  подлежат определению.

Все вероятностные характеристики, определяемые во временной области, можно условно разделить на характеристики положения и формы кривой распределения вероятностей случайного процесса и характеристики взаимосвязи (см. рис. В.1).

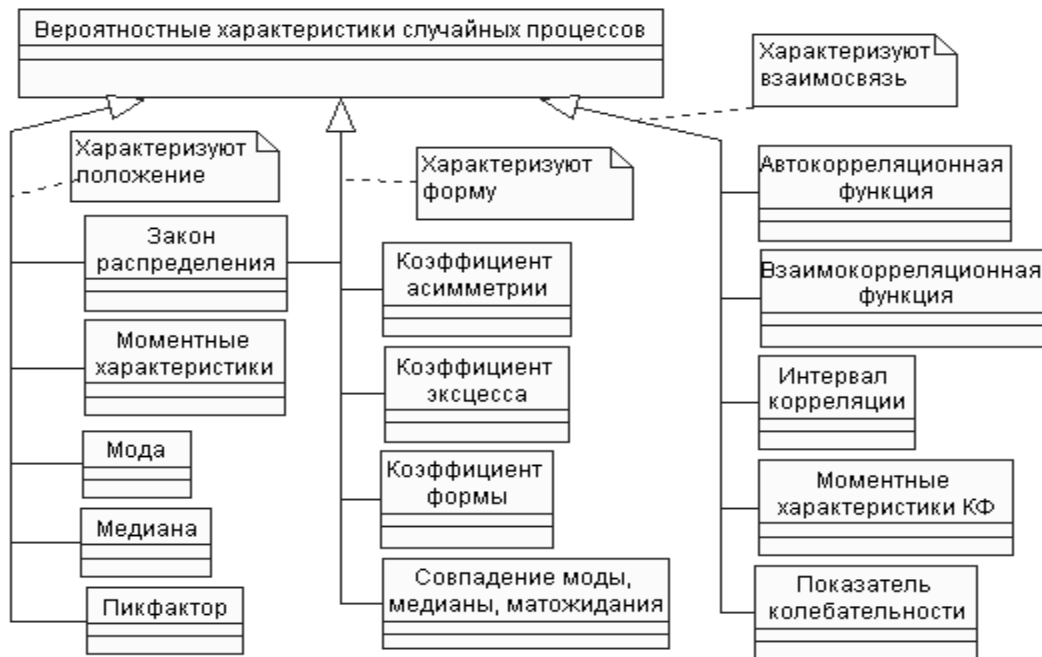


Рисунок В.1 - Классификация вероятностных характеристик случайных процессов

При этом наиболее часто определяются (в порядке возрастания материальных и вычислительных затрат):

- числовые характеристики случайного процесса;
- авто и взаимные корреляционные функции;
- спектральные плотности мощности;
- законы распределения.

На основании общей теории статистических измерений [55] измеряемая вероятностная характеристика определяется как предел выборочного среднего функционально преобразованного случайного процесса:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{d \rightarrow \infty} S_d g[x_j(t)], \quad (\text{В.1})$$

где  $\Theta$  – измеряемая вероятностная характеристика;

$S_d$  – оператор идеального усреднения;

$d$  – параметр усреднения (время  $T$ , совокупность реализаций  $N$  или время и совокупность реализаций  $TN$ );

$g$  – оператор, представляющий собой преобразования, лежащие в основе определения вероятностной характеристики  $\Theta$ ;

$x_j(t)$  –  $j$ -ая реализация случайного процесса.

В зависимости от вида усреднения получаем следующие вероятностные характеристики:

1. При усреднении по совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]. \quad (B.2)$$

2. При усреднении по времени:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.3)$$

3. При усреднении по времени и совокупности:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.4)$$

На практике исследователь имеет дело с ограниченной совокупностью выборочных данных (результатов измерения). Результат определения значения вероятностной характеристики по ограниченной совокупности выборочных данных носит название **оценки**:

$$\hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t)] \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (B.5)$$

К основным свойствам оценок относятся **несмещенность**, **состоятельность** и **эффективность**.

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой характеристики:

$$M[\hat{\Theta}[X(t)]] = \Theta[X(t)]. \quad (B.6)$$

При невыполнении равенства оценка будет смещенной.

Оценка называется **состоятельной**, если при бесконечном увеличении объема выборочных данных она сходится по вероятности к истинному значению оцениваемой характеристики

$$\lim_{d \rightarrow \infty} P(|\hat{\Theta}[X(t)] - \Theta[X(t)]| < \varepsilon) = 1 \quad (B.7)$$

при любом  $\varepsilon$ .

При невыполнении этого условия оценка будет несостоятельной.

**Эффективными** называются оценки, дисперсия которых минимальна.

Следует подчеркнуть, что свойства оценок, которые описываются несмещенностью, состоятельностью и эффективностью, тесно связаны с характером ошибок, которые определяются методами математической статистики [55].

Таким образом, при ограниченном наборе выборочных данных выражения (B.2) - (B.4) при анализе случайных процессов примут вид:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_t[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t)]; \quad (B.8)$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T g[x_j(t)] dt; \quad (B.9)$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^N \int_0^T g[x_j(t)] dt. \quad (B.10)$$

Следует отметить, что этими соотношениями определяются разные вероятностные характеристики. При усреднении только по совокупности реализаций (при фиксированном моменте времени) вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от текущего времени и называется  $t$ -текущей характеристикой  $\hat{\Theta}_t$  [55]. При усреднении только по времени, когда выборочные значения относятся к одной реализации  $j$ , вероятностная характеристика  $\Theta[X(t)]$  будет зависеть от номера реализации и называется  $j$ -текущей характеристикой  $\hat{\Theta}_j$ . При усреднении и по времени, и совокупности значение  $\Theta[X(t)]$  не зависит ни от текущего времени, ни от номера реализации и называется средней характеристикой –  $\hat{\Theta}_{cp}$ .

Наличие или отсутствие зависимости значений вероятностных характеристик от времени или номера реализации определяет такие фундаментальные свойства процесса, как **стационарность** и **эргодичность**.

**Стационарным** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. **Эргодическим** называется процесс, вероятностные характеристики которого не зависят от номера реализации.

В теории случайных процессов различают стационарность в узком и широком смысле. Данное выше определение относится к случайным процессам, стационарным в узком смысле. Для этих процессов равенство  $\Theta_t = const$  выполняется для любой вероятностной характеристики. Когда от времени не зависят только одно- и двумерные вероятностные характеристики, случайный процесс считается стационарным в широком смысле. Если условие стационарности не выполняется хотя бы для одной вероятностной характеристики, процесс называется **нестационарным** по этой характеристике.

По аналогии, процесс считается эргодическим в узком смысле, если  $\Theta_j = const$ , где  $j$  – номер реализации, для любой вероятностной характеристики, и в широком смысле, если независимость значений вероятностных характеристик от номера реализации имеет место лишь для характеристик первых двух порядков. Если условие эргодичности не выполняется, процесс называется **неэргодическим**.

Таким образом, случайные процессы на основе свойств стационарности и эргодичности можно представить в виде четырех классов (см. рис. В.2): стационарные эргодические; стационарные неэргодические; нестационарные эргодические; нестационарные неэргодические.

Каждый из перечисленных классов имеет своё характерное описание – **математическую модель**, параметры которой подлежат определению как с помощью теоретических, так и экспериментальных методов исследования.

Различные комбинации этих процессов совместно с детерминированными дают возможность построить более сложные модели, используемые как при исследованиях с целью определения их характеристик, так и при генерировании процессов с заданными свойствами, используемых при имитационном моделировании средств измерения и обработки

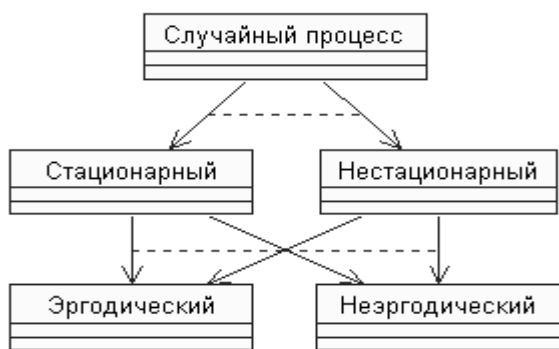


Рисунок В.2 - Классификация случайных процессов

с целью определения их метрологических характеристик.

Ответ на вопрос, какие характеристики определять:  $\Theta_i$ ,  $\Theta_j$ ,  $\Theta_{cp}$ , – во многом определяется свойствами исследуемого процесса и способом формирования выборочных данных.

Таким образом, прежде чем выбрать тип вероятностной характеристики (вид оператора усреднения), необходимо решить вопрос о стационарности и эргодичности случайного процесса. Этот вопрос самостоятельный и выходит за рамки работы.

В [55] показано, что для стационарного эргодического случайного процесса  $\Theta_i = \Theta_j = \Theta_{cp}$ , для стационарного неэргодического процесса –  $\Theta_i = \Theta_{cp}$ , для нестационарного эргодического –  $\Theta_j = \Theta_{cp}$ , а для нестационарного неэргодического процесса все виды вероятностных характеристик различны.

При фиксированном типе  $S_d$  вопросы организации эксперимента и принципы организации массивов выборочных данных о мгновенных значениях исследуемого случайного процесса подробно рассмотрены в [55]. Результаты измерений могут формироваться с использованием:

- различных временных интервалов одной и той же совокупности реализаций;
- одних и тех же временных интервалов различных совокупностей реализаций;
- различных временных интервалов различных совокупностей реализаций.

Причем, от эксперимента к эксперименту возможно изменение  $N$ ,  $M$  и  $T$ , т.е. объема выборочных данных.

Выделим три метода статистических измерений: прямые, косвенные и совокупные.

**Прямым методом** статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики в соответствии с выражением (B.1).

**Косвенным методом** статистических измерений будем называть метод получения оценки вероятностной характеристики с использованием функционального преобразования оценок других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых методов статистических измерений:

$$\hat{\Theta}[z(t)] = F\{S_{d1}g_x[x_j(t_i^{(x)})], S_{d2}g_y[y_l(t_i^{(y)})], \dots\}, \quad (B.11)$$

где  $F\{\}$  представляет собой функциональное преобразование полученных оценок  $\hat{\Theta}[x(t)]$ ,  $\hat{\Theta}[y(t)]$  и т.д. с целью получения оценки  $\hat{\Theta}[z(t)]$ .

Под **совокупными статистическими измерениями** будем понимать метод получения оценок в результате решения системы уравнений, содержащей оценки других вероятностных характеристик, полученных с помощью прямых, косвенных методов статистических измерений или их комбинаций:

$$\Xi_i \{S_{d1}g^{(l)}[x_j^{(l)}(t_i^{(l)})], \dots, S_{dm}g^{(m)}[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\} = 0; \quad (B.12)$$

$$\Xi_i \{F^{(l)}\{S_{d1}g^{(l)}[x_j^{(l)}(t_i^{(l)})]\}, \dots, F^{(m)}\{S_{dm}g[x_j^{(m)}(t_i^{(m)})]\}\} = 0. \quad (B.13)$$

Автоматизированные системы научных исследований (АСНИ) дают возможность обрабатывать **временные последовательности случайных процессов – временные ряды**.

В этом случае выражения (B.2) – (B.4) при представлении случайного процесса  $X(t)$  ансамблем последовательностей примут вид:

$$\Theta[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.14})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.15})$$

$$\Theta[X(t)] = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)], \quad (\text{B.16})$$

где  $x_j(t_i)$  –  $i$ -ый отсчёт  $j$ -ой реализации случайного процесса.

При ограниченном наборе данных при анализе последовательностей выражение (B.5) примет вид:

$$\bar{\Theta}[X(t)] = S_d g[x_j(t_i)] \quad (j = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, M). \quad (\text{B.17})$$

Выражения (B.8) – (B.10) для оценки вероятностных характеристик при анализе последовательностей (временных рядов) запишем в виде:

- при усреднении по совокупности

$$\hat{\Theta}_i[X(t)] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.18})$$

- при усреднении по времени

$$\hat{\Theta}_j[X(t)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]; \quad (\text{B.19})$$

- при усреднении по времени и совокупности

$$\hat{\Theta}_{cp}[X(t)] = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M g[x_j(t_i)]. \quad (\text{B.20})$$

Следующим шагом является построение математической модели анализируемой вероятностной функциональной характеристики в виде параметрической модели. Следует отметить, что модель должна сохранять основные свойства анализируемой характеристики, особенно условие нормировки [21].

Учитывая большое разнообразие функциональных вероятностных характеристик, наиболее целесообразно искать их модель в виде ряда в том или ином ортогональном базисе  $\psi_k(x, \alpha / \gamma)$  с весом  $\mu(x)$ , где  $\alpha / \gamma$  - параметр масштаба [21].

Представив модель вероятностной функциональной характеристики в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x, \alpha / \gamma), \quad (\text{B.21})$$

$$\int_a^b \psi_k(x, \alpha / \gamma) \psi_n(x, \alpha / \gamma) \mu(x) dx = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases}$$

Для минимизации квадратической погрешности приближения

$$\Delta = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x, \alpha / \gamma) \right]^2 \mu(x) dx = \min \quad (\text{B.22})$$

лишь коэффициенты разложения – коэффициенты Фурье с учетом свойств ортогональных функций автоматически определяются выражением

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|} \int_a^b f(x) \psi_k(x, \alpha / \gamma) \mu(x) dx. \quad (\text{B.23})$$

Для определения же остальных параметров модели необходимо решать дополнительные задачи.

Таким образом, для построения ортогональной модели необходимо:

- 1) выбрать ортогональный базис –  $\psi_k(x, \alpha / \gamma)$ ;
- 2) определить численное значение параметра масштаба  $\alpha / \gamma$ ;
- 3) определить коэффициенты разложения  $\beta_k$ ;
- 4) определить количество членов разложения ряда (В.21);
- 5) определить корректирующие коэффициенты, обеспечивающие выполнение моделью основных свойств вероятностной функциональной характеристики, как правило, условия нормировки [21].

Графическая интерпретация аппроксимативного анализа вероятностных характеристик случайных процессов представлена ниже.

$$\{x_j(t)\}_{j=0...N}^{t \in [0, T]} \Longrightarrow \{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0...N}^{i=1, M} \Longrightarrow \hat{\Theta}[X(t)] = S_d g[\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0...N}^{i=1, M}]$$

где  $\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{j=0...N}^{i=1, M}$  - временной ряд;

Аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ случайных процессов

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\Theta}[X(t)] = \sigma_x^2 \hat{\rho}_x(\tau) & & & & \\ \hat{\rho}_x(\tau) \Longrightarrow \hat{\rho}_{ax}(\tau, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{S}_{ax}(\omega, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{F}_{ax}(\omega, \bar{\beta}_m) & & & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \tau_k^{(n)}, \mu_k & & \Delta\omega, \omega, S_x(\omega) & & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2) \end{array}$$

Аппроксимативный анализ взаимных корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\Theta}[X(t), Y(t)] = \sigma_{xy}^2 \hat{\rho}_{xy}(\tau) & & & & \\ \hat{\rho}_{xy}(\tau) \Longrightarrow \hat{\rho}_{axy}(\tau, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{S}_a(\omega, \bar{\beta}_m) \Longrightarrow \hat{F}_a(\omega, \bar{\beta}_m) & & & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \tau_k^{(n)}, \mu_k & & \Delta\omega, \omega, S_x(\omega) & & \hat{P}_a(\omega_1, \omega_2) \end{array}$$

Изучению особенностей решения задач, связанных с моделированием и построением ортогональных моделей типовых функциональных вероятностных характеристик и предназначен предлагаемый вычислительный практикум.

# 1. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

**Цель работы:** изучение основных свойств классических ортогональных полиномов, приобретение навыков работы с ними.

## 1.1. Теоретические основы вычислительного практикума

Рассмотрим основные понятия и определения, необходимые для описания и исследования ортогональных полиномов и функций, применяемых для построения функциональных вероятностных характеристик случайных процессов [7, 17, 21 - 28, 51, 53].

**Определение 1.** Функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется **функцией с суммируемым квадратом**, если

$$\int_a^b f^2(x)dx < \infty. \quad (1.1)$$

Множество всех функций с суммируемым квадратом обозначается обычно символом  $L_2$  -  $f(x) \in L_2$ . Отметим, что и  $c f(x) \in L_2$ , где  $c = const$ .

**Определение 2.** **Нормой** функции  $f(x)$  называется число, определяемое выражением

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}. \quad (1.2)$$

Отметим, что

1.  $\|f\| \geq 0$ , причем  $\|f\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  тождественно равно нулю;
2.  $\|cf\| = |c|\|f\|$  и, в частности  $\|f\| = \|-f\|$ ;
3.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ .

Введение нормы позволяет рассматривать  $L_2$  как метрическое пространство, в котором можно производить измерения, если принять число

$$\rho(f, g) = \|f - g\|$$

за расстояние между элементами  $f$  и  $g$  класса  $L_2$ .

При этом расстояние  $\rho(f, g)$  обладает следующими свойствами:

1.  $\rho(f, g) \geq 0$ , причем  $\rho(f, g) = 0$  тогда и только тогда, когда  $f = g$ ;
2.  $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ ;
3.  $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$ .

Если на некотором множестве  $A$  элементов любой природы задана функция  $\rho(f, g)$ , то множество  $A$  называют метрическим пространством. Следовательно, множество  $L_2$  - метрическое пространство. Впервые эту точку зрения на  $L_2$  развил Д. Гильберт, поэтому  $L_2$  часто называют пространством Гильберта.

**Определение 3.** Элемент  $f$  пространства  $L_2$  называется пределом последовательности  $f_1, f_2, \dots$ , элементов этого же пространства, если всякому  $\varepsilon > 0$  отвечает такое  $N$ , что при всех  $n > N$  будет выполняться  $\|f - f_n\| < \varepsilon$ , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \quad (1.3)$$

Этот вид сходимости последовательности функций называется **сходимостью в среднем**.

**Определение 4.** Две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , заданные на отрезке  $[a, b]$ , называются **взаимно ортогональными**, если

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \quad (1.4)$$

**Определение 5.** Функция  $f_n(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется **нормированной**, если

$$\int_a^b f_n^2(x)dx = 1. \quad (1.5)$$

Отметим, что в общем случае  $\int_a^b f^2(x)dx = \|f\|^2$  и  $f_n(x) = \frac{f(x)}{\|f\|}$ .

**Определение 6.** Система функций  $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$ , заданных на отрезке  $[a, b]$ , называется **ортонормальной** системой, если каждая функция системы нормирована, а любые две функции системы ортогональны. Иначе говоря, система функций  $\{\psi_k(x)\}$  **ортонормальна**, если

$$\int_a^b \psi_{n,k}(x)\psi_{n,n}(x)dx = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Определение 7.** Система функций  $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$ , заданных на отрезке  $[a, b]$ , называется **ортogonalной** системой, если любые две функции системы ортогональны:

$$\int_a^b \psi_k(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.7)$$

Отметим, что  $\psi_{n,k}(x) = \frac{\psi_k(x)}{\|\psi_k\|}$ .

**Определение 8.** Пусть  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  есть ортонормальная система и  $f(x)$  некоторая функция из  $L_2$ . Тогда числа

$$\beta_k = \int_a^b f(x)\psi_{n,k}(x)dx \quad (1.8)$$

называются коэффициентами Фурье функции  $f(x)$  в системе функций  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ .

Для ортогональной системы  $\{\psi_k(x)\}$  коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  определяются в виде

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_a^b f(x)\psi_k(x)dx. \quad (1.9)$$



**Определение 9.** Ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_{n,k}(x) \quad (1.10)$$

называется рядом Фурье функции  $f(x)$  в системе  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ .

Рассмотрим, насколько близка в пространстве Гильберта частная сумма ряда Фурье функции  $f(x)$

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x), \quad (1.11)$$

к самой этой функции, т.е. вычислим  $\|f - f_m\|^2$ . С учетом свойств ортогональности (см. определение 6), получим

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_{n,k}(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2. \quad (1.12)$$

Это равенство называется **тождеством Бесселя**. Так как его левая часть не отрицательна, то из него следует **неравенство Бесселя**

$$\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.13)$$

Поскольку  $m$  произвольно, то **неравенство Бесселя** можно представить в усиленной форме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.14)$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 = \|f\|^2, \quad (1.15)$$

то это равенство носит название **формулы замкнутости или равенства Парсеваля**.

С учетом (1.15) формулу (1.12) представим в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_m\| = 0. \quad (1.16)$$

Иначе говоря, формула замкнутости означает, что частные суммы  $f_m(x)$  ряда Фурье функции  $f(x)$  **сходятся в среднем** к этой функции.

Для ортогональной системы функций выражение (1.12) приведем к виду

$$\|f - f_m\|^2 = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(x) \right]^2 dx = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (1.17)$$

**Определение 10.** Ортонормальная система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  называется **замкнутой**, если формула замкнутости имеет место для любой функции из  $L_2$ .

**Теорема 10.1.** Если система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  замкнута, то для любой пары функций  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L_2$  будет

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \quad (1.18)$$

$$\text{где } a_k = \int_a^b f(x) \psi_{n,k}(x) dx, \quad (1.19)$$

$$b_k = \int_a^b g(x) \psi_{n,k}(x) dx. \quad (1.20)$$

Эта формула называется **обобщенной формулой замкнутости**.

**Следствие.** Если система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  замкнута и  $f(x) \in L_2$ , то ряд Фурье  $f(x)$  в системе  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  можно почленно интегрировать по любому измеримому множеству  $E \subset [a, b]$ , т.е.

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \int_E \psi_{n,k}(x) dx. \quad (1.21)$$

**Определение 11.** Система функций  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ , заданных на отрезке  $[a, b]$  и принадлежащих  $L_2$  называется **полной**, если в  $L_2$  не существуют отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям  $\{\psi_{n,k}(x)\}$ .

**Теорема.** Для того, чтобы ортонормальная система  $\{\psi_{n,k}(x)\}$  была полна, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнута.

**Определение 12.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана положительная непрерывная функция  $\mu(x)$ . Система функций  $\{\varphi_k(x)\}$ , заданная на отрезке  $[a, b]$  называется **ортogonalной (первое условие ортогональности)** на этом отрезке с весом  $\mu(x)$ , если

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \|\varphi_k\|^2, & \text{если } k = n; \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases} \quad (1.22)$$

Из ортогональности системы  $\{\varphi_k(x)\}$  с весом  $\mu(x)$  следует ортогональность системы  $\psi_k(x) = \sqrt{\mu(x)} \varphi_k(x)$ . Отметим, что в этом случае  $\|\varphi_k\| = \|\psi_k\|$ .

**Определение 13.** Все нули ортогонального многочлена  $\psi_k(x)$  действительны, различны и расположены в интервале  $(a, b)$  - **второе условие ортогональности**.

**Определение 14.** Система  $\Phi_n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  называется линейно независимой, если

$$\sum_{j=1}^n C_j \varphi_j = 0, \quad (1.23)$$

только тогда, когда все  $C_j = 0$ .

Важным аппаратом многих исследований является ортогонализация заданной системы элементов гильбертова пространства. Если задана линейно независимая система элементов  $\Phi_n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , можно построить ортогональную линейно независимую систему  $\Psi_n = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  элементов вида

$$\psi_j = \sum_{i=1}^j b_{ji} \varphi_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.24)$$

где  $b_{ii} = 1$ .

Совокупность соотношений (1.24) при  $j \leq n$  можно представить в виде

$$\psi_n = B_n \Phi_n, \quad (1.25)$$

где

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ b_{31} & b_{32} & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

и  $\Psi_n$ ,  $\Phi_n$  являются вектор-столбцами из соответствующих элементов. В то же время, перенося все  $\psi_i$  из правой части в левую, получим

$$\Phi_n = A_n \Psi_n,$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}; \quad (1.27)$$

матрицу  $B_n$  иногда называют матрицей ортогонализации. Так как  $\det B_n = 1$ , то преобразование, задаваемое матрицей  $B_n$ , является невырожденным и переводит линейно независимую систему элементов  $\Phi_n$  в линейно независимую систему  $\Psi_n$ .

В силу линейной независимости системы функций  $\Phi_n$  отсюда следует, что  $B_n = A_n^{-1}$ .

При построении ортогональных многочленов в качестве элементов системы функций  $\Phi_j$  берутся функции  $1, x, x^{j-1}$  и производится ортогонализация по описанной выше процедуре. Получаемые многочлены

$$\psi_j(x) = x^{j-1} + \sum_{i=1}^{j-1} b_{ji} x^{i-1} \quad (1.28)$$

называются ортогональными многочленами, соответствующими весу  $\mu(x)$  и отрезку ортогональности  $[a, b]$ . Иногда ортогональными многочленами, соответствующими весу  $\mu(x)$ , называют многочлены  $g_j(x) = \alpha_j \psi_j(x)$ , в которых величины  $\alpha_j$  подбираются из каких-либо дополнительных соображений.

Ответ на вопрос, каким образом определяется весовая функция ортогональных полиномов, дает решение дифференциального уравнения Пирсона [53]:

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2}, \quad (1.29)$$

в правой части которого все коэффициенты действительны.

Вид решения этого уравнения и область существования зависят от многочленов

$$A(x) = p_0 + p_1 x; \quad (1.30)$$

$$B(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2. \quad (1.31)$$

Рассмотрим решения уравнения (1.29) в зависимости от коэффициентов многочленов (1.30) и (1.31) и выделим те из них, которые на всей связной области своего существования могут быть весовой функцией, и, следовательно, могут определять некоторую систему ортогональных многочленов, а именно, те системы, которые будут использоваться при последующем анализе.

Пусть многочлен  $B(x)$  не имеет нулей, т. е.  $q_2 = 0$ ,  $q_1 \neq 0$ . Тогда без нарушения общности можно считать  $q_0 = 0$ , так как это достигается линейным преобразованием независимого переменного, а уравнение (1.29) примет вид:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} - \beta, \quad (1.32)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые постоянные.

Его решение

$$y = \mu(x) = c_1 x^\alpha e^{-\beta x} \quad (1.33)$$

будет весовой функцией на полусегменте  $[0, \infty)$  при условиях  $c_1 > 0$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > 0$ .

Многочлены, ортогональные с весом (1.9) и  $\beta = 1$ , можно рассматривать как обобщенные многочлены Сонина-Лагерра [6, 53].

Пусть многочлен  $B(x)$  имеет два действительных и различных нуля. Тогда уравнение Пирсона можно представить в виде

$$\frac{y'}{y} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_2(x-a)(x-b)} = \frac{\beta}{x-a} - \frac{\alpha}{b-x}, \quad (1.34)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые постоянные, а  $a < b$ .

Решение уравнения (1.34)

$$y = \mu(x) = c_2 (b-x)^\alpha (x-a)^\beta \quad (1.35)$$

определено на интервале  $(a, b)$  и весовой функцией может быть только при условиях  $c_2 > 0$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ . Линейным преобразованием функция (1.35) сводится к весовой функции многочленов Якоби.

Легко видеть, что при тех же коэффициентах уравнение Пирсона имеет решения и на интервалах  $(-\infty, a)$  и  $(b, \infty)$ , но полученные решения не могут служить весовыми функциями [53].

Ортогональные многочлены полученных весовых функций, а именно Якоби и Сонина-Лагерра, относятся к числу классических ортогональных многочленов.

Заметим, при параметрах  $q_1 = q_2 = 0$ ,  $q_0 \neq 0$  решением уравнения (1.29) является весовая функция многочленов Эрмита, которые также относятся к числу классических.

Для классических ортогональных многочленов имеет место весьма важное представление через весовую функцию, которое называется обобщенной формулой Родрига [6, 53].

Если весовая функция  $h(x)$  на интервале ортогональности удовлетворяет уравнению (1.29), то функция

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\mu(x)} [\mu(x) B^{(n)}(x)]^{(n)} \quad (1.36)$$

есть многочлен степени не выше  $n$ .

В дальнейшем при анализе будут использоваться системы ортогональных многочленов Сонина-Лагерра  $L_k^{(\alpha)}(x)$  (1.33) при  $\beta = 1$  и Якоби  $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$  (1.35) при задании некоторых частных параметров, а именно: Сонина-Лагерра (0) (Лагерра)  $L_k^{(0)}(x) = L_k(x)$ ; Сонина-Лагерра (1)  $L_k^{(1)}(x)$ ; Сонина-Лагерра (2)  $L_k^{(2)}(x)$ ; Якоби  $(-0,5, 0)$   $P_k^{(-0,5,0)}(x)$ ; Якоби  $(0,5, 0)$   $P_k^{(0,5,0)}(x)$ ; Якоби  $(0, 0)$  (Лежандра)  $P_k^{(0,0)}(x) = Leg_k(x)$ ; Яко-

би (1, 0)  $P_k^{(1,0)}(x)$ ; Якоби (2, 0)  $P_k^{(2,0)}(x)$ ; Якоби (0, 1)  $P_k^{(0,1)}(x)$ ; Якоби (0, 2)  $P_k^{(0,2)}(x)$ ; Якоби (-0,5, -0,5) (Чебышева 1-ого рода)  $P_k^{(-0,5,-0,5)}(x) = T_k(x)$ ; Якоби (0,5, 0,5) (Чебышева 2-ого рода)  $P_k^{(0,5,0,5)}(x) = U_k(x)$ , а также широко применяемые в прикладном анализе ортогональные полиномы Дирихле 1  $D_k(x)$  и Дирихле 2  $Dir_k(x)$ . Следует отметить, что ортогональные полиномы Дирихле не относятся к классическим полиномам. Вид ортогональных полиномов представлен в Приложении 1.

Общие представления Родрига для ортогональных базисов Сонина-Лагерра и Якоби соответственно имеют вид:

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{I}{k!} x^{-\alpha} e^x (x^{\alpha+k} e^{-x})^{(k)}; \quad (1.37)$$

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-I)^k}{k!2^k} (I-x)^{-\alpha} (I+x)^{-\beta} \left[ (I-x)^{\alpha} (I+x)^{\beta} (I-x^2)^k \right]^{(k)}. \quad (1.38)$$

Явные выражения многочленов представлены в таблице 1.1.

При проведении аналитических преобразований с использованием ортогональных многочленов более удобным является представление в виде конечного ряда, получаемого проведением операции дифференцирования с помощью формулы Лейбница [5] к выражению (1.36). В общем случае представления (1.37) и (1.38) в виде конечного ряда имеют вид [53]:

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^k C_{k+\alpha}^{k-s} \frac{(-x)^s}{s!}; \quad (1.39)$$

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+k+I)\Gamma(\beta+k+I)}{k!2^k} \sum_{s=0}^k \frac{C_k^s (x-I)^{k-s} (x+I)^s}{\Gamma(\alpha+k-s+I)\Gamma(\beta+s+I)}. \quad (1.40)$$

Форма представления ортогональных многочленов в виде конечного ряда является более удобной и наглядной для анализа и проведения различных операций над ними, в частности, операций интегрирования и дифференцирования. Однако такие выражения для ортогональных многочленов обладают существенным недостатком при реализации на ЭВМ: невозможность вычисления многочлена высокого порядка из-за необходимости вычисления комбинаторного числа сочетаний.

Форма представления ортогональных полиномов в виде конечного ряда представлена в таблице 1.1.

Указанный недостаток может быть исправлен использованием рекуррентных соотношений. Общие выражения для рекуррентных соотношений рассматриваемых ортогональных базисов представлены ниже [53]:

$$L_{k+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+2k+I-x)}{(k+I)} L_k^{(\alpha)}(x) - \frac{(\alpha+k)}{(k+I)} L_{k-1}^{(\alpha)}(x); \quad (1.41)$$

$$P_{k+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{[(\alpha+\beta+2k+2)(\alpha+\beta+2k)x + \alpha^2 - \beta^2](\alpha+\beta+2k+I)}{2(k+I)(\alpha+\beta+k+I)(\alpha+\beta+2k)} P_k^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{(\alpha+k)(\beta+k)(\alpha+\beta+2k+2)}{(k+I)(\alpha+\beta+k+I)(\alpha+\beta+2k)} P_{k-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (1.42)$$

Применение рекуррентных соотношений (1.41) и (1.42) позволяет резко снизить как временные затраты, так и ресурсные, исследовать ортогональные полиномы высоких порядков и их свойства.

Орт. полиномы	Представление в форме Родрига	Представление в виде конечного ряда
Якоби $P_k^{(-1/2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} (1-x)^{1/2} \left( \frac{1}{(1-x)^{1/2}} (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(1/2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \left( (1-x)^{1/2} (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(1,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)} \left( (1-x) (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(2,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x)^2} \left( (1-x)^2 (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(0,1)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1+x)} \left( (1+x) (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \left( \frac{x+1}{2} \right)^s$
Якоби $P_k^{(0,2)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1+x)^2} \left( (1+x)^2 (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^{k-s} \left( \frac{x+1}{2} \right)^s$
Лежандра $Leg_k(x) = P_k^{(0,0)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \left( (1-x^2)^k \right)^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \left( \frac{x-1}{2} \right)^s$
Чебышева 1-ого рода $T_k(x) = P_k^{(-1/2,-1/2)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} (1-x^2)^{1/2} \left( (1-x^2)^{k-1/2} \right)^{(k)}$	$\frac{1}{2^k} \sum_{s=0}^k C_{2k}^{2s} (x-1)^{k-s} (x+1)^s$
Чебышева 2-ого рода $U_k(x) = P_k^{(1/2,1/2)}(x)$	$\frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \left( (1-x^2)^{k+1/2} \right)^{(k)}$	$\frac{1}{2^k(k+1)} \sum_{s=0}^k C_{2k+2}^{2s+1} (x-1)^{k-s} (x+1)^s$
Дирихле 1 $D_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{s/2}$
Дирихле 2 $Dir_k(x)$	отсутствует	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \left( \frac{1-x}{2} \right)^{s/2}$
Лагерра $L_k(x) = L_k^{(0)}(x)$	$\frac{1}{k!} e^x (x^k e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-x)^s}{s!}$
Сонина-Лагерра $L_k^{(1)}(x)$	$\frac{1}{k! x} e^x (x^{k+1} e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-x)^s}{s!}$
Сонина-Лагерра $L_k^{(2)}(x)$	$\frac{1}{k! x^2} e^x (x^{k+2} e^{-x})^{(k)}$	$\sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-x)^s}{s!}$

Отметим, что, в общем случае, для построения и исследования ортогональных моделей функциональных вероятностных характеристик необходимо для каждой ортогональной системы определить [21]:

1. интервал ортогональности  $[a, b]$ ;

2. вес;
3. аналитическое выражение ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
4. рекуррентную формулу определения ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
5. норму ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
6. значение ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка на концах сегмента ортогональности (в «нуле»);
7. длительность ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
8. преобразование Фурье ортогонального полинома (функции)  $k$ -го порядка;
9. выражения для коэффициентов разложения для различных моделей исследуемой функциональной характеристики случайных процессов;
10. выражения для оценки методической погрешности аппроксимации функциональной характеристики;
11. аналитические выражения для оценки параметров ортогональных функций;
12. выражения для оценки методической погрешности коэффициентов разложения функциональной характеристики и её составляющих.

Следует отметить, что задачи 1 – 8 инварианты к виду вероятностной функциональной характеристики, а – 9 – 12 решаются для конкретных случаев.

В предлагаемой работе, состоящей из пяти частей, рассматриваются только часть из перечисленных вопросов, характерных для ортогональных полиномов.

Первая часть посвящена представлению ортогональных полиномов различными способами. Одним из важнейших алгебраических свойств ортогональных полиномов является возможность представления через формулу Родрига [53] (см. (1.36)).

Во второй части требуется определить интервал ортогональности ортогональных полиномов  $[a, b]$ , под которым понимается их интервал существования.

Находя значения полиномов на границах сегмента ортогональности, необходимо получить значения выражений  $\psi_k(a)$  и  $\psi_k(b)$ .

В третьей части работы производится расчет нормы ортогональных многочленов, которая определяется выражением (1.22).

С другой стороны, норма ортогональных полиномов  $\|\psi_k\|^2$  рассчитывается по аналитическим выражениям, данным в таблице 1.2. Там же можно найти выражения для соответствующих весовых функций.

В четвертой части необходимо произвести проверку 1 – ого необходимого и достаточного условия ортогональности.

В пятой части необходимо произвести проверку 2 – ого условия ортогональности.

В результате проведенных исследований необходимо оформить отчет и сделать вывод по проделанной работе.

## Основные характеристики ортогональных полиномов

Таблица 1.2

Орт. полиномы	$\mu(x)$	$\ \psi_k\ ^2$
Якоби $P_k^{(-1/2,0)}(x)$	$\frac{l}{\sqrt{l-x}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{4k+1}$
Якоби $P_k^{(1/2,0)}(x)$	$\sqrt{l-x}$	$\frac{4\sqrt{2}}{4k+3}$
Якоби $P_k^{(1,0)}(x)$	$l-x$	$\frac{2}{k+1}$
Якоби $P_k^{(2,0)}(x)$	$(l-x)^2$	$\frac{8}{2k+3}$
Якоби $P_k^{(0,1)}(x)$	$l+x$	$\frac{2}{(k+1)}$
Якоби $P_k^{(0,2)}(x)$	$(l+x)^2$	$\frac{8}{(2k+3)}$
Лежандра $Leg_k(x) = P_k^{(0,0)}(x)$	$l$	$\frac{2}{2k+1}$
Чебышева 1-ого рода $T_k(x) = P_k^{(-1/2,-1/2)}(x)$	$\frac{l}{\sqrt{l-x^2}}$	$\begin{cases} \pi, k=0 \\ \pi/2, k \neq 0 \end{cases}$
Чебышева 2-ого рода $U_k(x) = P_k^{(1/2,1/2)}(x)$	$\sqrt{l-x^2}$	$\frac{\pi}{2(k+1)^2}$
Дирихле 1 $D_k(x)$	$l$	$\frac{l}{k+1}$
Дирихле 2 $Dir_k(x)$	$l$	$\frac{2}{k+1}$
Лагерра $L_k(x) = L_k^{(0)}(x)$	$e^{-x}$	$l$
Сонина-Лагерра $L_k^{(1)}(x)$	$xe^{-x}$	$k+1$
Сонина-Лагерра $L_k^{(2)}(x)$	$x^2 e^{-x}$	$(k+1)(k+2)$

### 1.2. Задание на самостоятельную работу

1. Представление ортогональных полиномов  $k$  - ого порядка:
  - 1.1. Представить ортогональные полиномы в форме Родрига (если есть) и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков;
  - 1.2. Представить ортогональные полиномы в виде конечного ряда и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Сравнить результат с пунктом 1.1.



2. Определить интервал ортогональности  $[a, b]$ . Рассчитать ортогональные полиномы  $k$  - ого порядка на концах интервала ортогональности.
3. Определение нормы ортогональных полиномов:
  - 3.1. Определить значения нормы ортогональных полиномов из выражения (1.22). Результат представить в виде матрицы значений с разрядностью  $(k, m)$ , привести графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$ .
  - 3.2. Определить значения нормы ортогональных полиномов  $k$  - ого порядка, используя выражения, приведенные в таблице 1.2. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы  $(k, m)$ , полученной в пункте 3.1.
4. Проверить выполняемость 1 – ого условия ортогональности.
5. Проверить выполняемость 2 – ого условия ортогональности.
6. Оформить отчет.

### 1.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
  2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Аналитические выражения и графики ортогональных полиномов первых шести порядков заданного ортогонального базиса (пункт 1.1 и пункт 1.2) в полученном интервале ортогональности (пункт 2).
  6. Матрицу значений нормы ортогональных полиномов с разрядностью  $(k, m)$  и соответствующую ей графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$  (пункт 3.1).
  7. Вектор значений нормы ортогональных полиномов (пункт 3.2).
  8. График, иллюстрирующий проверку 1 – ого условия ортогональности (пункт 4).
  9. График, иллюстрирующий проверку 2 – ого условия ортогональности (пункт 5).
  10. Выводы.
- Пример выполнения вычислительного практикума 1 приведен в Приложении 2.

### 1.4. Контрольные вопросы

1. Что называют интервалом ортогональности ортогональных многочленов? От чего зависит его значение?
2. Что такое весовая функция и как она влияет на поведение ортогонального многочлена?
3. Чем ортогональная линейно независимая система функций отличается от линейно независимой системы функций? Что понимают под матрицей ортогонализации?
4. Что такое ортогональный многочлен и каковы его основные характеристики?
5. Сформулируйте 1 – ое и 2 – ое условия ортогональности. О чем говорит их выполняемость?

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** исследование свойств ортогональных функций и определение их основных характеристик.

### 2.1. Теоретические основы вычислительного практикума

При решении значительного количества прикладных задач наиболее часто применяются ортогональные функции, определенные на интервале  $[0, \infty)$  [6, 21]. Как правило, они получаются из соответствующих ортогональных полиномов путем введения замены:

$$x = 1 - ae^{-c\gamma\tau}, \quad (2.1)$$

где  $\gamma$  – параметр масштаба;  $c$  – целое число, определяемое для каждого ортогонального базиса;  $a$  – параметр, который зависит от заданного сегмента ортогональности (см. таблицу 2.1).

С учетом введенной замены (2.1) выражение для определения квадрата нормы (1.7) примет следующий вид:

$$\int_0^\infty \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \mu(1 - ae^{-c\gamma\tau}) d(1 - ae^{-c\gamma\tau}) = \begin{cases} \|\psi_k\|^2, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (2.2)$$

Проделив ряд преобразований, получим:

$$\int_0^\infty \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \psi_m(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \mu(1 - ae^{-c\gamma\tau}) e^{-c\gamma\tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\|\psi_k\|^2}{ac\gamma}, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) показывает, что ортогональные полиномы  $\psi_k(x)$  преобразуются в ортогональные функции:

$$\psi_{k,f}(\tau, \gamma) = \psi_k(1 - ae^{-c\gamma\tau}) \sqrt{\mu(1 - ae^{-c\gamma\tau})} e^{-\frac{c\gamma\tau}{2}}, \quad (2.4)$$

определенные на интервале  $[0, \infty)$  с весом  $\mu(\tau, \gamma) = 1$  и нормой

$$\|\psi_{k,f}\|^2 = \frac{\|\psi_k\|^2}{ac\gamma}. \quad (2.5)$$

Ортогональные функции  $k$ -ого порядка

$$\psi_k(\tau, \gamma) = \psi_{k,f}(\tau, \gamma) / \psi_{k,f}(0, \gamma)$$

в различных базисах и их основные характеристики представлены в таблице 2.1, а вид – в Приложении 3. По аналогии с импульсной переходной характеристикой можно ввести понятие длительности ортогональной функции, применяемое в различных приложениях [21]:

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \frac{1}{\psi_k(0, \gamma)} \int_0^\infty \psi_k(\tau, \gamma) d\tau; \quad (2.6)$$

$$\tau_{k,u}^{(4)} = \int_0^\infty \psi_k^2(\tau, \gamma) d\tau. \quad (2.7)$$

Форма представления и характеристики ортогональных функций

Таблица 2.1

Орт. функции	Представление в виде конечного ряда $\psi_k(\tau, \gamma)$	$(a, c)$	$\ \psi_k\ ^2$	$\psi_k(0, \gamma/\alpha)$
$P_k^{(-l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-l/2}^s (-1)^s e^{\frac{(4s+l)\gamma\tau}{2}}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{\gamma(4k+1)}$	$(-1)^k$
$P_k^{(l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+l/2}^s (-1)^s e^{\frac{(4s+3)\gamma\tau}{2}}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{\gamma(4k+3)}$	$(-1)^k$
$P_k^{(l,0)}(\tau, \gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+l}^s (-1)^s e^{-(s+l)\gamma\tau}$	$(2, 1)$	$\frac{1}{2\gamma(k+1)}$	$(-1)^k$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s e^{-(2s+3)\gamma\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{2\gamma(2k+3)}$	$(-1)^k$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{4\gamma(k+1)^3}$	$(-1)^k$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\gamma\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{2}{\gamma(2k+3)(k+1)^2(k+2)^2}$	$(-1)^k$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s e^{-(2s+1)\alpha\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{2\alpha(2k+1)}$	$(-1)^k$
$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} e^{-\gamma\tau}, k=0 \\ \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} e^{-[2(k-s)+1]\gamma\tau}, k \neq 0 \end{cases}$	$(2, 2)$	$\begin{cases} \frac{\pi}{4\gamma}, k=0 \\ \frac{\pi}{8\gamma}, k \neq 0 \end{cases}$	$(-1)^k$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} e^{-[2(k-s)+1]\gamma\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{\pi}{8\gamma(k+1)^2}$	$(-1)^k$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+l}^s (-1)^{k-s} e^{-(s+l)\alpha\tau}$	$(1, 2)$	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	$1$
$Dir_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+l}^s (-1)^{k-s} e^{-(s+l)\alpha\tau}$	$(2, 2)$	$\frac{1}{2\alpha(k+1)}$	$1$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\alpha\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\alpha\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{1}{\alpha}$	$1$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\gamma\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma^2}$	$1$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}$	$\left(1, -\frac{\ln(1-\gamma\tau)}{\gamma\tau}\right)$	$\frac{4}{(k+1)(k+2)\gamma^3}$	$1$

В качестве примера рассмотрим ортогональные полиномы  $D_k(x)$  на интервале  $[0, 1]$  с весом  $\mu(x) = 1$

$$D_k(x) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} (1-x)^{\frac{s}{2}} \quad (2.8)$$

и преобразуем их в ортогональные функции на интервале  $[0, \infty)$ .

Отметим, что значение ортогональных полиномов в «нуле» и норма [21]

$$D_k(0) = 1, \quad (2.9)$$

$$\|D_k\|^2 = \int_0^1 D_k(x) D_m(x) \mu(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (2.10)$$

В соответствии с (2.1) для преобразования интервала  $[0, 1]$  в диапазон  $[0, \infty)$  введем замену переменных  $x = 1 - e^{-2\alpha\tau}$ . С учетом введенной замены выражение (2.10) примет вид:

$$2\alpha \int_0^\infty D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) D_m(1 - e^{-2\alpha\tau}) e^{-2\alpha\tau} \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & m = k; \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (2.11)$$

Соотношение (2.11) показывает, что ортогональные полиномы преобразуются в функции, ортогональные на интервале  $[0, \infty)$  с весом  $\mu(\tau) = 1$ .

$$D_k(\tau, \alpha) = e^{-\alpha\tau} D_k(1 - e^{-2\alpha\tau}) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} e^{-(s+1)\alpha\tau}. \quad (2.12)$$

Квадрат нормы и длительность с учетом (2.5) и (2.10) имеет вид:

$$\int_0^\infty D_k(\tau, \alpha) D_m(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha(k+1)}, & m = k; \\ 0, & m \neq k, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^\infty D_k(\tau, \alpha) d\tau = \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha}. \quad (2.14)$$

Способ представления ортогональных полиномов и функций в виде комбинаторных сумм (см. таблицу 1.1 и таблицу 2.1) позволяет использовать унифицированный подход к вычислению конечных и бесконечных сумм путем их сведения к одномерным и кратным интегралам, как правило, контурным.

Одним из таких унифицированных подходов является метод производящих функций, являющийся одним из основных аналитических подходов получения комбинаторных тождеств [11]. Производящие функции, либо производящие интегралы, могут быть использованы для изучения свойств систем многочленов, включая нахождение явных формул, получение и решение рекуррентных соотношений (дифференциальных, интегральных и дифференциально-разностных уравнений), связывающих эти последовательности чисел, получение асимптотических формул для производимых чисел (функций) [11].

Однако при решении задач с определением и изучением свойств ортогональных многочленов, рассматриваемых нами, воспользуемся общим унифицируемым подходом – методом коэффициентов.

Опишем необходимую последовательность действий при реализации данного метода.

На первом этапе вычислений нами в простейшем виде реализуется фундаментальная идея об интегральном представлении решения, удовлетворяющего заданным краевым условиям. На заключительном этапе, в случае представления решения с помощью контурных интегралов, используется теория вычетов одного или нескольких комплексных переменных [11, 52]. Главным отличием данного метода вычисления комбинаторных сумм от известных ранее подходов является создание единой стандартизированной процедуры получения интегральных представлений вычисляемых сумм с полным обоснованием данного метода, как и метода производящих функций, с помощью теории одномерных и кратных вычетов [52]. В случае формальных рядов вводится понятие коэффициентов *Coef*, непосредственно связанное с понятием вычета из теории аналитических функций и пригодное для использования различных функций, включая степенные. Связь с теорией вычетов позволила выписать свойства *Coef*, аналогичные свойствам вычета, и унифицировать схему метода коэффициентов, независимо от того, какие ряды: сходящиеся либо формальные - используется при вычислениях [11].

Для работы с *Coef* и проведения различных операций над ними существует правила, записанные в табличном виде и приведенные в приложении Б. Там же приведены интегральные представления комбинаторных чисел [11].

Результат использования метода коэффициентов можно увидеть на примере получения соотношения для ортогональных функций Якоби:

$$P_k^{(\alpha,0)}(0,\gamma) = (-1)^k, \quad (2.15)$$

где

$$P_k^{(\alpha,0)}(0,\gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s. \quad (2.16)$$

Последовательность действий, реализующая метод коэффициентов с использованием правил работы над *Coef* представлена ниже.

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s &= \sum_{s=0}^k \underset{u}{Coef} \left( (1+u)^k u^{-s-1} \right) \cdot \underset{v}{Coef} \left( (1+v)^{k+s+\alpha} v^{-s-\alpha-1} \right) \cdot (-1)^s = \\ &= \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-\alpha-1} \cdot \left( \sum_{s=0}^k \left( -\frac{(1+v)}{v} \right)^s \underset{u}{Coef} \left( (1+u)^k u^{-s-1} \right) \right) = \\ &= \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-\alpha-1} \cdot \left( 1 - \frac{(1+v)}{v} \right)^k = \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-\alpha-1} \cdot (-1)^k v^{-k} = \\ &= (-1)^k \underset{v}{Coef} (1+v)^{k+\alpha} v^{-k-\alpha-1} = (-1)^k C_{k+\alpha}^{k+\alpha} = (-1)^k. \end{aligned}$$

В справедливости полученного соотношения несложно убедиться [21, 32, 35, 36]. Для других ортогональных функций подход аналогичен.

Разумеется, с использованием данного подхода можно реализовать аналитические преобразования более сложных комбинаторных сумм и выражений. В качестве демонстрации сказанному представим аналитические преобразования с использованием *Coef* при получении соотношения также для ортогональных функций Якоби для общности:

$$\|P_k^{(\alpha,0)}\|^2 = \frac{I}{(2k + \alpha + l)c\gamma}, \quad (2.17)$$

где

$$\|P_k^{(\alpha,0)}\|^2 = \int_0^\infty P_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) P_m^{(\alpha)}(\tau, \gamma) d\tau; \quad (2.18)$$

$$P_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-l)^s e^{-c\left(s+\frac{\alpha+l}{2}\right)\gamma\tau}; \quad (2.19)$$

где  $c$  - параметр замены (2.1).

Заметим, что при проведении аналитических преобразований над равенством цифровым эквивалентом указывается используемое при получении промежуточного результата правило (см. Приложение 4).

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-c(\alpha+l)\gamma\tau} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-l)^s e^{-cs\gamma\tau} \sum_{s=0}^m C_m^s C_{m+s+\alpha}^{s+\alpha} (-l)^s e^{-cs\gamma\tau} d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+l)\gamma\tau} \sum_{s=0}^k \underset{u}{Coef}(1+u)^k u^{-s-l} \underset{v}{Coef}(1+v)^{k+s+\alpha} u^{-k+s+\alpha-l} (-l)^s e^{-cs\gamma\tau} \times \\ & \times \sum_{s=0}^m \underset{u}{Coef}(1+u)^m u^{-s-l} \underset{v}{Coef}(1+v)^{m+s+\alpha} u^{-m+s+\alpha-l} (-l)^s e^{-cs\gamma\tau} d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+l)\gamma\tau} \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{k+\alpha}}{v^{k-\alpha+l}} \left( \sum_{s=0}^k \left( -\frac{(1+v)v}{e^{cs\gamma\tau}} \right)^s \underset{u}{Coef}(1+u)^k u^{-s-l} \right) \times \\ & \times \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{m+\alpha}}{v^{m-\alpha+l}} \left( \sum_{s=0}^m \left( -\frac{(1+v)v}{e^{cs\gamma\tau}} \right)^s \underset{u}{Coef}(1+u)^m u^{-s-l} \right) d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+l)\gamma\tau} e^{-(k+m)c\gamma\tau} \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{k+\alpha}}{v^{k-\alpha+l}} (e^{-c\gamma\tau} - (1+v)v)^k \times \\ & \times \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{k+\alpha}}{v^{k-\alpha+l}} (e^{-c\gamma\tau} - (1+v)v)^k \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{m-k}}{v^{m-k}} d\tau = \\ & = \int_0^\infty e^{-c(\alpha+k+m+l)\gamma\tau} \underset{v}{Coef} \frac{(1+v)^{2k+2\alpha}}{v^{2k-2\alpha+l}} \underset{v}{Coef} \frac{(e^{-c\gamma\tau} - (1+v)v)^{2k}}{v} \delta_{mk}^{def} d\tau = \end{aligned}$$

$$\stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{I}{(2k + \alpha + l)c\gamma\tau}, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Справедливость получаемых соотношений после ряда аналитических преобразований с помощью указанных методов несложно проверить с использованием общих математических пакетов, либо специализированных автоматизированных систем, одной из которых является автоматизированная информационная система исследования ортогональных полиномов и функций семейства Якоби [35]. Данная система позволяет строить ортогональные полиномы и функции высоких порядков, исследовать свойства ортогональных многочленов и

влияние параметров ортогонального базиса друг на друга и на результат исследования.

## 2.2. Задание на самостоятельную работу

1. Получение ортогональных функций  $k$  - ого порядка:

1.1. Получить ортогональные функции из ортогональных полиномов  $k$  - ого порядка путем введения соответствующей замены, приведенной в таблице 2.1, и использования выражения (2.4). Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

1.2. Получить ортогональные функции, используя представление, приведенное в таблице 2.1. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков. Полученный результат сравнить с пунктом 1.1.

2. Рассчитать значения ортогональных функций  $k$  - ого порядка в «нуле».

3. Определение нормы ортогональных функций:

3.1. Определить значение нормы ортогональных функций из выражения (2.5). Результат представить в виде матрицы значений с размерностью  $(k, m)$ , привести графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$ .

3.2. Определить значения нормы ортогональных функций  $k$  - ого порядка, используя выражения, приведенные в таблице 2.1. Результат представить в виде вектора значений. Сравнить полученный результат с диагональными значениями матрицы  $(k, m)$ , полученной в пункте 3.1.

4. Рассчитать длительности, используя выражения (2.6) и (2.7). Построить графические зависимости  $\tau_{k,u}^{(2)}$  и  $\tau_{k,u}^{(4)}$  ортогональных функций  $k$  - ого порядка от параметра масштаба. Спроектировать двумерную зависимость длительности от порядка и параметра масштаба для каждого из выражений.

5. Оформить отчет.

## 2.3. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Задание.

3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.

5. Аналитические выражения и графики ортогональных функций первых шести порядков заданного ортогонального базиса (пункт 1.1 и пункт 1.2).

6. Матрицу значений нормы ортогональных функций с разрядностью  $(k, m)$  и соответствующую ей графическую интерпретацию  $(j = \overline{0, k}, i = \overline{0, m})$  (пункт 3.1).

7. Вектор значений нормы ортогональных функций (пункт 3.2).

8. Графические зависимости  $\tau_{k,u}^{(2)}(\gamma)$  и  $\tau_{k,u}^{(4)}(\gamma)$  ортогональных функций  $k$  - ого порядка.

9. Двумерные графические зависимости  $\tau_u^{(2)}(k, \gamma)$  и  $\tau_u^{(4)}(k, \gamma)$ .

10. Выводы.

Пример выполнения вычислительного практикума 2 приведен в Приложении 5.

## 2.4. Контрольные вопросы

1. Почему при решении ряда прикладных задач ортогональные полиномы предпочитают ортогональным функциям?
2. При решении каких задач целесообразно использовать ортогональные полиномы, ортогональные функции?
3. Что дает получение ортогонального многочлена с единичной весовой функцией?
4. Для каких целей вводят параметр масштаба ортогональных функций? Какие значения он может принимать?
5. Что понимают под длительностью ортогональной функции, и какой смысл она имеет?
6. Чем отличаются два введенных определения длительности? Для чего введено второе определение, и в каких случаях целесообразнее использовать данное определение?
7. О чем говорит полученная двумерная зависимость?



### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** изучение методов и приобретение навыков в определении максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций.

#### 3.1. Теоретические основы вычислительного практикума

Длительность ортогональной функции  $k$ -ого порядка  $\tau_{k \max}$  определяется в результате решения уравнения [15]:

$$|\psi_k(\tau > \tau_{k \max}, \alpha / \gamma)| \leq \Delta, \quad (3.1)$$

где  $\Delta$  – заданная погрешность,

$\alpha / \gamma$  – параметр масштаба ортогональных функций.

Таким образом, под длительностью ортогональной функции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями  $\Delta$  или  $-\Delta$ , после которой функция не выходит из коридора  $[-\Delta, \Delta]$ . На рисунке 3.1 показан пример определения длительности ортогональной функции  $k$ -ого порядка. Также, с заданной погрешностью можно считать, что вне интервала  $[0, \tau_{k \max}]$  функция тождественно равна нулю.

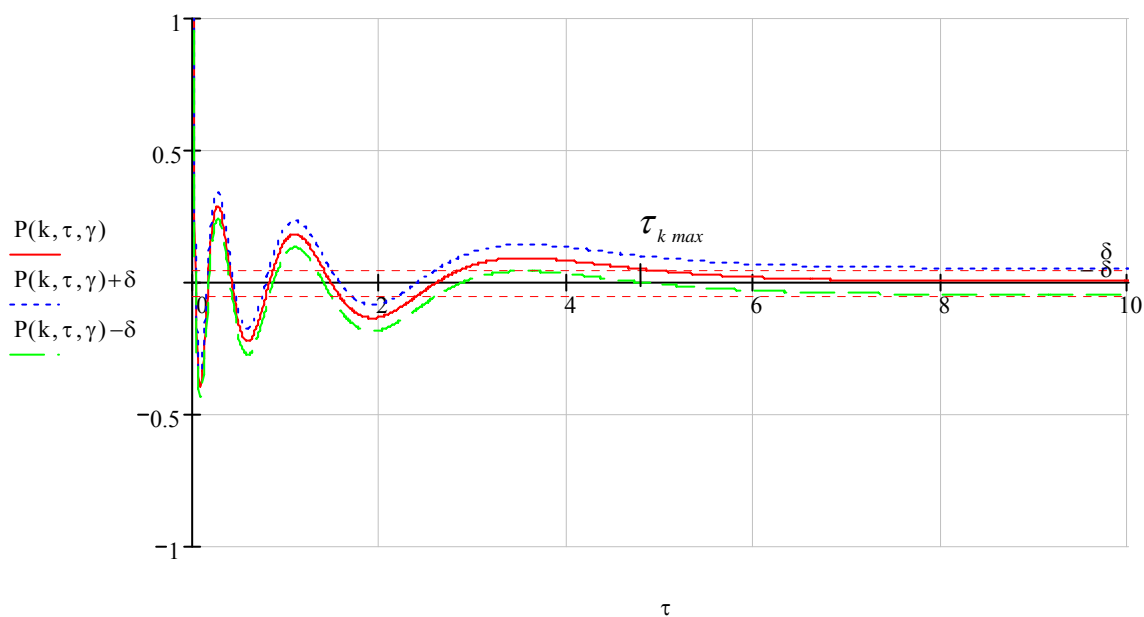


Рисунок 3.1 - Длительность ортогональной функции

Интервал дискретизации при линейной интерполяции с заданной погрешностью можно вычислить по формуле [21]:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{8\delta}{\|\psi_k''\|_{\max}}}, \quad (3.2)$$

где  $\delta$  – заданная погрешность восстановления,

$\left\| \psi_k'' \right\|_{\max}$  – максимальное по модулю значение второй производной соответствующей функции.

Число интервалов дискретизации:

$$n = \text{ent} \left[ \frac{\tau_{k \max}}{\Delta t} + 0,5 \right], \quad (3.3)$$

где  $\text{ent} [ \ ]$  – целая часть от числа,

$\tau_{k \max}$  – максимальная длительность ортогональной функции  $k$ -ого порядка,

$\Delta t$  – интервал дискретизации.

### 3.2. Задание на самостоятельную работу

1. Задать вид ортогональной функции.
2. Задать порядок ортогональной функции.
3. Задать значение параметра масштаба.
4. Задать погрешность приближения  $\delta = 0,02; 0,05; 0,1$ .
5. Построить график ортогональной функции.
6. На основании графика приблизительно определить интервал, внутри которого находится значение  $\tau_{k \max}$  для данной функции и заданном значении погрешности приближения.
7. Получить на основании общей формулы ортогональных функции частные формулы функции, ее первой, второй и третьей производных.
8. Вычислить максимум второй производной.
9. Вычислить интервал дискретизации для ортогональной функции.
10. Определить максимальную длительность ортогональной функции.
11. Вычислить количество интервалов дискретизации.
12. Занести все полученные значения (максимум второй производной, длительность функции, интервал дискретизации, число интервалов дискретизации) в таблицу.
13. Повторить пункты 4-12 для каждого из заданных значений погрешности приближения.
14. Повторить пункты 3-13 для каждого заданного значения параметра масштаба.
15. Повторить пункты 2-14 для каждого заданного порядка ортогональных функций.
16. Построить зависимость  $\tau_{k \max} = f_1(k / \alpha)$ .
17. Построить зависимость  $\tau_{k \max} = f_2(\alpha / k)$ .
18. Построить зависимость  $\Delta t = f_3(k / \alpha)$ .
19. Оформить отчет.

### 3.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Метод и алгоритм нахождения интервала дискретизации и длительности функции.
  6. Графики заданных ортогональных функций.
  7. Формулы заданных ортогональных функций и их трех первых производных.
  8. Выводы.
- Пример выполнения вычислительного практикума 3 приведен в Приложении 6.

### **3.4. Контрольные вопросы**

1. Поясните физический смысл длительности ортогональной функции?
2. Какой информацией необходимо располагать для определения интервала дискретизации ортогональных функций?
3. Как изменяется длительность ортогональной функции с увеличением её порядка?
4. Как изменяется длительность ортогональной функции с увеличением параметра масштаба?
5. Как изменяется число интервалов дискретизации с увеличением погрешности восстановления?

## 4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** исследование частотных характеристик ортогональных функций.

### 4.1. Теоретические основы вычислительного практикума

Многие задачи аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа удобнее решать с использованием частотных характеристик ортогональных функций [21, 34, 38, 45 - 47].

Рассмотрим ортогональные базисы, представленные в таблице 2.1.

Найдем преобразование Фурье ортогональных функций (см. таблицу 4.1)

$$W_k(j\omega) = \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (4.1)$$

Из результатов, представленных в таблице 4.1, видно, что преобразование Фурье ортогональных функций 1, 4-10 ( $\mu(\tau)=1$ ) можно представить в общем виде:

$$W_k(j\omega) = \frac{[\psi_k(0, \alpha)]}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{j\omega + 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}. \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) приведем к виду

$$W_k(j\omega) = \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 [\psi_k(0, \alpha)]}{1 + j2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega - 1}{j2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega + 1}. \quad (4.3)$$

Введем обозначения  $tg \varphi_s = 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$ ,  $\varphi_s = \arctg 2\|\psi_s(\alpha)\|^2 \omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} W_k(j\omega) &= \frac{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 [\psi_k(0, \alpha)]}{1 + jtg \varphi_k} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{jtg \varphi_s - 1}{jtg \varphi_s + 1} = \\ &= 2(-1)^k \|\psi_k(\alpha)\|^2 \psi_k(0, \alpha) \cos \varphi_k \exp\left(-j\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right)\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Отсюда

$$Re W_k(j\omega) = 2(-1)^k \|\psi_k(\alpha)\|^2 \psi_k(0, \alpha) \cos \varphi_k \cos\left[\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right]; \quad (4.5)$$

$$Im W_k(j\omega) = 2(-1)^{k+1} \|\psi_k(\alpha)\|^2 \psi_k(0, \alpha) \cos \varphi_k \sin\left[\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right]; \quad (4.6)$$

$$|W_k(j\omega)| = 2\|\psi_k(\alpha)\|^2 \cos \varphi_k; \quad (4.7)$$

$$\Phi_k(j\omega) = -\left(\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s\right) + \text{ent} \left[ \frac{\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s}{\pi} + 0,5 \right] \pi. \quad (4.8)$$

Частотные характеристики с использованием экспоненциальных и тригонометрических функций, представленные в виде (4.4) – (4.8), удобно применять при корреляционно-спектральном анализе [15].

Примеры частотных характеристик исследуемых ортогональных функций различных порядков, соответствующие таблице 4.1 и формуле (4.4) представлены в Приложении 7.

№	Ортогональные функции	$W_k(j\omega)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(k+1)} \left( 1 - \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^{k+1} \right)$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma^2(k+1)(k+2)} \left[ \left( \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^{k+1} - 1 \right) (j\omega - \gamma/2) + \gamma(k+1) \right]$
4	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{(2k+1)\alpha + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\alpha - j\omega}{(2s+1)\alpha + j\omega}$
5	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - (s+1)\alpha}{j\omega + (s+1)\alpha}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(4k+1)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+1)\gamma/2 - j\omega}{(4s+1)\gamma/2 + j\omega}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(4k+3)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+3)\gamma/2 - j\omega}{(4s+3)\gamma/2 + j\omega}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(s+1)\gamma - j\omega}{(s+1)\gamma + j\omega}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(2k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(2k+3)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+3)\gamma - j\omega}{(2s+3)\gamma + j\omega}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{1}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{1}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
13	$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{1}{\gamma + j\omega}, k=0 \\ \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{1}{(2(k-s)+1)\gamma + j\omega}, k \neq 0 \end{cases}$
14	$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{1}{(2(k-s)+1)\gamma + j\omega}$

Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра (1) и (2), как видно из таблицы 4.1, не описываются формулой (4.2). Однако, введя обозначение

ния  $tg \varphi = 2\omega / \gamma$ ,  $\varphi = \arctg 2\omega / \gamma$ , также можно получить аналитические выражения частотных характеристик с использованием экспоненциальных и тригонометрических функций.

Так для ортогональных функций Сонина-Лагерра (1):

$$W_k^{(1)}(j\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left( 1 + (-1)^k \exp[-2(k+1)j\varphi] \right); \quad (4.9)$$

$$ReW_k^{(1)}(j\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left( 1 + (-1)^k \cos[2(k+1)\varphi] \right); \quad (4.10)$$

$$ImW_k^{(1)}(j\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left( (-1)^{k+1} \sin[2(k+1)\varphi] \right). \quad (4.11)$$

Для ортогональных функций Сонина-Лагерра (2):

$$W_k^{(2)}(j\omega) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{\exp(-j\varphi)}{2 \cos \varphi} + \frac{(-1)^k \exp[-(2k+3)j\varphi]}{2 \cos \varphi} + k+1 \right); \quad (4.12)$$

$$ReW_k^{(2)}(j\omega) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos[(2k+3)\varphi]}{2 \cos \varphi} + k+1 \right); \quad (4.13)$$

$$ImW_k^{(2)}(j\omega) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{(-1)^{k+1} \sin[(2k+3)\varphi]}{2 \cos \varphi} - \frac{tg \varphi}{2} \right). \quad (4.14)$$

Частотные характеристики ортогональных функций Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2)

с учетом обозначения  $tg \varphi_s = \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$ ,  $\varphi_s = \arctg \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$  равны:

$$W_k^{(0,1)}(j\omega) = \frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \exp(-j\varphi_s)}{(2s+1)}; \quad (4.15)$$

$$ReW_k^{(0,1)}(j\omega) = \frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}; \quad (4.16)$$

$$ImW_k^{(0,1)}(j\omega) = -\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}; \quad (4.17)$$

$$W_k^{(0,2)}(j\omega) = \frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \exp(-j\varphi_s)}{(2s+1)}; \quad (4.18)$$

$$ReW_k^{(0,2)}(j\omega) = \frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}; \quad (4.19)$$

$$ImW_k^{(0,2)}(j\omega) = -\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}. \quad (4.20)$$

Модули и фазы частотных характеристик ортогональных функций Сонина-Лагерра (1) и (2), Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2) определяются следующими общими выражениями:

$$|W_k(j\omega)| = \sqrt{ReW_k^{(i/0,i)}(j\omega)^2 + ImW_k^{(i/0,i)}(j\omega)^2}; \quad (4.21)$$

$$\Phi_k(j\omega) = \arctg \frac{ImW_k^{(i/0,i)}(j\omega)}{ReW_k^{(i/0,i)}(j\omega)}. \quad (4.22)$$

Полученные выражения для преобразования Фурье ортогональных функций позволяют решать разнообразные задачи аппроксимативного анализа случайных процессов. Так, например, из выражения (4.1) можно найти выражение для определения длительности ортогональных функций (см. таблицу 4.2), необходимые для оценки интервала корреляции [21].

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) d\tau = W_k(0, \alpha). \quad (4.23)$$

Длительность ортогональных функций

Таблица 4.2

№	Ортогональные функции	$\tau_{k,u}^{(2)}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2(-1)^k}{\alpha}$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \left[ \frac{(k+1) \bmod 2}{k+1} \right]$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4}{\gamma} \left[ \frac{(k+2) \operatorname{div} 2}{(k+1)(k+2)} \right]$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\alpha(2k+1)}$
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^k}{\alpha(k+1)}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma(4k+1)}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma(4k+3)}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(k+1)}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(2k+1)}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(2k+3)}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(k+1) \bmod 2}{(k+1)^2 \gamma}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(-1)^k [(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)^2 (k+2)^2 \gamma}$

Введем понятие полосы пропускания линейной динамической системы [21]:

$$\Delta\omega_c = \frac{\int_0^\infty |W_m^*(j\omega)|^2 d\omega}{|W_m^*(j\omega)|_{\max}^2}, \quad (4.24)$$

где  $W_m^*(j\omega) = \frac{I}{\|\psi_m\|^2} \int_0^\infty \psi_m(\tau, \alpha) \mu(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$  – частотная характеристика семейства ор-

тогональных фильтров (см. таблицу 4.3);

$|W_m^*(j\omega)|^2 = W_m^*(j\omega) \cdot W_m^*(-j\omega)$  – квадрат модуля частотной характеристики семейства ортогональных фильтров.

Вид частотных характеристик ортогональных фильтров приведен в Приложении 8.

Следует отметить, что для ортогональных функций 1, 4 - 10  $\mu(\tau) = I$  и

$$W_m^*(j\omega) = \frac{I}{\|\psi_m\|^2} W_m(j\omega). \quad (4.25)$$

Графически полоса пропускания показана на рисунке 4.1.

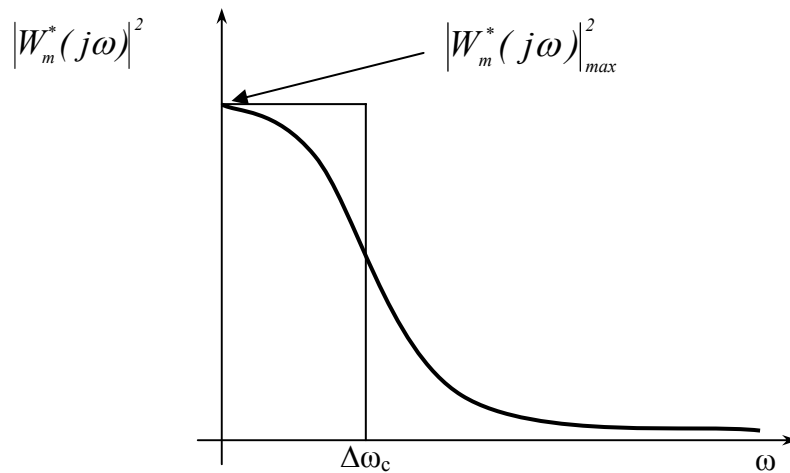


Рисунок 4.1 - Полоса пропускания линейной динамической системы

Частотные характеристики ортогональных фильтров

Таблица 4.3

№	Ортогональные функции	$W_k^*(j\omega)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha}{j\omega + \alpha/2} \left( \frac{j\omega - \alpha/2}{j\omega + \alpha/2} \right)^k$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^2}{(j\omega + \gamma/2)^2} \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^k$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2(j\omega + \gamma/2)^3} \left( \frac{j\omega - \gamma/2}{j\omega + \gamma/2} \right)^k$



4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{2\alpha(2k+1)}{(2k+1)\alpha + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\alpha - j\omega}{(2s+1)\alpha + j\omega}$
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{2\alpha(k+1)}{j\omega + (k+1)\alpha} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{j\omega - (s+1)\alpha}{j\omega + (s+1)\alpha}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4k+1)\gamma}{(4k+1)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+1)\gamma/2 - j\omega}{(4s+1)\gamma/2 + j\omega}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4k+3)\gamma}{(4k+3)\gamma/2 + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(4s+3)\gamma/2 - j\omega}{(4s+3)\gamma/2 + j\omega}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\gamma(k+1)}{(k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(s+1)\gamma - j\omega}{(s+1)\gamma + j\omega}$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\gamma(2k+1)}{(2k+1)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\gamma(2k+3)}{(2k+3)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+3)\gamma - j\omega}{(2s+3)\gamma + j\omega}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{8\gamma^2(k+1)^3}{[(2k+1)\gamma + j\omega][(2k+3)\gamma + j\omega]} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^3(2k+3)(k+1)^2(k+2)^2}{[(2k+1)\gamma + j\omega][(2k+3)\gamma + j\omega][(2k+5)\gamma + j\omega]} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{(2s+1)\gamma - j\omega}{(2s+1)\gamma + j\omega}$

Квадраты модулей частотных характеристик ортогональных фильтров и их максимумы приведены в таблице 4.4.

Квадраты модулей частотных характеристик и их максимумы

Таблица 4.4

№	Орто- гональ- ные функции	$ W_m^*(j\omega) ^2$	$ W_m^*(j\omega) _{max}^2$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha^2}{\alpha^2/4 + \omega^2}$	4
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^4(m+1)^2}{(\gamma^2/4 + \omega^2)^2}$	$16(m+1)^2$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^6(m+1)^2(m+2)^2}{4(\gamma^2/4 + \omega^2)^3}$	$16(m+1)^2(m+2)^2$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{4(2m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(2m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	4
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{4(m+1)^2 \cdot \alpha^2}{(m+1)^2 \cdot \alpha^2 + \omega^2}$	4

6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(4m+1)^2 \cdot \gamma^2 / 4 + \omega^2}$	4
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(4m+3)^2 \cdot \gamma^2}{(4m+3)^2 \cdot \gamma^2 / 4 + \omega^2}$	4
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$	4
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(2m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$	4
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(2m+3)^2 \cdot \gamma^2}{(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$	4
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{64(m+1)^6 \cdot \gamma^4}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$	$\frac{64(m+1)^6}{(2m+1)^2(2m+3)^2}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{16(2m+3)^2(m+1)^4(m+2)^4 \cdot \gamma^6}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+5)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$	$\frac{16(m+1)^4(m+2)^4}{(2m+1)^2(2m+5)^2}$

Значения полосы пропускания линейной динамической системы для различных ортогональных функций приведены в таблице 4.5.

Значения полосы пропускания линейной динамической системы

Таблица 4.5

№	Ортогональные функции	$\Delta \omega_c$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\pi \alpha}{4}$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi \gamma}{8}$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3\pi \gamma}{32}$
4	$Leg_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi \alpha(2m+1)}{2}$
5	$D_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi \alpha(m+1)}{2}$
6	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi \gamma(4m+1)}{4}$
7	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi \gamma(4m+3)}{4}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi \gamma(m+1)}{2}$

9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(2m+1)}{2}$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(2m+3)}{2}$
11	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\pi\gamma(2m+1)(2m+3)}{8(m+1)}$
12	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3\pi\gamma(2m+1)(2m+3)(2m+5)}{64(m+1)(m+2)}$

Отметим, что квадраты модуля частотных характеристик ортогональных фильтров  $m$ -ого порядка 1, 4 - 10 соответствуют квадрату модуля 0-ого порядка с параметром  $1/2\|\psi_m\|^2$

$$|W_m(j\omega)|^2 = \frac{I}{\|\psi_m\|^4 \left(1/4\|\psi_m\|^4 + \omega^2\right)} = \frac{4}{1 + 4\|\psi_m\|^4 \omega^2}, \quad (4.26)$$

а соотношение неопределенности [51]:

$$\Delta\omega_c \tau_{0,u} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.27)$$

Заметим, что выражения для частотных характеристик ортогональных функций записаны с учетом некоторых преобразований в более удобной форме для дальнейшего использования и применения. В частности, для ортогонального базиса Сонина-Лагерра с использованием формулы геометрической прогрессии [5], а для ортогонального базиса Якоби с единичной весовой функцией с использованием чисел Стирлинга 1-ого и 2-ого рода.

Ниже, в качестве примера, приведем аналитические преобразования с использованием комбинаторных чисел Стирлинга при получении соотношения для преобразования Фурье ортогональных функций Якоби:

$$W_{k,l}(j\omega) = \frac{I}{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-l} \frac{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega}, \quad (4.28)$$

где

$$W_{k,2}(j\omega) = \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s \frac{I}{\left(c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega\right)}. \quad (4.29)$$

Выражение (4.28) необходимо проверить на сходимость с использованием соотношения:

$$P = \prod_{n=l}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)...(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)...(n-b_k)} = \prod_{n=l}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{a_1}{n}\right)\left(1 - \frac{a_2}{n}\right)...\left(1 - \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 - \frac{b_1}{n}\right)\left(1 - \frac{b_2}{n}\right)...\left(1 - \frac{b_k}{n}\right)}. \quad (4.30)$$

Необходимым условием сходимости соотношения является следующее [10]:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k - b_1 - b_2 - \dots - b_k = 0. \quad (4.31)$$

Вид суммы ряда  $W_{k,2}(j\omega)$  позволяет перейти к более общей комбинаторной схеме: работе с комбинаторными числами. Под комбинаторными числами понимают перечисления различных множеств комбинаторных объектов. Различные элементы в перечисляемом множестве могут быть неравноценны, что приводит к назначению весов, в общем случае различных, на множестве отображений и вычислению сумм этих весов на каких-либо подмножествах исходного множества. Тогда операцию нахождения таких сумм называют взвешенными перечислениями (перечисления с весами). В частном случае считающих весов, равных единице на каждом элементе - обычное перечисление - имеем дело с биномиальными коэффициентами.

Многие комбинаторные числа – частные случаи элементов обобщенного треугольника. Известно, как строится треугольник Паскаля. Число сочетаний  $C_n^k$  определяют как решение разностного уравнения

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (4.32)$$

Обобщения производят, дополняя различными способами разностное уравнение. По аналогии с построением треугольника Паскаля строят обобщенный треугольник на основании рекуррентного соотношения [10]:

$$V(n, k) = \beta_{n, k-1} V(n-1, k-1) + \alpha_{n, k} V(n-1, k). \quad (4.33)$$

Величины  $\alpha_{n, k}$  и  $\beta_{n, k}$  - весовые коэффициенты.

$$V_n = \sum_{k=0}^n V(n, k) = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n, k} + \beta_{n, k}) V(n-1, k). \quad (4.34)$$

Однако иногда оказывается полезной и следующая интерпретация элементов обобщенного треугольника Паскаля. Полагая, что  $V(n, n) \neq 0$ ,  $n = \overline{0, \infty}$  зафиксируем значение параметра  $n$  и построим нормированную последовательность элементов  $n$ -ой строки:

$$\frac{V(n, 0)}{V(n, n)}, \frac{V(n, 1)}{V(n, n)}, \dots, \frac{V(n, n)}{V(n, n)}. \quad (4.35)$$

Пусть

$$P_n(x) = \frac{1}{V(n, n)} \sum_{k=0}^n V(n, k) x^k, \quad (4.36)$$

где  $\mu_{n, 0}, \mu_{n, 1}, \dots, \mu_{n, n-1}$  - корни многочлена  $P_n(x)$ , взятые с противоположным знаком.

Тогда

$$\frac{V(n, k)}{V(n, n)} = B_k^n, \quad (4.37)$$

где  $B_k^n$  - обобщенные числа Стирлинга 1-ого рода, строящиеся при каждом фиксированном  $n$  на базе  $\{\mu_{n, m}\}_{m=0}^{n-1}$ .

В свою очередь, биномиальные коэффициенты получаются из (4.33) при значениях  $V_0 = 1$ ,  $\alpha_{n, k} = \beta_{n, k} = 1$ ;  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Если же  $V_0 = 1$ ,  $\beta_{n, k} = 1$ , а  $\alpha_{n, k} = \mu_{n-1}$ ;  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{0, n}$ , то имеем рекуррентное соотношение для обобщенных чисел Стирлинга 1-ого рода:

$$B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \mu_{n-1} B_k^{n-1}. \quad (4.38)$$

Рассмотрим случай:  $V_0 = I$ ,  $\alpha_{n,k} = \alpha_n$ ,  $\beta_{n,k} = \beta_k$ ;  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

В этом случае имеем:

$$V(n, k) = \beta_k V(n-1, k-1) + \alpha_n V(n-1, k). \quad (4.39)$$

Считая, что в последовательности  $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$  все члены отличны от нуля, введем величины:

$$B_0^0 = I, B_k^n = \frac{V(n, k)}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k}. \quad (4.40)$$

Тогда

$$B_0^0 = I, B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \frac{\alpha_n}{\beta_k} B_k^{n-1}.$$

После нормировки элементы каждой строки обобщенного треугольника выражаются при помощи обобщенных чисел Стирлинга 1-ого рода, построенных на базе

$$\left\{ \frac{\alpha_n}{\beta_k} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Нормировку можно проводить и иными методами в зависимости от условия решаемой задачи.

Введем базу  $\{\alpha_s\}_{s=0}^k$ ,  $\alpha_s = \frac{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma}{j\omega}$  и затем построим на этой базе

обобщенные числа Стирлинга 1-ого рода.

Тогда в соответствии с постановкой задачи, выражениями (4.34) и (4.36), рекуррентным соотношением (4.38) будем иметь:

$$B_s^k = B_{s-1}^{k-1} + \alpha_k B_s^{k-1}; \quad (4.41)$$

$$B_s^k = B_s^{k-1}(\alpha_k - 1) = B_s^{k-1} \left( \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma}{j\omega} - 1 \right); \quad (4.42)$$

$$B_s^k = B_s^{k-1} \frac{\left( c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega \right)}{j\omega}; \quad (4.43)$$

$$B_s^{k-1} = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} \frac{1}{\left( \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma}{j\omega} + 1 \right)}. \quad (4.44)$$

Далее произведем формирование чисел Стирлинга на заданной базе:

$$B_s^k = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} \frac{j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega} \cdot \frac{\left(c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega\right)}{j\omega}; \quad (4.45)$$

$$B_s^k = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega}. \quad (4.46)$$

Введем следующее обозначение:

$$W_{k,2}'(j\omega) = C_k^s C_{k+s+\alpha}^{s+\alpha} (-1)^s \frac{c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega}{c\left(s + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma + j\omega} = \sum_{s=0}^k B_s^k x^s, \text{ т. е. } x = -1, \quad (4.47)$$

где

$$W_{k,2}'(j\omega) = \left(c\left(k + \frac{\alpha+1}{2}\right)\gamma - j\omega\right) W_{k,2}(j\omega). \quad (4.48)$$

Введем понятия чисел Стирлинга и на их основании рассмотрим свойства этих чисел [10].

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1); \quad (4.49)$$

$$[x]_n = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad (4.50)$$

которые называются факториальными степенями и выражаются формулами:

$$(x)_0 = [x]_0 = 1; \quad (4.51)$$

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} b_k^n x^k; \quad (4.52)$$

$$x^k = \sum_{k=0}^n a_k^n (x)_k; \quad (4.53)$$

$$[x]_n = \sum_{k=0}^n b_k^n x^k; \quad (4.54)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} a_k^n [x]_k, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (4.55)$$

Коэффициенты  $(-1)^{n-k} b_k^n$  и  $a_k^n$  - числа Стирлинга 1-ого и 2-ого рода соответственно.

Пусть  $A_n = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ . Тогда анализ записанных выше формул позволяет сделать выводы:

1) число  $b_k^n$ ,  $n > k$  - сумма всех различных произведений по  $n-k$  сомножителей, которые выбираются без повторения из множества  $A_{n-1}$ ;

2) число  $a_k^n$ ,  $n > k$  - сумма всех различных произведений по  $n-k$  сомножителей, которые выбираются, допуская многократные повторения, из множества  $A_k$ .

Приведенные правила, по которым из элементов множества  $A_{n-l}$  и  $A_k$  строятся числа Стирлинга, позволяют выполнить аналогичные построения из элементов различных последовательностей (даже не обязательно числовых). Возьмем последовательность элементов некоторого кольца  $\{\mu_i\}_{i=0}^{\infty}$  - базу. С применением членов базы строят разложения:

$$\prod_{i=0}^{k-l} (x + \mu_i) = \sum_{k=0}^n B_k^n x^k, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (4.56)$$

$$x^k \prod_{i=0}^k \frac{1}{(1 - \mu_i x)} = \sum_{n=k}^{\infty} A_k^n x^n, \quad k = \overline{0, \infty}. \quad (4.57)$$

В свою очередь, коэффициенты в суммах известны:

- 1)  $B_k^n$  – элементарные симметрические функции;
- 2)  $A_k^n$  – суммы однородных произведений.

Иначе обобщенные числа Стирлинга 1-ого и 2-ого рода соответственно.

Воспользуемся выражениями (4.56) и (4.57) для построения производящей функции  $B$ - формы распределения, которой является следующее выражение с нормированными коэффициентами [10]:

$$\prod_{k=0}^{n-l} \frac{(x + \alpha_k)}{(1 + \alpha_k)} = \prod_n^{-l} \sum_{k=0}^n B_k^n x^k, \quad \alpha_k > 0, \quad (4.58)$$

Таким образом

$$\prod_k^{-l} \sum_{s=0}^k B_s^k x^s = \prod_{s=0}^{k-l} \frac{(x + \alpha_s)}{(1 + \alpha_s)}; \quad (4.59)$$

$$\sum_{s=0}^k B_s^k x^s = \prod_k \prod_{s=0}^{k-l} \frac{(x + \alpha_s)}{(1 + \alpha_s)}. \quad (4.60)$$

С учетом выражений (4.47) и (4.48) запишем:

$$\sum_{s=0}^k B_s^k x^s = W_{k,2}'(j\omega) \Big|_{x=-l}; \quad (4.61)$$

$$W_{k,2}'(j\omega) = \prod_k \prod_{s=0}^{k-l} \frac{(\alpha_s - l)}{(\alpha_s + l)}. \quad (4.62)$$

Соотношения (4.61) и (4.62) позволяют записать результат в виде:

$$\left( c \left( k + \frac{\alpha + l}{2} \right) \gamma - j\omega \right) \cdot W_{k,2}(j\omega) = \frac{\left( c \left( k + \frac{\alpha + l}{2} \right) \gamma - j\omega \right)}{\left( c \left( k + \frac{\alpha + l}{2} \right) \gamma + j\omega \right)} \prod_{s=0}^{k-l} \frac{\left( \frac{c \left( s + \frac{\alpha + l}{2} \right) \gamma}{j\omega} - l \right)}{\left( \frac{c \left( s + \frac{\alpha + l}{2} \right) \gamma}{j\omega} + l \right)}; \quad (4.63)$$

$$W_{k,2}(j\omega) = \frac{1}{c \left( k + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma + j\omega} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\left( c \left( s + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma - j\omega \right)}{\left( c \left( s + \frac{\alpha + 1}{2} \right) \gamma + j\omega \right)}. \quad (4.64)$$

#### 4.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданных систем ортогональных функций для  $m = 0 - 4$  и  $\alpha = const$  построить частотные характеристики и их составляющие: вещественную, мнимую, модуль и фазу, например, для моделей 1, 4 - 10 - соответствующие выражениям (4.4) - (4.8).
2. Для заданных систем ортогональных функций и  $\alpha / \gamma = const$  построить  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m / \alpha)$  для  $m = 0 - 4$ .
3. Для заданных систем ортогональных функций и  $m = const$  построить  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(\alpha / m)$ .
4. Построить зависимость полосы пропускания ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка от параметра масштаба.
5. Оформить отчет.

#### 4.3. Содержание отчета

1. Цель работы.
  2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Графические зависимости  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_1(m / \alpha)$  для  $m = 0 - 4$ .
  6. Графические зависимости  $|W_m^*(j\omega)|^2 = f_2(\alpha / m)$ .
  7. Графические зависимости полосы пропускания ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка от параметра масштаба.
  8. Выводы.
- Пример выполнения вычислительного практикума 4 приведен в Приложении 9.

#### 4.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл полосы пропускания ортогонального фильтра?
2. Для какой ортогональной системы функций полоса пропускания не зависит от порядка функций?
3. Что такое соотношение неопределенности для ортогонального фильтра?
4. Как определить порядок ортогональной функции по виду вещественной частотной характеристики?
5. Чем различаются частотные характеристики ортогональных функций и ортогонального фильтра? В чем их физический смысл?



## 5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями.

### 5.1. Теоретические основы вычислительного практикума

#### 5.1.1. Основные понятия и определения

Важной частью статистического анализа является корреляционный анализ. Знание корреляционных функций позволяет решать задачи идентификации динамических систем, выбирать оптимальный интервал дискретизации исследуемого процесса, оценивать погрешности средств измерений, строить корреляционные приёмники и т.д.[21, 51].

Корреляционная функция представляет собой корреляционный момент ее значений при двух значениях аргумента  $t$  и  $t'$ , рассматриваемый как функция [48, 49]:

$$K_x(t, t') = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}(t') \right], \quad (5.1)$$

где  $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ , а  $m_x(t)$  – математическое ожидание случайного процесса в сечении  $t$ .

Корреляционная функция характеризует степень **линейной связи** между сечениями процесса.

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_x(t')}}. \quad (5.2)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов и является четной функцией [48]:

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau), \quad \tau = t - t'. \quad (5.3)$$

Это свойство позволяет **определять одну ветвь** корреляционной функции, т.е. только во временном интервале  $[0, \infty)$ .

Нормированная корреляционная функция для стационарных процессов, в соответствии с выражением (5.2), равна:

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (5.4)$$

Отсюда видно, что

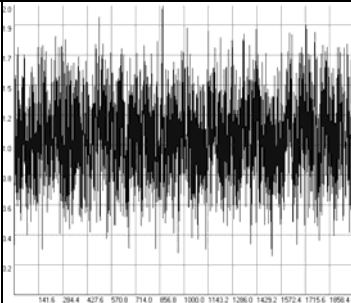
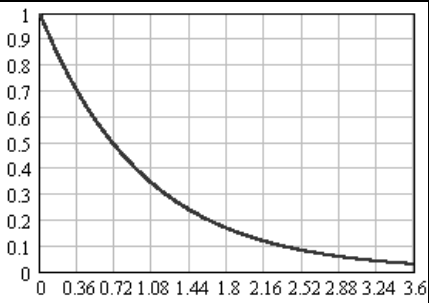
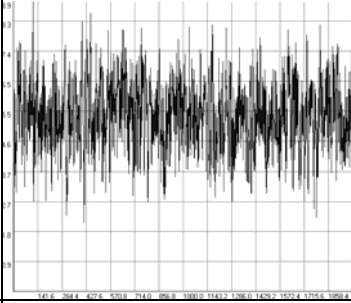
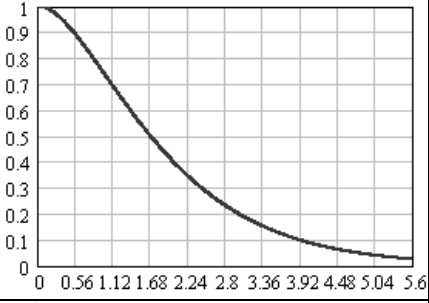
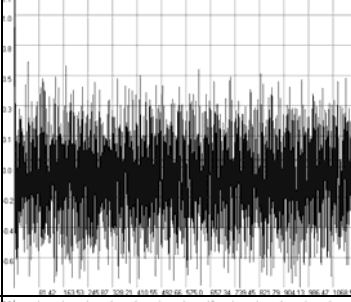
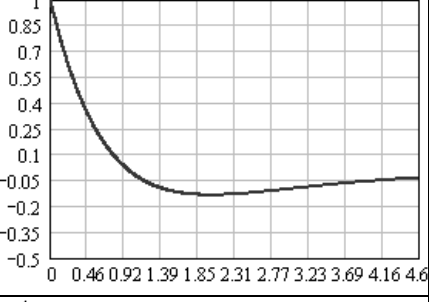
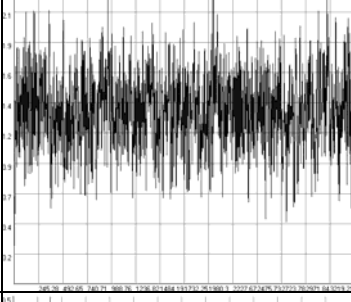

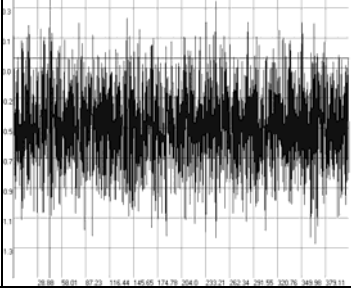
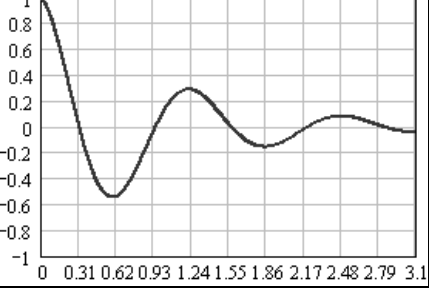
$$|\rho_x(\tau)| \leq 1. \quad (5.5)$$

Типовые модели нормированных корреляционных функций, широко применяемых в приложениях, приведены в таблице 5.1 ( $\lambda_i = 1$  и  $\omega_{0,i} = 5$ ), а их классифика-

ция – на рис. 5.1 [21]. Обратите внимание на разную длительность корреляционных функций при одном и том же значении параметра затухания  $\lambda_i$ .

### Типовые модели корреляционных функций

Таблица 5.1

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda_i, \omega_{0,i})$	Случайный процесс	Нормированная корреляционная функция
1	$e^{-\lambda_1 \tau }$		
2	$e^{-\lambda_2 \tau }(1 + \lambda_2 \tau )$		
3	$e^{-\lambda_3 \tau }(1 - \lambda_3 \tau )$		
4	$e^{-\lambda_4 \tau }\left(1 + \lambda_4 \tau  + \frac{\lambda_4^2\tau^2}{3}\right)$		
5	$e^{-\lambda_5 \tau } \cos(\omega_{0,5}\tau)$		

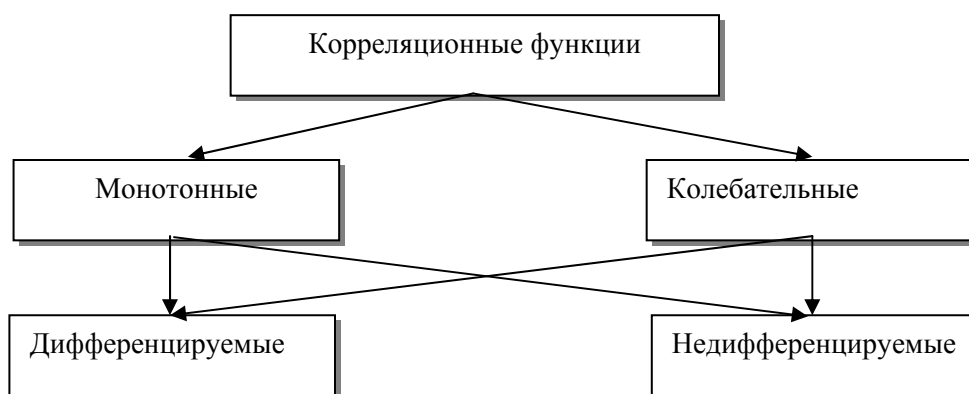
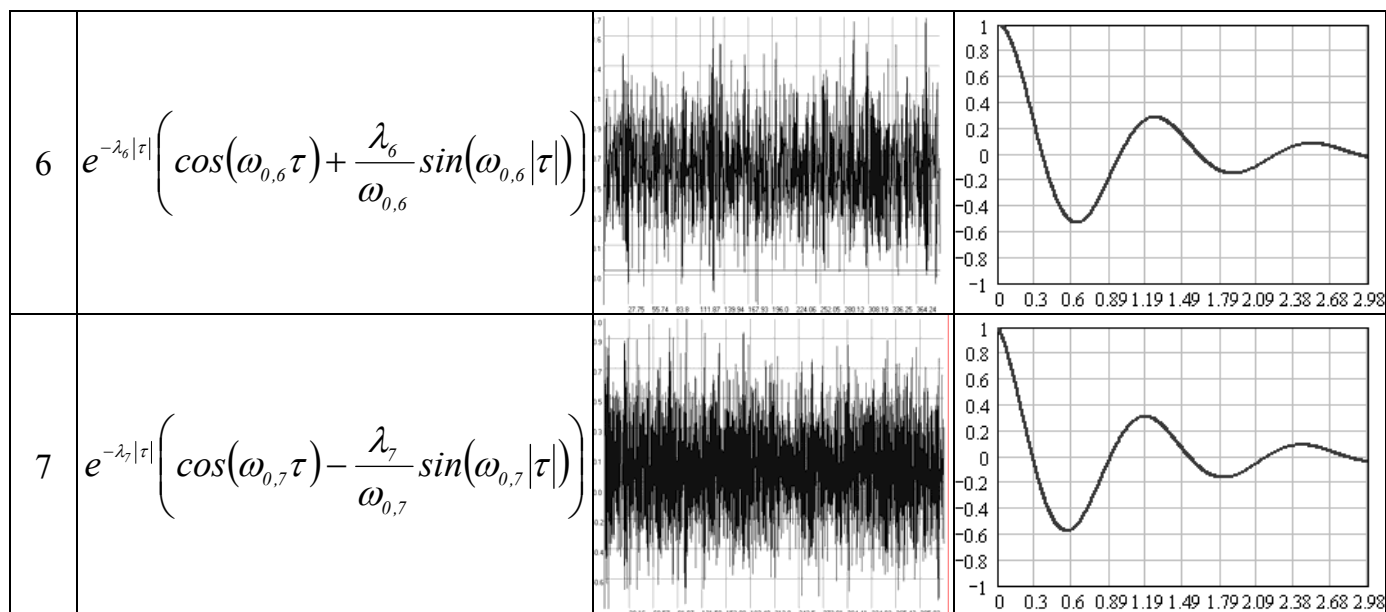


Рисунок 5.1 - Классификация корреляционных функций

Из анализа моделей видно, что все корреляционные функции можно разбить на два класса: монотонные (1-2) и колебательные (3-7).

Из графиков видно, что в ряде случаев (модели 1, 3, 5, 7) в «нуле» производная корреляционных функций при подходе к нулю слева и справа определяется неоднозначно, т. е.  $K'(\tau - 0) \neq K'(\tau + 0)$ . Такие случайные процессы относятся к классу недифференцируемых процессов. Случайный процесс называется дифференцируемым, если производная корреляционной функции в «нуле» непрерывна (см. модели 2, 4, 6).

Отметим, что корреляционная функция  $n$ -ой производной стационарного случайного процесса определяется выражением:

$$K_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n K_x^{(2n)}(\tau). \quad (5.6)$$

Отсюда видно, что все производные дифференцируемых стационарных случайных процессов являются стационарными случайными процессами [48].

Таким образом, корреляционные функции стационарных случайных процессов можно разделить на четыре класса:

1. монотонные недифференцируемые (модели 1);
2. монотонные дифференцируемые (модели 2, 4);
3. колебательные недифференцируемые (модели 3, 5, 7);
4. колебательные дифференцируемые (модели 6).

Такое разделение стационарных случайных процессов по виду корреляционной функции оказывается полезным при решении самых разнообразных задач, например, аппроксимации корреляционных функций, полученных экспериментально, параметрическими моделями [22, 23].

Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций  $x(t)$  и  $y(t)$  называется неслучайная функция двух аргументов  $t$  и  $t'$ , которая при каждой паре значений  $t$  и  $t'$  равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции  $x(t)$  и случайной функции  $y(t)$ :

$$K_{xy}(t, t') = M \left[ \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t') \right]. \quad (5.7)$$

Если взаимная корреляционная функция не тождественно равна нулю, случайные процессы называются коррелированными, в противном случае они называются некоррелированными.

Следует отметить, что при одновременной перестановке аргументов и индексов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t). \quad (5.8)$$

Часто вместо корреляционной функции для характеристики связи между сечениями процесса используют нормированную корреляционную функцию, которая представляет собой коэффициент корреляции значений процесса при двух значениях аргумента:

$$\rho_{xy}(t, t') = \frac{K_{xy}(t, t')}{\sqrt{D_x(t)} \sqrt{D_y(t')}}. \quad (5.9)$$

Для стационарно связанных (стационарных) случайных процессов [48] корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов  $\tau = t - t'$ .

Нормированная корреляционная функция, в соответствии с выражением (5.25), равна:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (5.10)$$

Отсюда видно, что

$$|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1. \quad (5.11)$$

Из свойства взаимной корреляционной функции следует, что две взаимные

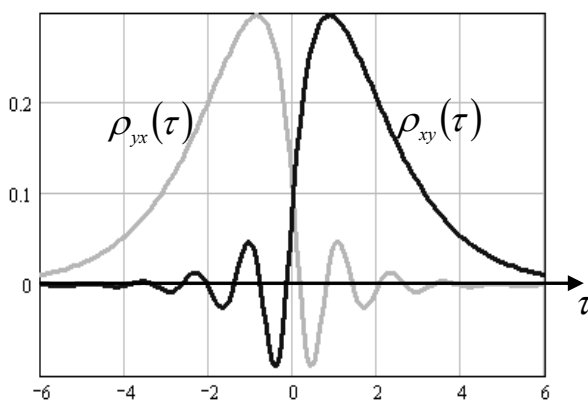


Рисунок 5.2 - Взаимные корреляционные функции

корреляционные функции двух стационарно связанных случайных функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , взятых в различных порядках, связаны соотношением

$$\rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(-\tau). \quad (5.12)$$

Графически это означает, что кривая  $\rho_{yx}(\tau)$  является зеркальным отражением кривой  $\rho_{xy}(\tau)$  относительно оси ординат (рис. 5.2).

Из анализа рис. 5.2 видно, что при взаимном корреляционном анализе необходимо *оценивать две ветви* корреляционной функции.

### 5.1.2. Аппроксимация корреляционных функций

Корреляционные функции, представленные в виде последовательности ординат и предназначенные для дальнейших расчетов, как правило, аппроксимируются теми или иными аналитическими выражениями в соответствии с выбранным критерием приближения. Независимо от метода аппроксимации, как правило, определяются параметры модели, удовлетворяющие выбранному критерию приближения. Знание модели корреляционной функции и численных значений её параметров позволяет легко, используя известные определения, вычислить интервалы корреляции, моменты корреляционных функций, спектральную плотность мощности и т.д. Кроме того, следует отметить, что при проведении большого числа корреляционных измерений аппроксимативный подход позволяет существенно сократить объём хранимой информации, так как вместо большого числа отсчётов корреляционных функций в заданных точках необходимо хранить только вид модели и численные значения её параметров.

Одной из самых сложных и плохо формализуемых задач, от правильного решения которой во многом будет определяться точность, достоверность полученных результатов, простота технической реализации, является выбор модели корреляционной функции.

В качестве моделей корреляционных функций, основываясь на априорной информации о свойствах процесса, наиболее часто принимают:

- линейную комбинацию конечного числа функций (возможна аппроксимация одной функцией) [51];
- бесконечный (конечный) ряд некоторой определенной системы функций (в частности, возможна аппроксимация степенными рядами, рядами по дисперсиям производных, ортогональными полиномами и функциями, асимптотическими рядами) [21, 22, 23, 51].

Выбор той или иной модели корреляционной функции основывается на наличии априорной информации о свойствах процесса. Если ориентировочно известен вид корреляционной функции исследуемого процесса, то наиболее целесообразно выбирать конкретный вид модели, желательно с меньшим числом параметров. От числа неизвестных параметров в значительной степени зависит сложность аппаратуры, удобство полученной модели для исследователя [51].

Если кроме эквивалентной ширины спектра мощности процесса ничего неизвестно, то в качестве модели следует применять разложение корреляционной функции в ряд по какой-либо системе ортогональных функций или полиномов [21, 51].

Впервые этот метод предложил Д. Лампард [57]. Математическим обоснованием этого метода является теорема Мерсера, согласно которой симметричная и положительно определенная функция, которой и является функция корреляции, может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд вида:

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(\tau, \alpha), \quad (5.13)$$

где  $\beta_k$  - коэффициенты Фурье;

$\psi_k(\tau, \alpha)$  - семейство ортогональных функций в интервале  $[0, \infty)$ ;

$\alpha$  - параметр масштаба.

Это семейство характеризуется интегралом:

$$\int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) \psi_n(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \|\psi_k(\alpha)\|^2, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (5.14)$$

Так как ряд сходится в интервале  $[0, \infty)$ , то коэффициенты разложения  $\beta_k$  в соответствии с [21] определяются выражением:

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) \mu(\tau) d\tau. \quad (5.15)$$

В качестве системы базисных функций применяются ортогональные функции Лагерра, Дирихле, Лежандра, Якоби и т. д. Выбор системы базисных функций зависит, в основном, от возможности представления корреляционной функции минимальным числом членов разложения для типовых моделей, удобством в работе.

Следует подчеркнуть, что на практике приходится ограничиваться конечным числом ряда (5.13)

$$\hat{K}_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\tau, \alpha). \quad (5.16)$$

Это приводит к появлению методической погрешности, значение которой зависит как от свойств процесса, так и способа оценки параметров модели. С учетом свойств ортогональных функций определим относительную методическую погрешность аппроксимации в виде

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k(\alpha)\|^2}{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}. \quad (5.17)$$

Из (5.17) видно, что значение относительной погрешности аппроксимации  $\delta$  зависит от значений  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ , т.е. вида корреляционной функции (см. выражение 5.15), значения параметра масштаба  $\alpha$  и числа членов разложения ряда (5.16)  $m$ .

Задавшись видом модели корреляционной функции, в первую очередь необходимо найти аналитические выражения коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ . Как показали исследования при прочих равных условиях численные значения методических погрешностей больше у колебательных моделей КФ [21]. Для решения этой задачи воспользуемся частотным представлением ортогональных функций (см. лабораторную работу 4).

Так, например, НКФ  $\rho_{s,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ , воспользовавшись преобразованием Эйлера, представим в виде

$$\rho_{s,x}(\tau) = \frac{1}{2} [e^{-(\lambda - j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda + j\omega_0)\tau}], \quad \tau > 0. \quad (5.18)$$

Подставив выражение (5.18) в выражение (5.15), получим для ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$ ,

$$\beta_{s,k} = \frac{1}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^{\infty} \psi_k(\tau, \alpha) [e^{-(\lambda - j\omega_0)\tau} + e^{-(\lambda + j\omega_0)\tau}] d\tau. \quad (5.19)$$

С учетом выражения (4.1), выражение (5.19) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\beta_{5,k} &= \frac{I}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} [W_k(\lambda - j\omega_0) + W_k(\lambda + j\omega_0)] = \\
&= \frac{[\psi_k(0, \alpha)]}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \left\{ \frac{I}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda - j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda - j\omega_0} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{I}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{\lambda + j\omega_0 - 1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2}{1/2\|\psi_s(\alpha)\|^2 + \lambda + j\omega_0} \right\}. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \varphi_{1,k} &= \frac{\omega_0}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad A_{1,k} = \frac{I}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{I}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \\
\operatorname{tg} \varphi_{2,k} &= \frac{\omega_0}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}, \quad A_{2,k} = \frac{I}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2} \frac{I}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}, \\
\varphi_{1,k} &= \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda}, \quad \varphi_{2,k} = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\lambda - 1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2}. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Тогда

$$\beta_k = \frac{A_{1,k}[\psi_k(0, \alpha)]}{1 - j\operatorname{tg} \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 - j\operatorname{tg} \varphi_{2,s}}{1 - j\operatorname{tg} \varphi_{1,s}} + \frac{A_{1,k}[\psi_k(0, \alpha)]}{1 + j\operatorname{tg} \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} \frac{A_{1,s}}{A_{2,s}} \frac{1 + j\operatorname{tg} \varphi_{2,s}}{1 + j\operatorname{tg} \varphi_{1,s}}. \quad (5.22)$$

Или

$$\begin{aligned}
\beta_{5,k} &= \frac{A_{1,k}[\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k}}{\cos \varphi_{1,k} - j \sin \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \varphi_{2,s} - j \sin \varphi_{2,s}}{\cos \varphi_{1,s} - j \sin \varphi_{1,s}} + \\
&\quad + \frac{A_{1,k}[\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k}}{\cos \varphi_{1,k} + j \sin \varphi_{1,k}} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \frac{\cos \varphi_{2,s} + j \sin \varphi_{2,s}}{\cos \varphi_{1,s} + j \sin \varphi_{1,s}}, \quad (5.23)
\end{aligned}$$

$$\text{где } B_s = \frac{A_{1,s} \cos \varphi_{1,s}}{A_{2,s} \cos \varphi_{2,s}}.$$

Выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned}
\beta_{5,k} &= A_{1,k}[\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \exp(j\varphi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[j(\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})] + \\
&\quad + A_{1,k}[\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \exp(-j\varphi_{1,k}) \prod_{s=0}^{k-1} B_s \exp[-j(\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})] = \\
&= A_{1,k}[\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \prod_{s=0}^{k-1} B_s \left\{ \exp\left[j\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right)\right] + \right. \\
&\quad \left. + \exp\left[-j\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right)\right] \right\} = \\
&= 2A_{1,k}[\psi_k(0, \alpha)] \cos \varphi_{1,k} \cos\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов разложения модели  $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  для различных ортогональных базисов зависят от принятых обозначений, представленных в таблице 5.2.

Принятые обозначения

Таблица 5.2

№	$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$tg \varphi_{1,k}$	$tg \varphi_{2,k}$	$A_{1,k}$	$A_{2,k}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\omega_0}{\alpha/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \alpha/2}$	$\frac{\alpha/2}{\alpha/2 + \lambda}$	$\frac{\alpha/2}{\lambda - \alpha/2}$
2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\omega_0}{\alpha(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \alpha(2k+1)}$	$\frac{\alpha(2k+1)}{\alpha(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\alpha(2k+1)}{\lambda - \alpha(2k+1)}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\omega_0}{\alpha(k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \alpha(k+1)}$	$\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k+1) + \lambda}$	$\frac{\alpha(k+1)}{\lambda - \alpha(k+1)}$
4	$P_k^{(-l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+1)/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(4k+1)/2}$	$\frac{\gamma(4k+1)/2}{\gamma(4k+1)/2 + \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+1)/2}{\lambda - \gamma(4k+1)/2}$
5	$P_k^{(l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(4k+3)/2 + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(4k+3)/2}$	$\frac{\gamma(4k+3)/2}{\gamma(4k+3)/2 + \lambda}$	$\frac{\gamma(4k+3)/2}{\lambda - \gamma(4k+3)/2}$
6	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(k+1)}$	$\frac{\gamma(k+1)}{\gamma(k+1) + \lambda}$	$\frac{\gamma(k+1)}{\lambda - \gamma(k+1)}$
7	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(2k+1)}$	$\frac{\gamma(2k+1)}{\gamma(2k+1) + \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+1)}{\lambda - \gamma(2k+1)}$
8	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda}$	$\frac{\omega_0}{\lambda - \gamma(2k+3)}$	$\frac{\gamma(2k+3)}{\gamma(2k+3) + \lambda}$	$\frac{\gamma(2k+3)}{\lambda - \gamma(2k+3)}$

В таблице 5.3 представлены выражения коэффициентов разложения модели  $\rho_{5,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ .

Аналитические выражения коэффициентов разложения для 5 модели

Таблица 5.3

№	$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$\beta_{5,k}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} B_k^k \cos \varphi_{1,k} \cos((k+1)\varphi_{1,k} - k\varphi_{2,s})$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$2A_{1,k} \cos \varphi_{1,k} \cos\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
3	$Leg_k(\tau, \alpha)$ $P_k^{(\alpha,0)}(\tau, \gamma)$	$2A_{1,k} (-1)^k \cos \varphi_{1,k} \cos\left(\varphi_{1,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi_{1,s} - \varphi_{2,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Для определения коэффициентов разложения 6 и 7 моделей

$\rho_{6,7,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$  необходимо определить

$$J = \frac{\lambda}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 j\omega_0} \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) [e^{-(\lambda-j\omega_0)\tau} - e^{-(\lambda+j\omega_0)\tau}] d\tau. \quad (5.25)$$

Тогда

$$\beta_{6,7,k} = \beta_{5,k} \pm J. \quad (5.26)$$

С учетом (5.20), получим



$$J = \frac{\lambda}{2\|\psi_k(\alpha)\|^2 j\omega_0} [W_k(\lambda - j\omega_0) - W_k(\lambda + j\omega_0)]. \quad (5.27)$$

С учетом принятых обозначений (5.21)

$$\begin{aligned} J &= \frac{A_{l,k}[\psi_k(0,\alpha)]\lambda}{j\omega_0} \cos \varphi_{l,k} \prod_{s=0}^{k-l} B_s \left\{ \exp \left[ j \left( \varphi_{l,k} + \sum_{s=0}^{k-l} (\varphi_{l,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[ -j \left( \varphi_{l,k} + \sum_{s=0}^{k-l} (\varphi_{l,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{2A_{l,k}[\psi_k(0,\alpha)]\lambda}{\omega_0} A_{l,k} \cos \varphi_{l,k} \sin \left( \varphi_{l,k} + \sum_{s=0}^{k-l} (\varphi_{l,s} - \varphi_{2,s}) \right) \prod_{s=0}^{k-l} B_s. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Подставив выражение (5.28) в выражение (5.25), окончательно получим

$$\begin{aligned} \beta_{6,7,k} &= 2A_{l,k}[\psi_k(0,\alpha)] \cos \varphi_{l,k} \left[ \cos \left( \varphi_{l,k} + \sum_{s=0}^{k-l} (\varphi_{l,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( \varphi_{l,k} + \sum_{s=0}^{k-l} (\varphi_{l,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \prod_{s=0}^{k-l} B_s. \end{aligned} \quad (5.29)$$

В таблице 5.4 представлены выражения коэффициентов разложения модели

$$\rho_{6,7,x}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Аналитические выражения коэффициентов разложения для 6 и 7 моделей

Таблица 5.4

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_{6,7,k}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2A_{l,k} B_k^k \cos \varphi_{l,k} [\cos((k+l)\varphi_{l,k} - k\varphi_{2,s}) \pm \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin((k+l)\varphi_{l,k} - k\varphi_{2,s})]$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$2A_{l,k} \cos \varphi_{l,k} \left[ \cos \left( \varphi_{l,k} + \sum_{s=0}^{k-l} (\varphi_{l,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( \varphi_{l,k} + \sum_{s=0}^{k-l} (\varphi_{l,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \prod_{s=0}^{k-l} B_s$
3	$Leg_k(\tau, \alpha)$ $P_k^{(\alpha,0)}(\tau, \gamma)$	$2A_{l,k} (-l)^k \cos \varphi_{l,k} \left[ \cos \left( \varphi_{l,k} + \sum_{s=0}^{k-l} (\varphi_{l,s} - \varphi_{2,s}) \right) \pm \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \left( \varphi_{l,k} + \sum_{s=0}^{k-l} (\varphi_{l,s} - \varphi_{2,s}) \right) \right] \prod_{s=0}^{k-l} B_s$

Воспользовавшись предлагаемым подходом, с учетом принятых обозначений (см. таблицу 5.5), аналитические выражения коэффициентов разложения для типовых колебательных моделей корреляционных функций в ортогональных базисах Сонина-Лагерра и Якоби  $(0, \beta)$  представим в таблицах 5.6 и 5.7.

Принятые обозначения

Таблица 5.5

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$tg \phi_{i,k}$	$A_{i,k}$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma),$ $L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$tg \phi_{1,k} = \frac{\omega_0}{\lambda + \gamma / 2};$ $tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{\lambda - \gamma / 2}$	$A_{1,k} = \frac{I}{\lambda + \gamma / 2};$ $A_{2,k} = \frac{I}{\lambda - \gamma / 2}$
2	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$tg \phi_{1,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda};$ $tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda};$ $tg \phi_{3,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) - \lambda}$	$A_{1,k} = \frac{2\gamma(k+1)}{\gamma(2k+1) + \lambda};$ $A_{2,k} = \frac{2\gamma(k+1)}{\gamma(2k+3) + \lambda};$ $A_{3,k} = \frac{2\gamma(k+1)}{\gamma(2k+1) - \lambda}$
$B_s = \frac{A_{1,s}}{A_{3,s}} \frac{\cos \phi_{1,s}}{\cos \phi_{3,s}}; C_k = A_{1,k} A_{2,k} \cos \phi_{1,k} \cos \phi_{2,k}$			
3	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$tg \phi_{1,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) + \lambda};$ $tg \phi_{2,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+3) + \lambda};$ $tg \phi_{3,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+5) + \lambda};$ $tg \phi_{4,k} = \frac{\omega_0}{\gamma(2k+1) - \lambda}$	$A_{1,k} = \frac{\gamma(k+1)(k+2)}{\gamma(2k+1) + \lambda};$ $A_{2,k} = \frac{\gamma(k+1)(k+2)}{\gamma(2k+3) + \lambda};$ $A_{3,k} = \frac{\gamma}{\gamma(2k+5) + \lambda};$ $A_{4,k} = \frac{\gamma(k+1)(k+2)}{\gamma(2k+1) - \lambda}$
$B_s = \frac{A_{1,s}}{A_{4,s}} \frac{\cos \phi_{1,s}}{\cos \phi_{4,s}}; C_k = A_{1,k} A_{2,k} A_{3,k} \cos \phi_{1,k} \cos \phi_{2,k} \cos \phi_{3,k}$			

Аналитические выражения коэффициентов разложения для 5 модели

Таблица 5.6

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_{5,k}$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2(k+1) A_{1,k}^2 B_k^k \cos^2 \phi_{1,k} \cos[k\phi_{2,k} - (k+2)\phi_{1,k}]$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3(k+1)(k+2)}{2} A_{1,k}^3 B_k^k \cos^3 \phi_{1,k} \cos[k\phi_{2,k} - (k+3)\phi_{1,k}]$
3	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$2 C_k (k+1) \cos\left(\phi_{1,k} + \phi_{2,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{1,s} + \phi_{3,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
4	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$4 C_k (2k+3) \cos\left(\phi_{1,k} + \phi_{2,k} + \phi_{3,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{1,s} + \phi_{4,s})\right) \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Таблица 5.7

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_{6,7,k}$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2(k+1) \cdot A_{l,k}^2 B_k^k \cos^2 \phi_{l,k} [\cos[k\phi_{2,k} - (k+2)\phi_{l,k}] \mp$ $\mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin[k\phi_{2,k} - (k+2)\phi_{l,k}]]$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3(k+1)(k+2)}{2} \cdot A_{l,k}^3 B_k^k \cos^3 \phi_{l,k} [\cos[k\phi_{2,k} - (k+3)\phi_{l,k}] \mp$ $\mp \frac{\lambda}{\omega_0} \sin[k\phi_{2,k} - (k+3)\phi_{l,k}]]$
3	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$2 C_k(k+1) \left[ \cos\left(\phi_{l,k} + \phi_{2,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{l,s} + \phi_{3,s})\right) \pm \right.$ $\left. \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin\left(\phi_{l,k} + \phi_{2,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{l,s} + \phi_{3,s})\right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$
4	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$4 C_k(2k+3) \left[ \cos\left(\phi_{l,k} + \phi_{2,k} + \phi_{3,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{l,s} + \phi_{4,s})\right) \pm \right.$ $\left. \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin\left(\phi_{l,k} + \phi_{2,k} + \phi_{3,k} + \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_{l,s} + \phi_{4,s})\right) \right] \prod_{s=0}^{k-1} B_s$

Коэффициенты разложения  $\beta_k$  могут быть представлены и в алгебраической форме. В качестве примера в таблице 5.8 представлены коэффициенты разложения в ортогональном базисе Лежандра для типовых моделей корреляционных функций.

Таблица 5.8

№	$\rho_x(\tau)$	$\beta_k$
1	$e^{-\lambda \tau }$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{l}{\lambda + \alpha(2s+1)}$
2	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau )$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2}$
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau )$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2}$
4	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau  + \lambda^2 \tau^2 / 3)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{8\lambda^2 + 9\alpha\lambda(2s+1) + \alpha^2(2s+1)^2}{3[\lambda + \alpha(2s+1)]^3}$
5	$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$
6	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$2\alpha(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{[\lambda + \alpha(2s+1)]^2 + \omega_0^2}$

Алгебраические выражения для коэффициентов разложения типовых моделей корреляционных и ортогональных функций приведены в Приложении 10.

Воспользовавшись выражениями для оценки коэффициентов разложения, определим погрешности аппроксимации в соответствии с (5.17). На рисунке 5.3 представлены результаты оценки погрешности аппроксимации 5, 6 моделей с параметрами  $\lambda = 1$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha = 0,1961$  ортогональными функциями Лежандра.

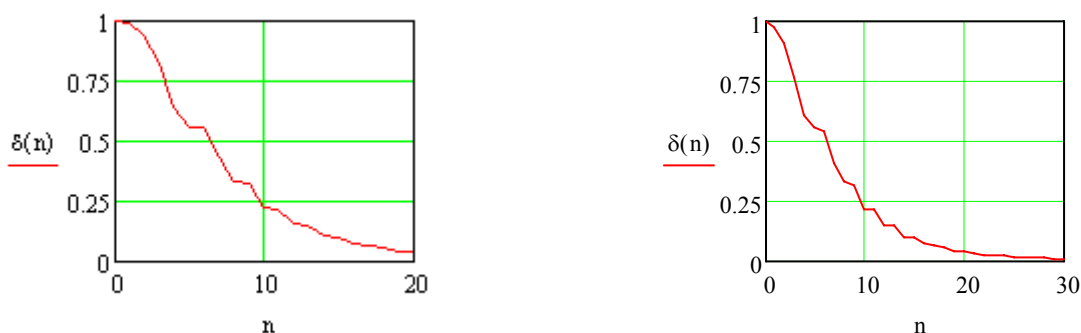


Рисунок 5.3 - Погрешность аппроксимации ортогональными функциями Лежандра

Из анализа рис. 5.3 видно, что при  $n \rightarrow \infty$   $\delta(n) \rightarrow 0$ , т.е. выполняется равенство Парсеваля (см. лабораторную работу 1).

### 5.1.3. Определение параметра масштаба ортогональных функций

Как показали исследования значение погрешности аппроксимации, определяемой выражением (5.17), зависит от параметра масштаба [21].

В таблице 5.9 приведены результаты определения погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции вида  $\rho_x(\tau, \lambda_s, \omega_{0,s}) = e^{-\lambda_s|\tau|} \cos(\omega_{0,s}\tau)$  при разных значениях  $m$ , в зависимости от отношения параметра ортогональных функций к показателю затухания исследуемых корреляционных функций –  $\chi_s = \frac{\gamma}{\lambda_s}$  для ортогональных базисов Якоби  $(\alpha, 0)$ .

Из полученных результатов видно, что при выбранной модели корреляционной функции,  $\mu = const$ ,  $m = const$ , погрешность существенным образом зависит от  $\chi$ , т.е.  $\gamma$ . Кроме того, наблюдаются локальные экстремумы погрешности, количество которых зависит от  $m$  [21]. Следует отметить, что исследователя интересует значение параметра  $\alpha$ , обеспечивающего минимум квадратической погрешности аппроксимации, т.е. определение глобального минимума.

Отметим, что точное решение задачи определения параметра масштаба в силу свойств ортогональных функций возможно лишь для ортогональных функций Лагерра [22, 23].

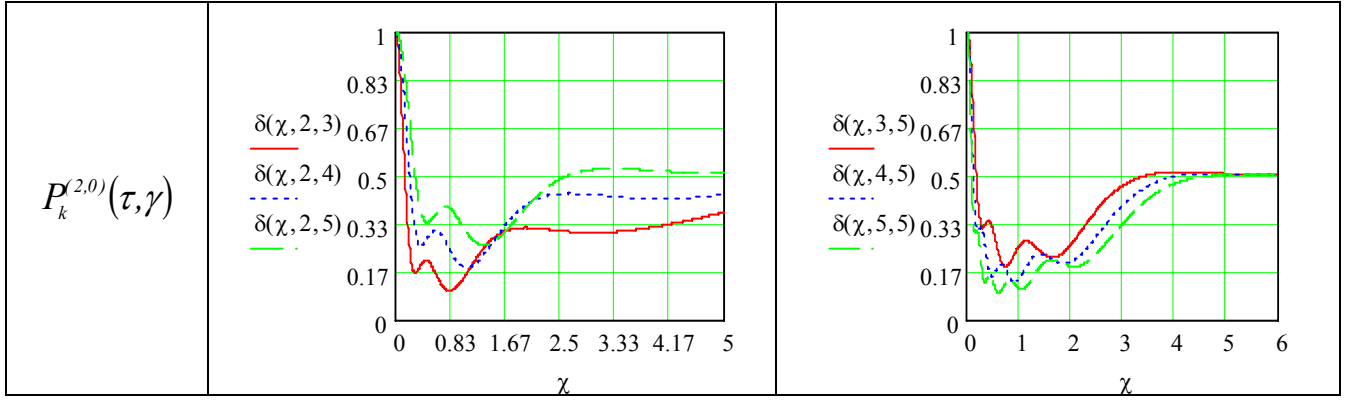
Для этого необходимо решить уравнение относительно  $\alpha$

$$\beta_{m+1} = 0.$$

Относительная методическая погрешность аппроксимации  
НКФ  $\delta(\chi/t, \mu)$  в ортогональном базисе Якоби  $(\alpha, 0)$

Таблица 5.9

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	График методической погрешности ( $\mu_j = 3, 4, 5; m = 2$ )	График методической погрешности ( $\mu_j = 5; m = 3, 4, 5$ )
$P_k^{(-1/2, 0)}(\tau, \gamma)$		
$P_k^{(1/2, 0)}(\tau, \gamma)$		
$P_k^{(1, 0)}(\tau, \gamma)$		
$P_k^{(0, 0)}(\tau, \gamma)$		



Рассмотрим один из эмпирических способов определения параметра масштаба ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = I$  [21]. Он основан на применении соотношения неопределенности [51]

$$\Delta\omega_{\omega,k} \tau_{k,u}^{(2)} = \frac{\pi}{2}, \quad (5.30)$$

где  $\Delta\omega_{\omega,k} = \frac{\int_0^\infty |W_k^*(j\omega)|^2 d\omega}{|W_k^*(j\omega)|_{max}^2}$  - эквивалентная частота пропускания ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

$W_k^*(j\omega) = \int_0^\infty \phi_k(\tau, \alpha) e^{-j\omega\tau} d\tau$  - частотная характеристика ортогонального фильтра

$k$ -ого порядка;

$\phi_k(\tau, \alpha) = \frac{I}{\|\psi_k\|^2} \psi_k(\tau, \alpha)$  - импульсная переходная характеристика ортогонально-

го фильтра  $k$ -ого порядка;

$\tau_{k,u}^{(2)} = \frac{\int_0^\infty \phi_k(\tau, \alpha) d\tau}{\phi_k(\tau, \alpha)_{max}} = W_k^*(0) / \phi_k(\tau, \alpha)_{max}$  - длительность импульсной переходной

характеристики ортогонального фильтра  $k$ -ого порядка;

Отсюда

$$\Delta\omega_{\omega,k} = \frac{\pi}{2\tau_{k,u}^{(2)}}. \quad (5.31)$$

Заметим, что квадраты модуля частотных характеристик рассматриваемых ортогональных фильтров соответствуют квадратам модуля апериодического звена первого порядка (см. таблицу 4.2), импульсная характеристика которого определяется выражением

$$h_k(\tau) = \frac{I}{\tau_{k,u}^{(2)}} \exp[-\tau_{k,u}^{(2)} \tau]. \quad (5.32)$$

Следовательно, можно записать, что для погрешности восстановления импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции 2% [21]

$$\tau_{k,u}^{(2)} = \frac{0,4}{\Delta\tau_0}, \quad (5.33)$$

где  $\Delta\tau_0 = \Delta\tau$  – интервал дискретизации случайного процесса.

Подставив выражение (5.33) в (5.31), получим

$$\Delta\omega_{\varepsilon,k} = \frac{0,2\pi}{\Delta\tau_0}. \quad (5.34)$$

Отсюда можно определить численное значение параметра масштаба для любого ортогонального базиса при  $m$  членов разложения ряда (5.16).

В таблице 5.10 приведены основные соотношения для определения  $\alpha/\gamma$  для различных ортогональных базисов.

Определения параметра масштаба ортогональных функций  
Лагерра, Лежандра, Дирихле

Таблица 5.10

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\Delta\omega_{\varepsilon,m}$	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\alpha$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2/4}$	$\frac{\pi\alpha}{4}$	$\frac{2}{\alpha}$	$\frac{0,8}{\Delta\tau_0}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{4(2m+1)^2\alpha^2}{(2m+1)^2\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(2m+1)\alpha}{2}$	$\frac{1}{(2m+1)\alpha}$	$\frac{0,4}{(2m+1)\Delta\tau_0}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{4(m+1)^2\alpha^2}{(m+1)^2\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(m+1)\alpha}{2}$	$\frac{1}{(m+1)\alpha}$	$\frac{0,4}{(m+1)\Delta\tau_0}$

В таблице 5.11 приведены основные соотношения для определения параметра масштаба  $\gamma$  для ортогональных функций Якоби  $(\alpha, 0)$  и Сонина-Лагерра.

Определения параметра масштаба ортогональных функций  
Якоби  $(\alpha, 0)$  и Сонина-Лагерра

Таблица 5.11

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\Delta\omega_{\varepsilon,m}$	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\gamma$
$P_k^{(-l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^2(4m+1)^2}{\left(\frac{4m+1}{2}\right)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(4m+1)\gamma}{4}$	$\frac{2}{(4m+1)\gamma}$	$\frac{0,8}{(4m+1)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^2(4m+3)^2}{\left(\frac{4m+3}{2}\right)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(4m+3)\gamma}{4}$	$\frac{2}{(4m+3)\gamma}$	$\frac{0,8}{(4m+3)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^2(m+1)^2}{(m+1)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(m+1)\gamma}{2}$	$\frac{1}{(m+1)\gamma}$	$\frac{0,4}{(m+1)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^2(2m+1)^2}{(2m+1)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(2m+1)\gamma}{2}$	$\frac{1}{(2m+1)\gamma}$	$\frac{0,4}{(2m+1)\Delta\tau_0}$

$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\gamma^2(2m+3)^2}{(2m+3)^2\gamma^2 + \omega^2}$	$\frac{\pi(2m+3)\gamma}{2}$	$\frac{1}{(2m+3)\gamma}$	$\frac{0,4}{(2m+3)\Delta\tau_0}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^4(m+1)^2}{(\gamma^2/4 + \omega^2)^2}$	$\frac{\pi\gamma}{8}$	$\frac{4}{\gamma}$	$\frac{1,6}{\Delta\tau_0}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^6(m+1)^2(m+2)^2}{4(\gamma^2/4 + \omega^2)^3}$	$\frac{3\pi\gamma}{32}$	$\frac{16}{3\gamma}$	$\frac{6,4}{3\Delta\tau_0}$

В таблице 5.12 приведены основные соотношения для определения параметра масштаба  $\gamma$  для ортогональных функций Якоби  $(0, \beta)$ .

Определения параметра масштаба ортогональных функций  
Якоби  $(0, \beta)$

Таблица 5.12

$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\frac{64(m+1)^6 \cdot \gamma^4}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$
	$\Delta\omega_{\gamma, m}$	$\frac{\pi\gamma(2m+1)(2m+3)}{8(m+1)}$
	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\frac{4(m+1)}{\gamma(2m+1)(2m+3)}$
	$\gamma$	$\frac{1,6(m+1)}{(2m+1)(2m+3)\Delta\tau_0}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$ W_m(j\omega) ^2$	$\frac{16(2m+3)^2(m+1)^4(m+2)^4 \cdot \gamma^6}{[(2m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+3)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2][(2m+5)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2]}$
	$\Delta\omega_{\gamma, m}$	$\frac{3\pi\gamma(2m+1)(2m+3)(2m+5)}{64(m+1)(m+2)}$
	$\tau_{m,u}^{(2)}$	$\frac{32(m+1)(m+2)}{3\gamma(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$
	$\gamma$	$\frac{12,8(m+1)(m+2)}{3\Delta\tau_0(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$

Так как для колебательных моделей КФ с погрешностью восстановления 2%

$$\Delta\tau_0 = \frac{0,4}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}, \quad (5.35)$$

выражения для определения параметра масштаба для различных ортогональных функций примут вид, представленный в таблице 5.13.



Параметр масштаба для колебательных моделей

Таблица 5.13

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\alpha / \gamma$
$L_k(\tau, \alpha)$	$2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$4\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{16\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{3}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$ $P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2m+1)}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(m+1)}$
$P_k^{-l(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(4m+1)}$
$P_k^{l(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(4m+3)}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(m+1)}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2m+3)}$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4(m+1)\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{(2m+1)(2m+3)}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{32(m+1)(m+2)\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}{3(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$

В работе [22] показано, что для ортогональных функций Лагерра параметр масштаба  $\alpha$  может быть определен в результате решения уравнения

$$\beta_0 = 1. \quad (5.36)$$

Рассмотрим это же уравнение для ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$ , в общем виде

$$\frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \rho_x(\tau) \psi_k^*(\tau, \alpha) d\tau - 1 = 0, \quad (5.37)$$

где  $\psi_k^*(\tau, \alpha) = \exp(-\tau / 2 \|\psi_k(\alpha)\|^2)$ .

Как видно из выражения (5.37), численное значение параметра масштаба зависит от вида корреляционной функции. Так для  $\rho_{x,5}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  это уравнение приведем к виду:

$$\frac{I}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^\infty \cos \omega_0 \tau \exp\left[-\left(1/2\|\psi_k(\alpha)\|^2 + \lambda\right)\tau\right] d\tau - I = 0. \quad (5.38)$$

Разрешив уравнение относительно  $I/\|\psi_k(\alpha)\|^2$ , получим:

$$I/\|\psi_k(\alpha)\|^2 = 2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (5.39)$$

Результаты определения параметра масштаба для различных ортогональных функций представлены в таблице 5.14.

Параметры масштаба ортогональных функций для 5 модели

Таблица 5.14

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)\}$	$\alpha_0(\gamma_0)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$
2	$D_k(\tau, \alpha), P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (k+1)$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (4k+1)$
4	$Leg_k(\tau, \alpha), P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (2k+1)$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (4k+3)$
6	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} / (2k+3)$

Решив уравнение (5.37) для корреляционных функций

$\rho_{x,6,7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ , получим:

$$I/\|\psi_k(\alpha)\|^2 = 2 \left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right). \quad (5.40)$$

Результаты определения параметра масштаба для различных ортогональных функций представлены в таблице 5.15.

Параметры масштаба ортогональных функций для 6,7 моделей

Таблица 5.15

№	$\{\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)\}$	$\alpha(\gamma)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$2 \left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right)$
2	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (4m+1)$
3	$D_k(\tau, \alpha), P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (m+1)$
4	$Leg_k(\tau, \alpha), P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (2m+1)$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$2 \left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (4m+3)$
6	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\left( \sqrt{2\lambda^2 + \omega_0^2} \mp \lambda \right) / (2m+3)$

Для ортогональных функций Сонина-Лагерра одно из возможных решений, обеспечивающее допустимую погрешность аппроксимации и лучшую сходимость с наименьшими вычислительными затратами, связано с введением ограничения (5.36) [21].

Решим уравнение

$$\frac{I}{\|L_0^{(\alpha)}\|^2} \int_0^\infty L_0^{(\alpha)}(\tau, \gamma) e^{-\lambda \tau} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right) \cdot \tau^\alpha d\tau = I \quad (5.41)$$

для моделей  $\rho_{x,6,7}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$ .

Проведя ряд преобразований, выражение (5.41) представим в виде:

$$\frac{\alpha!}{2\|L_0^{(\alpha)}\|^2} \left[ K1 \pm \frac{\lambda}{\omega_0} K2 \right] = I, \quad (5.42)$$

где  $K1 = \frac{I}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda + j\omega_0\right)^{\alpha+1}} + \frac{I}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda - j\omega_0\right)^{\alpha+1}};$

$$K2 = \frac{I}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda + j\omega_0\right)^{\alpha+1}} - \frac{I}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda - j\omega_0\right)^{\alpha+1}}.$$

Введем некоторые упрощения, позволяющие представить уравнение (5.42) в форме, удобной для дальнейшего преобразования и применения:

1. с увеличением параметра  $\alpha$   $K2$  принимает ничтожно малые значения, которыми можно пренебречь;

2. наиболее простой вид уравнение принимает при значении  $\alpha = 0$ .

Тогда с учетом принятых упрощений получим уравнение

$$\frac{\gamma}{2} \left[ \frac{\frac{\gamma}{2} + \lambda}{\left(\frac{\gamma}{2} + \lambda\right)^2 + \omega_0^2} \right] = I. \quad (5.43)$$

Проведя ряд преобразований, и решив получившееся квадратное уравнение с учетом того, что параметр масштаба  $\gamma > 0$ , получим

$$\gamma = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}. \quad (5.44)$$

Следует отметить, параметр масштаба  $\gamma$ , определенный по алгоритму (5.36), находится вблизи оптимального значения  $\gamma_{opt}$ , и обеспечивает погрешности аппроксимации, близкие к минимальным погрешностям. На рис. 5.4 построены двумерные зависимости относительной погрешности аппроксимации при разных значениях  $m$  и рассматриваемых  $\alpha$  от параметра масштаба, где в качестве модели КФ взята модель

$$\rho_{x,6}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right) \text{ с параметрами } \lambda = 1 \text{ и } \omega_0 = 5.$$

На рис. 5.5 представлены проекции двумерных зависимостей (см. рис. 5.4), представляющий относительную погрешность аппроксимации на плоскость  $m = 5$  при заданных значениях  $\alpha$  в одной системе координат. Заметим, что прямая линия на рисунке символизирует найденное решение (5.44)

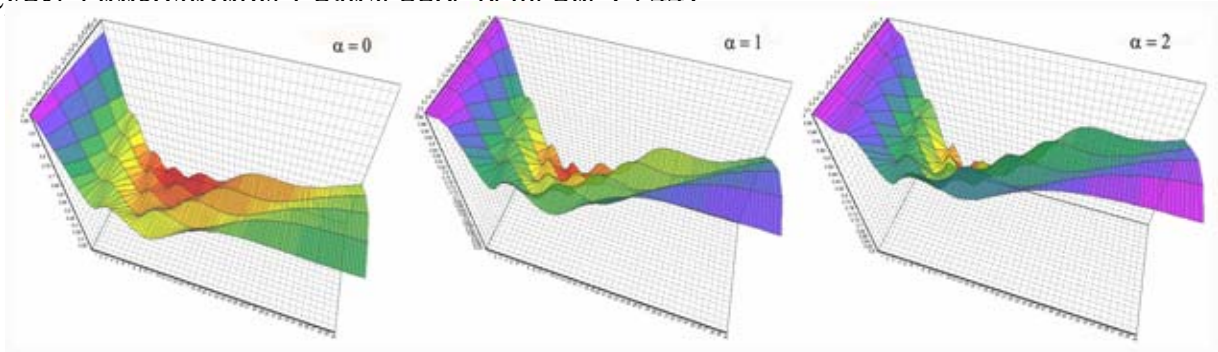


Рисунок 5.4 - Двумерные зависимости относительной погрешности аппроксимации от параметра масштаба  $\gamma \in (0, 40]$  и числа членов  $m \in [2, 6]$  для  $\alpha = 0, 1, 2$

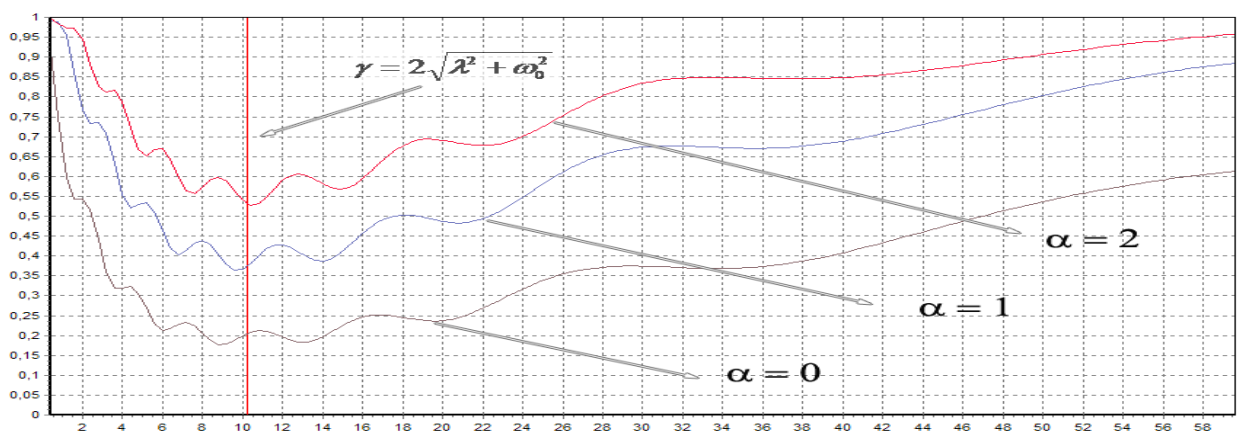


Рисунок 5.5. - Зависимости относительной погрешности аппроксимации от параметра масштаба  $\gamma \in (0, 60]$  при  $m = 5$  для  $\alpha = 0, 1, 2$

Из рис. 5.5 видно, что значение  $\gamma$ , полученное в результате решения уравнения (5.41), при всех исследуемых значениях параметра  $\alpha$  располагается вблизи глобального оптимума, и с увеличением данного параметра решение (5.44) становится более близким, что объясняется правильностью введенных выше упрощений.

Аналогичные результаты можно получить и для ортогональных функций Якоби  $(0, \beta)$ , Чебышева 1 (аналогично Якоби  $(-0,5, 0)$ ), Чебышева 2 (аналогично Якоби  $(0,5, 0)$ ), выполнив преобразования (5.41) - (5.44) [47].

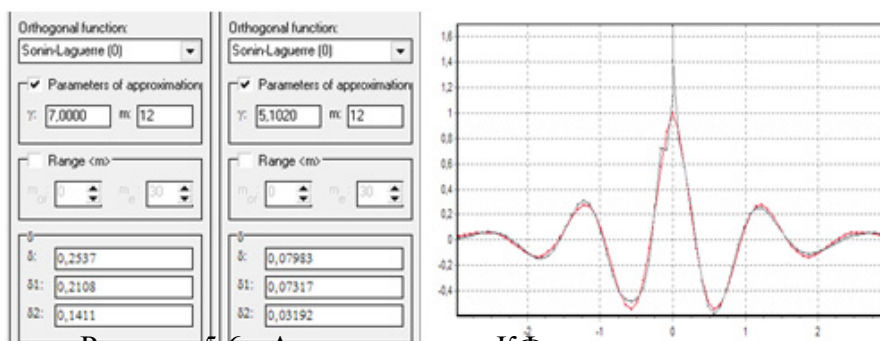


Рисунок 5.6 - Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра

Ниже для примера на рис. 5.6 приведены результаты аппроксимации КФ 5 модели при произвольном выборе численного значения  $\alpha = 7,000$ ,  $m = 12$  (левая ветвь).

Полученные ре-

зультаты можно обобщить на аппроксимацию взаимных корреляционных функций ортогональными функциями. При этом необходимо аппроксимировать как правую, так и левую ветви взаимной корреляционной функции, т. е. необходимо искать модель в виде:

$$K_{xy}(\tau) = A_{\max} \left[ \sum_{k=0}^{m1} \beta_{k,n} I(\tau) \psi_k(\tau, \alpha_1) + \sum_k^{m2} \beta_{k,l} I(-\tau) \psi_k(-\tau, \alpha_2) \right], \quad (5.45)$$

где

$$I(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \text{ и } I(-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > 0; \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0; \\ 1, & \tau < 0, \end{cases} \quad (5.46)$$

$A_{\max} = \sigma_x \sigma_y$  - наибольшее значение ВКФ;

$$\beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (5.47)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{yx}(\tau) \psi_n(\tau, \alpha_l) d\tau. \quad (5.48)$$

Исследования показали, что это будет справедливо, если максимум взаимной корреляционной функции будет находиться в «нуле». В противном случае в нулевой точке будет наблюдаться выброс (см. рис. 5.7).

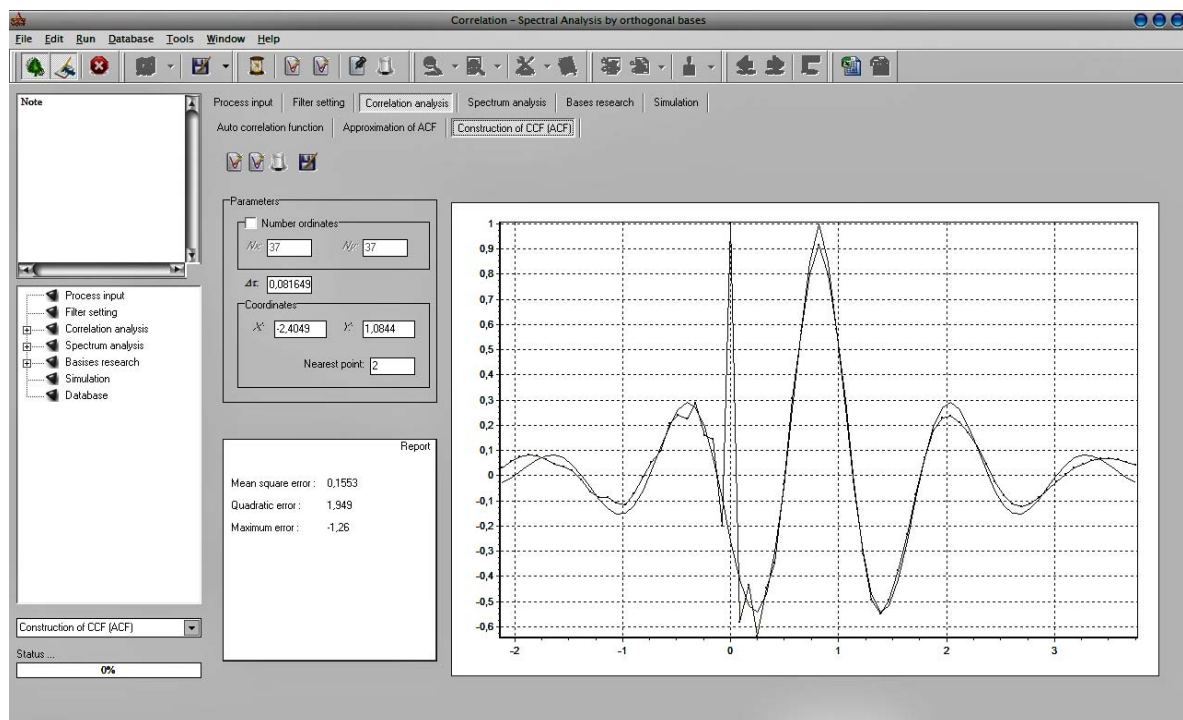


Рисунок 5.7 - Результаты аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями Лагерра

Из анализа результатов видно, что даже при аппроксимации простейших моделей взаимных корреляционных функций ортогональными функциями, например Лагерра, для обеспечения допустимых погрешностей необходимо определять большое

число членов разложения ряда (в рассматриваемом примере  $m = 40$ ). Кроме того, после аппроксимации необходима нормировка, так как значение модели корреляционной функции в нуле не равно 1. Эти обстоятельства без модификации модели затрудняют её применение.

Для устранения этих недостатков необходимо, в первую очередь, определить  $\tau_m$  - значение аргумента, при котором  $K_{axy}(\tau)$  достигает своего максимального значения, и искать модель взаимной корреляционной функции в виде:

$$K_{axy}(\tau) = A_{max} \left[ \sum_{k=0}^{m_1} \beta_{k,n} I(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_k^{m_2} \beta_{k,l} I(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right], \quad (5.46)$$

$$\text{где } \beta_{k,n} = \alpha_n \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau + \tau_m) \psi_n(\tau, \alpha_n) d\tau; \quad (5.47)$$

$$\beta_{k,l} = \alpha_l \int_0^{\infty} \rho_{xy}(\tau_m - \tau) \psi_n(\tau_m, \alpha_l) d\tau. \quad (5.48)$$

## 5.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности  $\mu$  определить коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,...,m}$ . Построить графическую зависимость  $\{\beta_k\}_{k=0,...,m}$ .

2. Построить зависимость  $\delta^{(1)}(m/\chi, \mu) = \frac{\Delta(m/\chi, \mu)}{\sqrt{\int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}$ . Значение параметра  $\chi$  выбрать произвольно,  $\mu = 0 \div 5$ . Убедиться в справедливости равенства Парсеваля (см. лаб. работу 1).

3. Построить зависимость  $\delta^{(2)}(\chi/m, \mu)$ ,  $m = 2 \div 6$ ,  $\mu = 0 \div 5$  (Результаты представить аналогично результатам таблицы 5.9). Определить количество локальных минимумов  $\delta(\chi/m, \mu)$ , их численные значения  $\bar{\chi}_{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.

4. Построить зависимость  $\delta_{min}^{(3)}(\mu/m, \chi_{opt})$  и  $\delta_{min}^{(1)}(m/\mu, \chi_{opt})$ .

5. Сравнить результаты оценки  $\delta_1^{(3)}(\mu/m, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(3)}(\mu/m, \chi_2)$ ,  $\delta_1^{(1)}(m/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(1)}(m/\mu, \chi_2)$  с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра  $\chi_1$  определяется по таблице 5.10-5.13, а  $\chi_2$  - по таблицам 5.13-5.14.

6. Построить модели корреляционной функции, соответствующие выражению 5.16, для  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_{opt}$ ,  $m = 5, 10$ .

7. Оформить отчет.

## 5.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.

4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Ортогональная модель корреляционной функции в заданном ортогональном базисе.
  6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$ .
  7. Аналитические выражения для оценки  $\chi_1$  и  $\chi_2$ .
  8. Графические зависимости  $\delta^{(1)}(m/\chi, \mu)$  (пункт 2).
  9. Графические зависимости  $\delta^{(2)}(\chi/m, \mu)$  (пункт 3).
  10. Графические зависимости  $\delta_{\min}^{(3)}(\mu/m, \chi_{opt})$  и  $\delta_{\min}^{(1)}(m/\mu, \chi_{opt})$  (пункт 4).
  11. Графические зависимости  $\delta_1^{(3)}(\mu/m, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(3)}(\mu/m, \chi_2)$ ,  $\delta_1^{(1)}(m/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_2^{(1)}(m/\mu, \chi_2)$  (пункт 5).
  12. Графики моделей корреляционной функции (пункт 6).
  13. Выводы.
- Пример выполнения вычислительного практикума 5 приведен в Приложении 11.

#### 5.4. Контрольные вопросы

1. Какие параметры входят в ортогональную модель корреляционной функции?
2. Как параметры ортогональной модели влияют на вид оцениваемой корреляционной функции?
3. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с  $m$  и  $\mu$ ?
4. Какое условие положено в основу приближенного определения параметра масштаба?
5. Каким образом изменится длительность ортогональной функции при увеличении параметра масштаба?
6. Как изменится численное значение параметра масштаба при увеличении числа членов разложения ряда?
7. Как изменится численное значение параметра масштаба при увеличении показателя колебательности корреляционной функции?

## 6. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ С УЧЕТОМ УСЛОВИЯ НОРМИРОВКИ

**Цель работы:** изучение метода и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями с учетом условия нормировки.

### 6.1. Теоретические основы лабораторной работы

Одной из отрицательных черт аппроксимации корреляционной функции ортогональными функциями является то, что её основное свойство

$$\hat{K}_a(\theta) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(\theta, \alpha) \neq \sigma_x^2 \quad (6.1)$$

при произвольной величине  $\alpha$  не выполняется при конечном  $m$  [21] (см. рис. 6.1), т.е. не выполняется условие нормировки.

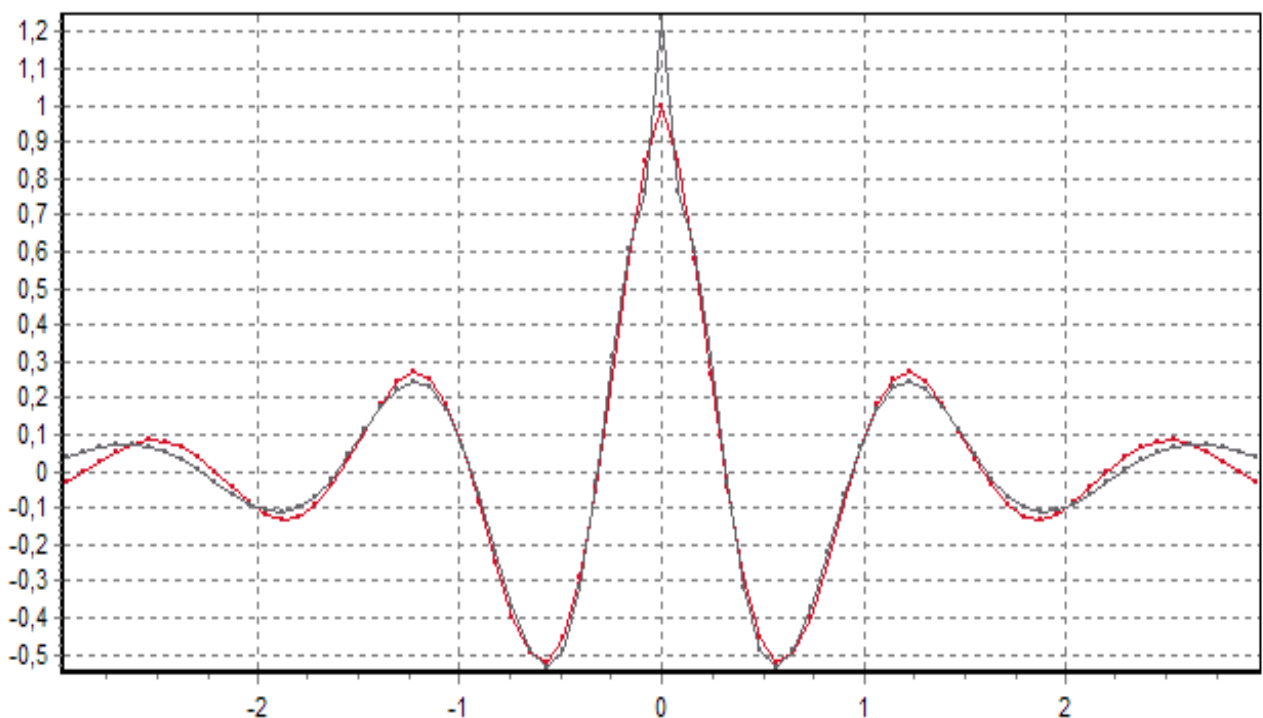


Рисунок 6.1 - Аппроксимация КФ 5 модели с  $\mu = 5$   
ортогональными функциями Лагерра -  $m = 15$ ,  $\alpha = 4,899$

Для обеспечения условия (6.1) аналитическое выражение  $K_x(\tau)$  можно искать в виде:

$$\hat{K}_a(\tau) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \nu_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha)$$



где 
$$\nu_k = \frac{\beta_k}{\sum_{k=0}^m \beta_k} . \quad (6.2)$$

Легко проверить, что в этом случае  $\hat{\rho}_a(0) = \sum_{k=0}^m \nu_k \psi_k(0, \alpha) = 1$ . Однако, коэффициенты разложения  $\nu_k$ , определенные по формуле (6.2), не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Таким образом, общим недостатком известных способов определения коэффициентов разложения является то, что они либо нарушают основное свойство корреляционных функций, либо не обеспечивают минимума квадратической погрешности аппроксимации.

Поставим задачу определить коэффициенты разложения корреляционной функции  $b_k$  для ортогональных функций, у которых  $\mu(\tau) = 1$ ,

$$\hat{\rho}_a(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \quad (6.3)$$

так, чтобы квадратическая погрешность аппроксимации была минимальной при дополнительном условии

$$\hat{\rho}_a(0) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = 1 . \quad (6.4)$$

Т.е. для этого необходимо минимизировать  $\Delta_I$  по  $b_k$  [21, 22]:

$$\Delta_I = \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau + \lambda \cdot \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \min$$

Найдём частные производные  $\frac{\partial \Delta_I}{\partial b_n}$  и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial \Delta_I}{\partial b_n} = -2 \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) \right] \psi_n(\tau, \alpha) d\tau + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0 . \quad (6.5)$$

Выполнив промежуточные преобразования, определим

$$-2\beta_n \|\psi_n\|^2 + 2b_n \|\psi_n\|^2 + \lambda \psi_n(0, \alpha) = 0 . \quad (6.6)$$

Отсюда

$$b_n = \beta_n - \frac{\lambda \cdot \psi_n(0, \alpha)}{2 \cdot \|\psi_n\|^2} . \quad (6.7)$$

Подставляя найденное значение  $b_n$  в выражение (6.4), получим:

$$\sum_{k=0}^m \left[ \beta_k - \frac{\lambda \psi_k(0, \alpha)}{2 \|\psi_n\|^2} \right] \cdot \psi_k(0, \alpha) = 1 . \quad (6.8)$$

Тогда

$$\frac{\lambda}{2} = - \frac{\left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha) \right)}{\sum_{k=0}^m \frac{\psi_k^2(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2}} \quad (6.9)$$

Отметим, что для рассматриваемых ортогональных базисов  $\psi_k^2(0, \alpha) = 1$ .

Подставив  $\lambda/2$  в выражение для оценки коэффициента разложения  $b_n$ , получим:

$$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot \psi_k(0, \alpha)\right)}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}} \cdot \frac{\psi_n(0, \alpha)}{\|\psi_n\|^2} = \beta_n + C_n. \quad (6.10)$$

Выражения для  $C_n$  для различных ортогональных базисов представлены в таблице 6.1.

Значения коэффициентов  $C_n$  при ограничениях на модель  
корреляционной функции  $\mu(\tau) = 1$

Таблица 6.1

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$C_n$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)}{(m+1)^2} \cdot (-1)^n \cdot (2n+1)$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2(n+1) \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (4n+1) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(2m+1)}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (4n+3) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(2m+3)}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (2n+1) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)^2}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n 2(n+1) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{(-1)^n (2n+3) \left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{(m+1)(m+3)}$

Заметим, что при произвольном весе ортогональной функции  $\mu(\tau)$  необходимо минимизировать  $\Delta_l^{(1)}$  по  $b_k$ :

$$\Delta_l^{(1)} = \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 \mu(\tau) d\tau + \lambda \cdot \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(0, \alpha) = \min.$$

Выполнив преобразования, аналогичные (6.5) – (6.10), получим аналитические выражения для коэффициентов  $C_n$  (см. таблицу 6.2).

Значения коэффициентов  $C_n$  при ограничениях на модель  
корреляционной функции  $\mu(\tau) \neq 1$

Таблица 6.2

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$C_n$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2 \left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)}{(m+1)(m+2)} (n+1)$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3 \left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \right)}{(m+1)(m+2)(m+3)} (n+1)(n+2)$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4 \left[ 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]}{(m+1)^2 (m+2)^2} (-1)^n (n+1)^3$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{3 \left[ 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]}{(m+1)^2 (m+2)^2 (m+3)^2} (-1)^n (2n+3)(n+1)^2 (n+2)^2$
$T_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right)}{(m+1)} (-1)^n$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{6 \left( 1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right)}{(m+1)(m+2)(2m+3)} (-1)^n (n+1)^2$

Определим погрешность аппроксимации  $\Delta_l$  ( $\mu(\tau) = 1$ ).

$$\begin{aligned} \Delta_l &= \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \\ &= \tau_k^{(4)} - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Представим погрешности аппроксимации КФ в виде:

$$\Delta_l = \Delta + \Delta_2, \quad (6.12)$$

где  $\Delta_2$  составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (6.4).

Тогда

$$\begin{cases} \Delta = \tau_k^{(4)} - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 = \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{cases} \quad (6.13)$$

Вторую составляющую погрешности  $\Delta_2$  удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(0, \alpha)\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{\|\psi_k\|^2}}. \quad (6.14)$$

В таблице 6.3. приведены выражения для оценки  $\Delta$  и  $\Delta_2$  для различных базисов.

Составляющие методической погрешности аппроксимации НКФ  
ортогональными функциями  $\mu(\tau) = 1$

Таблица 6.3

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\Delta$	$\Delta_2$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k^2$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{\alpha(m+1)}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)^2}{2\alpha(m+1)^2}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{\alpha(m+1)(m+2)}$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{4k+1}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(2m+1)}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{4k+3}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(2m+3)}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{k+1}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]^2}{\gamma(m+1)(m+2)}$

$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+1}$	$\frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot (-1)^k\right)^2}{2\gamma(m+1)^2}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\tau_k^{(4)} - \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{2k+3}$	$\frac{\left[1 - \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k\right]}{2\gamma(m+1)(m+3)}$

При произвольном весе ортогональной функции  $\mu(\tau) \neq 1$

$$\begin{aligned} \Delta_k^{(1)} &= \int_0^\infty \left[ \rho_x(\tau) - \sum_{k=0}^m b_k \cdot \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 \mu(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m C_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned}$$

В этом случае

$$\Delta_k^{(1)} = \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2.$$

Составляющие методической погрешности аппроксимации нормированной корреляционной функции ортогональными функциями при  $\mu(\tau) \neq 1$  представлены в таблице 6.4.

Составляющие методической погрешности аппроксимации НКФ  
ортогональными функциями  $\mu(\tau) \neq 1$

Таблица 6.4

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\Delta_k^{(1)}$	$\Delta_2$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)}$	$\frac{2}{\gamma^2} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{(m+1)(m+2)}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{4}{\gamma^3} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)(k+2)}$	$\frac{12}{\gamma^3} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{(m+1)(m+2)(m+3)}$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{1}{4\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)^3}$	$\frac{1}{\gamma} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{(m+1)^2 (m+2)^2}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(2k+3)(k+1)^2 (k+2)^2}$	$\frac{6}{\gamma} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{(m+1)^2 (m+2)^2 (m+3)^2}$

$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{\pi}{4\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k^2, k=0; \\ \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{\pi}{8\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k^2, k \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\pi \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{4\gamma(m+1)}, k=0; \\ \frac{\pi \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{8\gamma(m+1)}, k \neq 0 \end{cases}$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{\pi}{8\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)^2}$	$\frac{3\pi \left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k\right)^2}{4\gamma(m+1)(m+2)(2m+3)}$

В [22] для ортогонального базиса Лагерра было показано, что  $\Delta$  является функцией параметра  $\alpha$ . Можно показать, что и погрешность  $\Delta_2$ , которую с учетом (6.14) приведем к виду:

$$\Delta_2 = \frac{I}{\alpha(m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega_1) S_{x_n}(\omega_2) \left[ \frac{j\omega_1 - \alpha/2}{j\omega_1 + \alpha/2} \frac{j\omega_2 - \alpha/2}{j\omega_2 + \alpha/2} \right]^{m+1} d\omega_1 d\omega_2, \quad (6.15)$$

также является функцией параметра  $\alpha$ .

Найдём условие определения оптимального значения параметра  $\alpha$ , при котором  $\Delta_l = \min$ .

Это условие, как следует из (6.12), найдем из уравнения:

$$\frac{\partial \Delta_l}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = 0. \quad (6.16)$$

Значение  $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = & -(m+1) \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 - \right. \\ & \left. - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

а  $\frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha}$  с учётом (6.15) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_2}{\partial \alpha} = & -\frac{I}{\alpha^2(m+1)} \left\{ 2\alpha(m+1) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} d\omega \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_n}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Подставив в (6.16) выражения (6.17) и (6.18), после промежуточных преобразований получим:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -\frac{I}{\alpha^2(m+1)} \left\{ \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}(\omega) \frac{j\omega}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]^2 - \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}(\omega) \frac{\alpha/2}{j\omega + \alpha/2} W_m(j\omega) d\omega \right]^2 \right\}. \quad (6.19)$$

Представляя в выражении (6.19) разность квадратов как произведение суммы оснований на их разность, получим:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} = -\frac{I}{\alpha^2(m+1)} \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}(\omega) W_m(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right] \times \\ \times \left[ \alpha(m+1) \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}(\omega) W_{m+1}(j\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S_{xH}(\omega) W_m(j\omega) (j\omega - \alpha/2) d\omega \right]. \quad (6.20)$$

Выражение (6.20) с учётом (6.11) равно:

$$\frac{\partial \Delta_l}{\partial \alpha} = -\frac{m+1}{\alpha^2} b_m b_{m+1}. \quad (6.21)$$

Так как коэффициент  $b_m \neq 0$  и параметр  $\alpha \neq 0$ , условие минимума погрешности  $\Delta_l$  примет вид:

$$b_{m+1} = \beta_{m+1} + \frac{1 - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1} = 0. \quad (6.22)$$

Таким образом, при аппроксимации корреляционной функции для обеспечения минимума квадратической погрешности требуется изменением параметра  $\alpha$  добиться равенства нулю  $\beta_{m+1}$  коэффициента. Значения  $b_0, \dots, b_m$  в этом случае будут оптимальными.

На рис.6.2. представлены результаты аппроксимации КФ 5 модели с  $\mu = 5$ , коэффициенты разложения которой определяются в соответствии с выражением (6.10).

Из анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- число корней уравнения (6.22) в общем случае равно  $(m+1)$ ;
- величина минимума погрешности  $\Delta_l$  зависит от найденного значения  $\alpha$ ;
- для обеспечения минимума-минимума погрешности необходимо правильно выбирать диапазон изменения  $\alpha$ , т.е. необходима априорная информация о свойствах процесса. Как показали исследования [22],  $\alpha_{opt}$  находится вблизи корня, найденного в результате решения уравнения  $\beta_0 - 1 = 0$ .

Следует отметить, что при изменении числа членов разложения ряда (6.3), необходимо пересчитать в соответствии с (6.10) все параметры  $b_k$ .

К сожалению, для других ортогональных базисов аналитически решить задачу поиска оптимального значения  $\alpha$  не удалось.

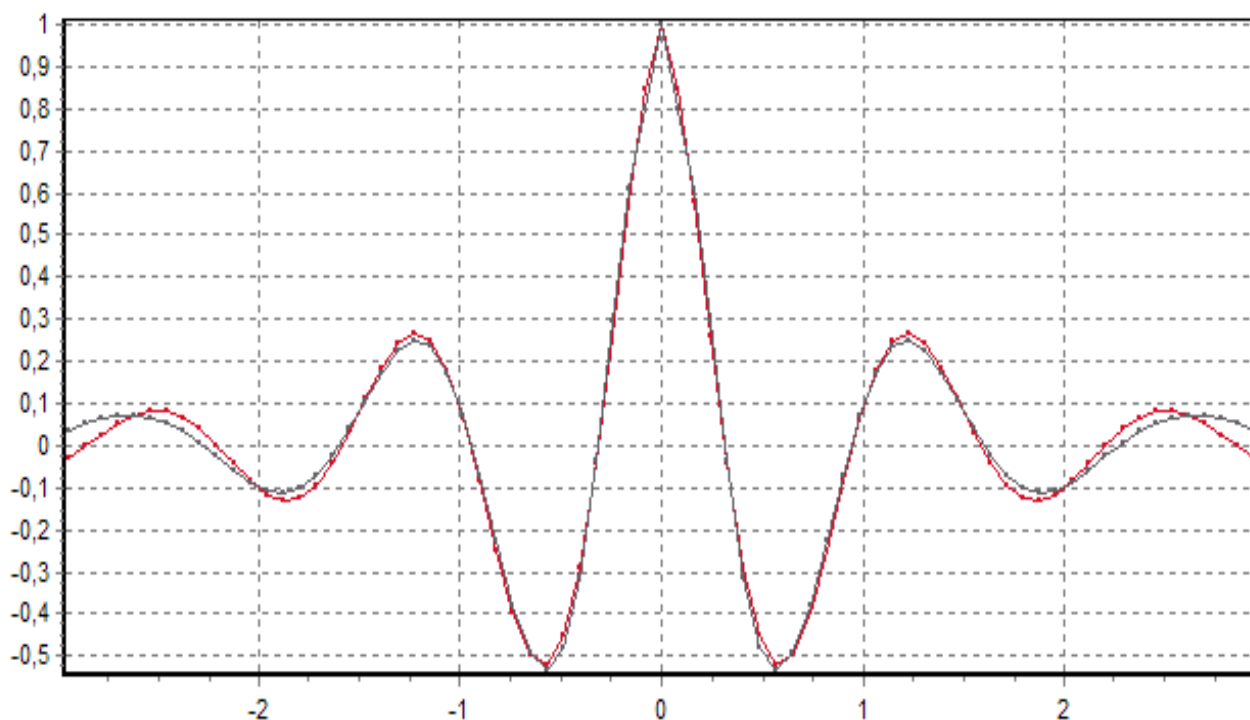


Рисунок 6.2 - Аппроксимация КФ 5 модели с  $\mu = 5$   
ортогональными функциями Лагерра -  $m = 15$ ,  $\alpha = 4,899$

## 6.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности  $\mu$  и  $m$  определить коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ . Параметр  $\alpha$  задать произвольно. Построить графическую зависимость  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ .
2. Построить зависимость  $\delta_b^{(2)}(\chi/t, \mu)$ ,  $m = 2 \div 6$ ,  $\mu = 0 \div 5$  (Результаты представить аналогично результатам таблицы 5.6). Определить количество локальных минимумов  $\delta_b^{(2)}(\chi/t, \mu)$ , численные значения параметров  $\bar{\chi}_{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.
3. Построить зависимости  $\delta_{b,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$  и  $\delta_{b,min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$  и сравнить их с соответствующими зависимостями  $\delta_{\beta,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$  и  $\delta_{\beta,min}^{(2)}(m/\mu, \chi_{opt})$ .
4. Сравнить результаты оценки  $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu/t, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu/t, \chi_2)$ ,  $\delta_{b,1}^{(2)}(m/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(2)}(m/\mu, \chi_2)$  с соответствующими минимальными оценками погрешности. Значение параметра  $\chi_1$  определяется по таблице 5.10-5.13, а  $\chi_2$  - по таблицам 5.14.
5. Построить модели корреляционной функции, соответствующие выражению 6.3, для  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_{opt}$ ,  $m = 5, 10$ .
6. Оформить отчет.



### 6.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
  2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Ортогональная модель корреляционной функции в заданном ортогональном базисе.
  6. Аналитическое выражение для оценки коэффициентов разложения  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$ ,  $\chi_1$  и  $\chi_2$ .
  7. Графические зависимости  $\delta_b^{(2)}(\chi/t, \mu)$  (пункт 2).
  8. Графические зависимости  $\delta_{b,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$ ,  $\delta_{b,min}^{(2)}(t/\mu, \chi_{opt})$ ,  $\delta_{\beta,min}^{(1)}(\mu/t, \chi_{opt})$  и  $\delta_{\beta,min}^{(2)}(t/\mu, \chi_{opt})$  (пункт 3).
  9. Графические зависимости  $\delta_{b,1}^{(1)}(\mu/t, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(1)}(\mu/t, \chi_2)$ ,  $\delta_{b,1}^{(2)}(t/\mu, \chi_1)$ ,  $\delta_{b,2}^{(2)}(t/\mu, \chi_2)$  (пункт 5).
  10. Графики моделей корреляционной функции (пункт 6).
  11. Выводы.
- Пример выполнения вычислительного практикума 6 приведен в Приложении 12.

### 6.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл условия нормировки ортогональной модели корреляционной функции.
2. Какие параметры входят в ортогональную модель корреляционной функции при выполнении условия нормировки?
3. Из каких соображений выбирается значение параметра масштаба ортогональных функций?
4. Для какого ортогонального базиса возможно точное решение определения параметра масштаба? Почему?
5. Как количество локальных экстремумов погрешности аппроксимации связаны с  $t$  и  $\mu$ ?
6. Перечислите недостатки метода построения ортогональной модели с применением корректирующих коэффициентов.

## 7. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями.

### 7.1. Теоретические основы вычислительного практикума

Спектральные плотности мощности представляют собой частотное распределение энергетических характеристик случайного процесса. Существуют различные способы их определения, например: преобразование Фурье процесса, преобразование Фурье корреляционной функции. Определим спектральную плотность мощности в виде [4, 48]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.1)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Винера-Хинчина, можно установить связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью мощности:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.2)$$

Определив параметры ортогональной модели корреляционной функции  $b_0, \dots, b_m, \alpha$

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \left\{ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right\}, \quad (7.3)$$

оценим спектральную плотность мощности случайного процесса.

Для этого необходимо подставить модель корреляционной функции (7.3) в выражение для определения спектральной плотности мощности. В результате получим.

$$\begin{aligned} S_a(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(\tau, \alpha) l(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k \psi_k(-\tau, \alpha) l(-\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^m b_k [W_k(j\omega) + W_k(-j\omega)] \right] = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Re} W_k(j\omega). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Воспользовавшись результатами, представленными в 3 разделе, приведем аналитические модели спектральной плотности для различных базисов (см. табл. 7.1-7.2).

Аналитические выражения спектральной плотности мощности с использованием тригонометрических функций

Таблица 7.1

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\varphi_k / \varphi$	$S_a(\omega)$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\alpha}$	$\frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos((2k+1)\varphi)$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma \pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} [1 + (-1)^k \cos(2(k+1)\varphi)]$

3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{2\omega}{\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \left[ \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos((2k+3)\varphi)}{2\cos\varphi} + k+1 \right]$
4	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\arctg \frac{\omega}{(2k+1)\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
5	$D_k(\tau, \alpha)$	$\arctg \frac{\omega}{(k+1)\alpha}$	$\frac{\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k}{(k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
6	$P_k^{-1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{2\omega}{(4k+1)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
7	$P_k^{1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{2\omega}{(4k+3)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+3)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{\omega}{(k+1)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
9	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{\omega}{(2k+1)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
10	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{\omega}{(2k+3)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+3)} \cos\varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$

Аналитические выражения спектральной плотности мощности с использованием биномиальных коэффициентов для ортогональных функций Якоби  $(0, \beta)$  и Чебышева

Таблица 7.2

№	$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$\varphi_k$	$S_a(\omega)$
1	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{\omega}{(2k+1)\gamma}$	$\frac{\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$
2	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{\omega}{(2k+1)\gamma}$	$\frac{2\sigma_x^2}{\gamma\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$
3	$T_k(\tau, \gamma)$	$\arctg \frac{\omega}{(2(k-s)+1)\gamma}$	$\begin{cases} \frac{1}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \cos^2 \varphi_{0,0}, k=0, \\ \frac{1}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos^2 \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)}, k \neq 0 \end{cases}$
4	$U_k(\tau, \gamma)$		$\frac{1}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos^2 \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)}$

На рисунке 7.1 представлены результаты аппроксимации КФ - восстановление СПМ в ортогональном базисе Якоби с параметрами  $(0,0)$  (функции Лежандра) для случайного процесса с  $\rho_x(\tau) = e^{-|\tau|} \cos 5\tau$ ,  $N = 5000$ ,  $\Delta\tau = 0,078$ .

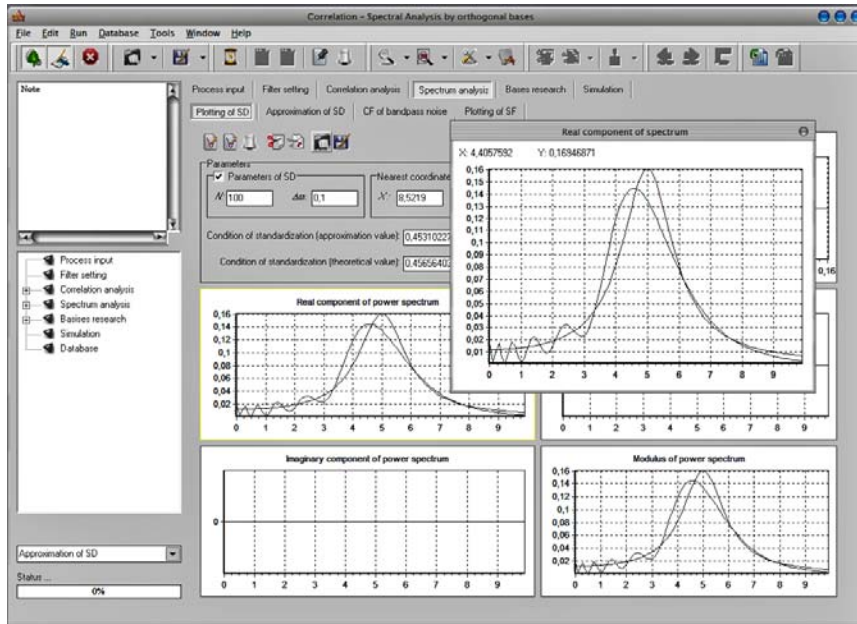


Рисунок 7.1 - Результат восстановления СПМ ортогональными функциями Якоби (функциями Лежандра) с параметрами  $(0, 0)$

Полученные результаты можно обобщить на оценку взаимной спектральной плотности мощности и её составляющих по параметрам ортогональных моделей ВКФ.

Представим модель ВКФ в виде:

$$K_{axy}(\tau) = \sigma_x \sigma_y \left\{ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} I(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} I(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right\}. \quad (7.5)$$

где  $\tau_m$  - значение аргумента, соответствующего максимуму ВКФ

Определим взаимную спектральную плотность мощности

$$S_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} I(\tau - \tau_m) \psi_k(\tau - \tau_m, \alpha_1) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} I(\tau_m - \tau) \psi_k(\tau_m - \tau, \alpha_2) \right] \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (7.6)$$

Введем замену переменных  $u = \tau - \tau_m$ . Тогда

$$\begin{aligned} S_{axy}(j\omega) &= \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} \int_0^{\infty} \psi_k(u, \alpha_1) \exp(-j\omega u) du + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} \int_{-\infty}^0 \psi_k(-u, \alpha_2) \exp(-j\omega u) du \right] = \\ &= \frac{\sigma_x \sigma_y \exp(-j\omega\tau_m)}{2\pi} \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} W_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} W_k(-j\omega) \right]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} ReS_{axy}(j\omega) &= \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ \cos\omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ReW_k(j\omega) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ReW_k(j\omega) \right] - \sin\omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ImW_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ImW_k(j\omega) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$ImS_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} \left\{ -\sin\omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ReW_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ReW_k(j\omega) \right] + \cos\omega\tau_m \left[ \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ImW_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ImW_k(j\omega) \right] \right\}.$$

Введем обозначения

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ReW_k(j\omega) + \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ReW_k(j\omega); \quad (7.8)$$

$$B(\omega) = \sum_{k=0}^{m1} b_{k,n} ImW_k(j\omega) - \sum_{k=0}^{m2} b_{k,l} ImW_k(j\omega). \quad (7.9)$$

Окончательно получим

$$ReS_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} [A(\omega) \cos \omega\tau_m - B(\omega) \sin \omega\tau_m]; \quad (7.10)$$

$$ImS_{axy}(j\omega) = \frac{\sigma_x \sigma_y}{2\pi} [B(\omega) \cos \omega\tau_m - A(\omega) \sin \omega\tau_m]. \quad (7.11)$$

В таблицах 7.4 – 7.5 для различных ортогональных базисов приведены выражения для  $ReW_k(j\omega)$  и  $ImW_k(j\omega)$ .

Вещественные и мнимые части преобразования Фурье ортогональных функций с использованием тригонометрических функций

Таблица 7.4

$\psi_k(\tau, \gamma/\alpha)$	$ReW_k(j\omega)$	$ImW_k(j\omega)$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2}{\alpha} (-1)^k \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi$	$-\frac{2}{\alpha} (-1)^k \cos \varphi \sin(2k+1)\varphi$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma(k+1)} (1 + (-1)^k \cos[2(k+1)\varphi])$	$\frac{1}{\gamma(k+1)} ((-1)^{k+1} \sin[2(k+1)\varphi])$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma(k+1)(k+2)} \left( \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos[(2k+3)\varphi]}{2\cos\varphi} + k+1 \right)$	$\frac{2}{\gamma(k+1)(k+2)} \left( \frac{(-1)^{k+1} \sin[(2k+3)\varphi]}{2\cos\varphi} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2} \right)$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$	$-\frac{1}{(2k+1)\alpha} \cos \varphi_k \sin \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$	$-\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha} \cos \varphi_k \sin \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
$P_k^{-l(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(4k+1)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$	$-\frac{2}{(4k+1)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
$P_k^{l(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(4k+3)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$	$-\frac{2}{(4k+3)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$	$-\frac{1}{(k+1)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$

$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(2k+3)\gamma} \cos \varphi_k \cos \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$	$-\frac{1}{(2k+3)\gamma} \cos \varphi_k \sin \left[ \varphi_k + 2 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s \right]$
-----------------------------	--	---

Вещественные и мнимые части преобразования Фурье ортогональных функций с использованием биномиальных коэффициентов

Таблица 7.5

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$Re W_k(j\omega)$	$Im W_k(j\omega)$
$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$	$-\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}$
$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_s}{(2s+1)}$	$-\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_s \sin \varphi_s}{(2s+1)}$
$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{\cos^2 \varphi_{0,0}}{\gamma}, k=0, \\ \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos^2 \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)\gamma}, k \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{\cos \varphi_{0,0} \sin \varphi_{0,0}}{\gamma}, k=0, \\ -\sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos \varphi_{k,s} \sin \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)\gamma}, k \neq 0 \end{cases}$
$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos^2 \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)\gamma}$	$-\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{\cos \varphi_{k,s} \sin \varphi_{k,s}}{(2(k-s)+1)\gamma}$

Отметим, что при построении ортогональной модели спектральной плотности мощности по параметрам ортогональной модели корреляционной функции возможно применение различных ортогональных базисов при аппроксимации левой и правой ветвей корреляционной функции.

На рисунках 7.2 – 7.3 приведены результаты построения взаимной спектральной плотности мощности с помощью аппроксимирующих выражений в сравнении с теоретическими кривыми [48, 49].

При построении спектра с большим значением  $\tau_m$ , необходимо правильно выбирать значение интервала дискретизации спектра  $\Delta\omega$ . В противном случае будет проявляться эффект наложения частот. Рекомендуемое значение интервала дискретизации, определяемое для восстановления  $\cos \omega \tau_m$

$$\Delta\omega \leq \frac{0,2 \div 0,4}{\tau_m}. \quad (7.12)$$

Рисунок 7.4 иллюстрирует эту ситуацию.

Другой способ построения ортогональной модели спектральной плотности мощности заключается в аппроксимации спектральной плотности мощности в каком либо базисе  $\{\psi_k(\omega, \alpha)\}_{k=0, \dots, m}$  при  $\mu(\tau) = 1$ . При этом, учитывая четность спектральной плотности мощности, необходимо выбором параметров модели гарантировать выполнения условия нормировки

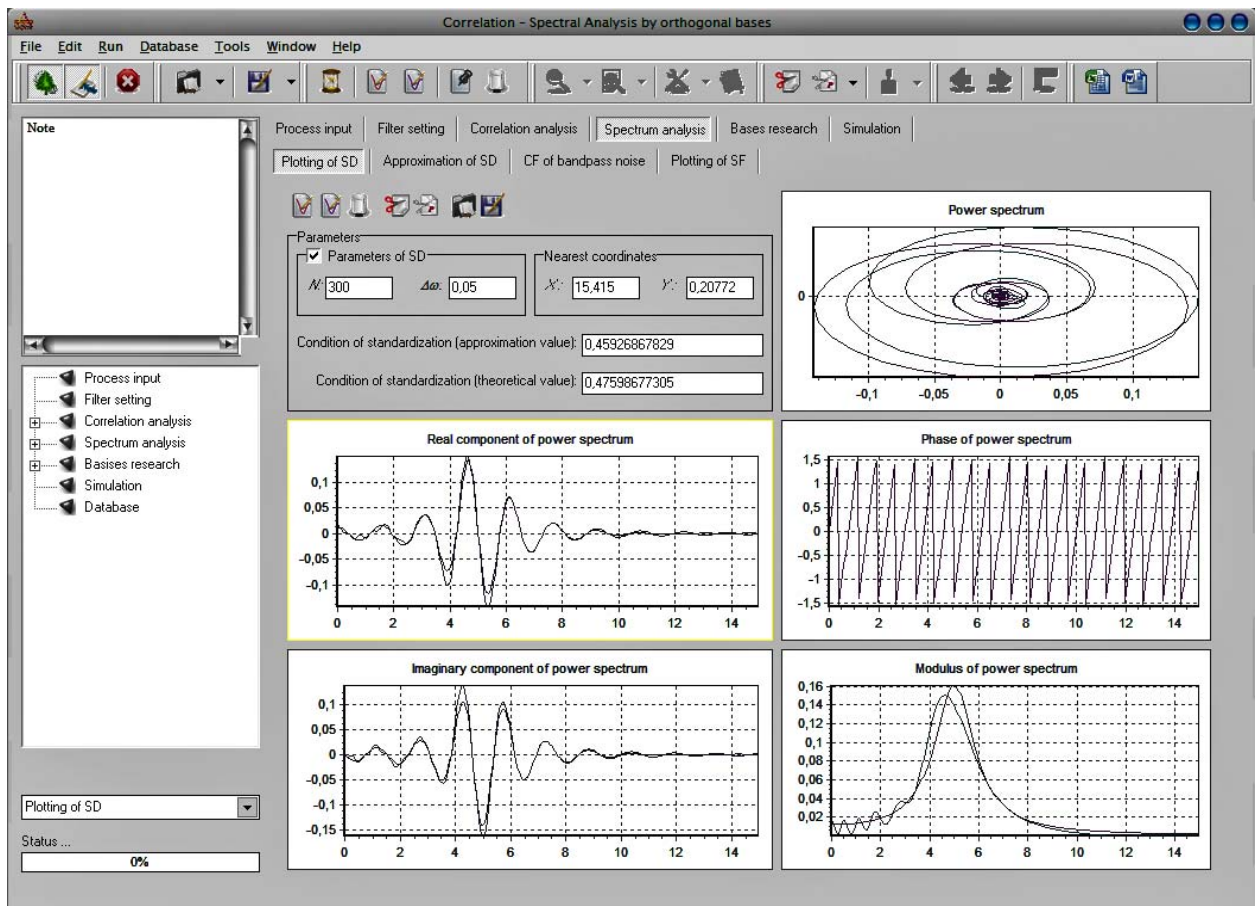


Рисунок 7.2 - Спектральная плотность мощности и ее составляющие

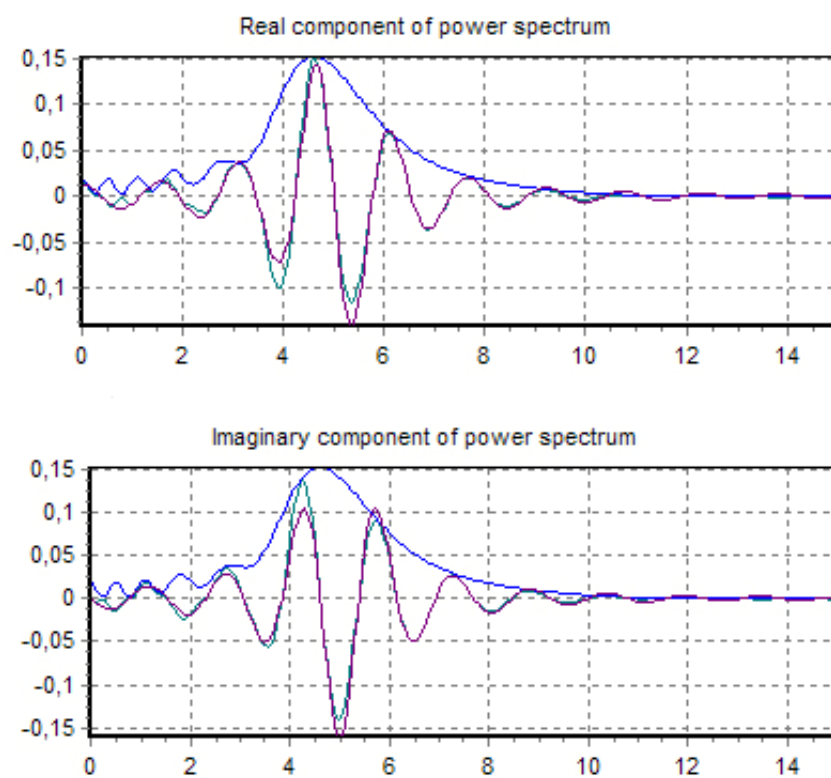


Рисунок 7.3 – Вещественная, мнимая части и модуль спектральной плотности мощности

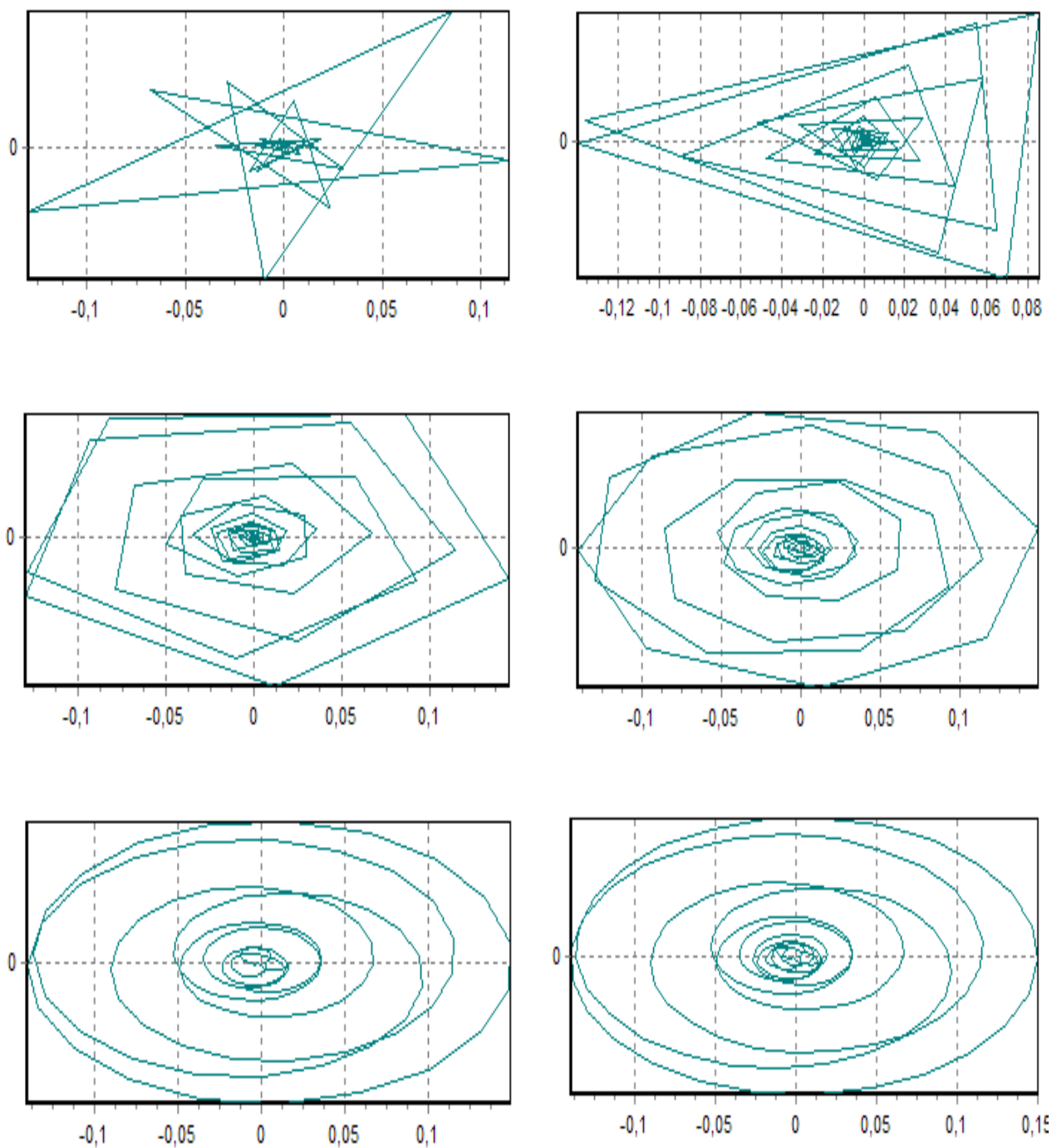


Рисунок 7.4 - Взаимные спектральные плотности мощности при различных значениях интервала дискретизации для  $\rho_{xv}(\tau) = \exp(-|\tau - 100|) \cos 5(\tau - 100)$



$$\int_0^\infty S_{a_n}(\omega) d\omega = \int_0^\infty \sum_{k=0}^m \beta_k \psi_k(\omega, \alpha) d\omega = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0) =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1/2. \quad (7.13)$$

Однако, в общем случае условие (7.13) не выполняется.

Для выполнения свойства (7.13), представим модель в виде

$$S_{a_n}(\omega) = \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha). \quad (7.14)$$

при условии, что

$$2 \sum_{k=0}^m c_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = 1/2. \quad (7.15)$$

Запишем выражение для оценки погрешности с учетом условия (7.15)

$$\Delta_l = \int_0^\infty \left[ S_{x_n}(\omega) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha) \right]^2 d\omega + 2\lambda \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k = \min. \quad (7.16)$$

Для определения значения параметров  $c_n$  найдем

$$\frac{\partial \Delta_l}{\partial c_n} = -2 \int_0^\infty \left[ S_{x_n}(x) - \sum_{k=0}^m c_k \psi_k(\omega, \alpha) \right] \psi_n(\omega, \alpha) d\omega + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (7.17)$$

С учетом свойств ортогональных функций выражение (7.17) приведем к виду

$$-2\beta_n \|\psi_n\|^2 + 2c_n \|\psi_n\|^2 + 2\lambda \|\psi_n\|^2 [-\psi_n(0, \alpha)]^n = 0. \quad (7.18)$$

Отсюда

$$c_n = \beta_n - \lambda [-\psi_n(0, \alpha)]^n. \quad (7.19)$$

С учетом (7.15) выражение для определения  $\lambda$  равно

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k - 1/4}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (7.20)$$

Подставив выражение (7.20) в выражение (7.19), окончательно получим

$$C_n = \beta_n + \left[ \frac{1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2} \right] [-\psi_n(0, \alpha)]^n =$$

$$= \beta_n + \varsigma_n.$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Так для ортогональных функций Лагерра с учетом их свойств

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k - \alpha/4}{m+1}, \quad (7.22)$$

$$C_n = \beta_n + \left[ \frac{\alpha/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{m+1} \right] (-1)^n. \quad (7.23)$$

Рассмотрим пример уточнения коэффициентов разложения по предлагаемому алгоритму:  $\rho_{x_5}(\tau) = \exp(-\lambda|\tau|)\cos \omega_0\tau$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\omega_0 = 5$  (см. рис. 7.5).

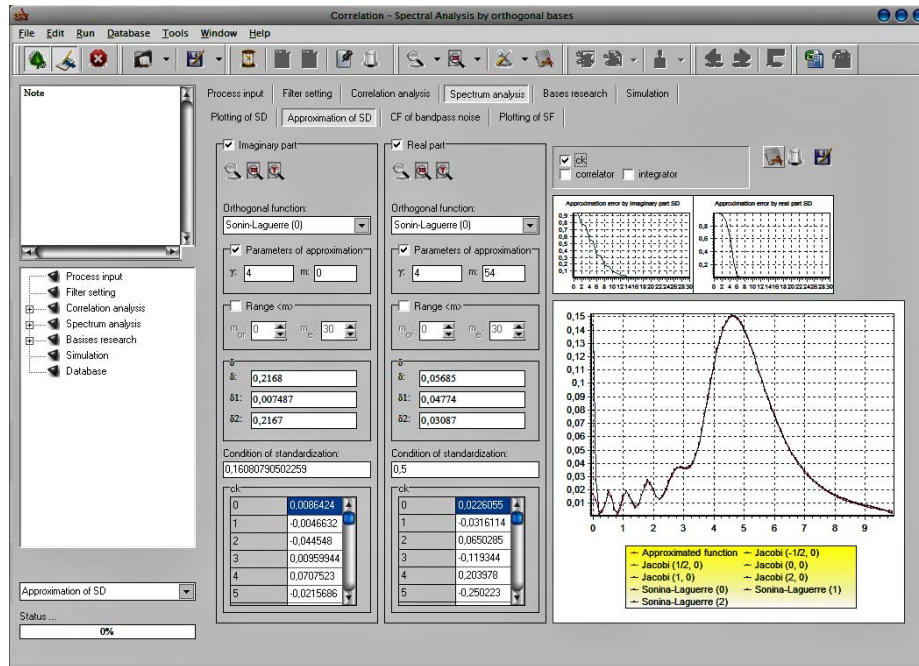


Рисунок 7.5 - Аппроксимация СПМ ортогональными функциями Лагерра,  $\alpha = 4$ ,  $m = 36$

Выражения для оценки коэффициентов разложения  $\zeta_n$  для других ортогональных базисов представлены в таблице 7.6.

Таблица 7.6

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\zeta_n$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\left[ \frac{\alpha / 4 - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{m + 1} \right] (-1)^n$
2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\alpha / 2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k + 1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k + 1}}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$\left[ \frac{\alpha / 2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k}{k + 1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k + 1}} \right] (-1)^n$

В таблице 7.7 приведены аналитические выражения для оценки  $\|P_k^{(\alpha, \beta)}\|^2$  и  $\zeta_n$  для различных функций Якоби  $P_k^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)$ . Отметим, что для рассматриваемых ортогональных функций Якоби  $P_k^{(\alpha, \beta)}(0, \gamma) = (-1)^k$ .

Коэффициенты разложения КФ в ортогональных базисах Якоби  $(\alpha, \beta)$

$$C_n = \beta_n + \left[ \frac{1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|P_k^{(\alpha, \beta)}\|^2}{\sum_{k=0}^m \|P_k^{(\alpha, \beta)}\|^2} \right] =$$

$$= \beta_n + \varsigma_n.$$
(7.24)

Корректирующие коэффициенты Якоби  $(\alpha, \beta)$  и Сонина-Лагерра

Таблица 7.7

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\varsigma_n$
1	$P_k^{(-1/2, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/4 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+1}}$
2	$P_k^{(1/2, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/4 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{4k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{4k+3}}$
3	$P_k^{(1, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1}}$
4	$P_k^{(0, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+1}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+1}}$
5	$P_k^{(2, 0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma/2 - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k}{2k+3}}{\sum_{k=0}^m \frac{1}{2k+3}}$
6	$P_k^{(0, 1)}(\tau, \gamma)$	$\left[ \frac{\frac{\gamma}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)^2}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}} \right] [(n+1) \bmod 2] (n+1)$
7	$P_k^{(0, 2)}(\tau, \gamma)$	$\left[ \frac{\frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k [(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)^2 (k+2)^2}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^4 (2k+3)}{(k+1)^2 (k+2)^2}} \right] [(n+2) \operatorname{div} 2]^2 (2n+3) (-1)^n$

8	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\left[ \frac{\frac{\gamma}{4} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}} \right] [(n+1) \bmod 2]$
9	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\left[ \frac{\frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+2) \operatorname{div} 2]}{(k+1)(k+2)}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)(k+2)}} \right] [(n+2) \operatorname{div} 2]$

Определим погрешность аппроксимации  $\Delta_1$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_0^\infty \left[ S_{xH}(\omega) - \sum_{k=0}^m c_k \cdot \psi_k(\omega, \alpha) \right]^2 d\omega = \\ &= \int_0^\infty S_{xH}^2(\omega) - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sum_{k=0}^m \varsigma_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Представим погрешности аппроксимации КФ в виде:

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta_2, \quad (7.26)$$

где  $\Delta_2$  составляющая методической погрешности аппроксимации, вызванная дополнительным условием (7.15).

Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta &= \int_0^\infty S_{xH}^2(\omega) d\omega - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2; \\ \Delta_2 &= \sum_{k=0}^m \varsigma_k^2 \|\psi_k\|^2. \end{aligned} \right. \quad (7.27)$$

Вторую составляющую погрешности  $\Delta_2$  удобнее представить в виде:

$$\Delta_2 = \frac{\left[ 1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|\psi_k\|^2 [-\psi_k(0, \alpha)]^k \right]^2}{\sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2}. \quad (7.28)$$

В таблице 7.8 приведены выражения для оценки  $\Delta_2$  для различных базисов.

Составляющие методической погрешности аппроксимации нормированной спектральной плотности мощности ортогональными функциями

Таблица 7.8

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\Delta_2$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left[ 1/4 - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]^2}{(m+1)/\alpha}$

2	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+1)}}$
3	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{(-1)^k}{(k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\alpha} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$
4	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+1)}\right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+1)}}$
5	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(4k+3)}\right]^2}{\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(4k+3)}}$
6	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(k+1)}\right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+1)}}$
7	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\left[1/4 - \frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{1}{(2k+3)}\right]^2}{\frac{1}{2\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2k+3)}}$
8	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{4\gamma} \frac{\left[\frac{\gamma}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)^2}\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}$
9	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \frac{\left[\frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k (-1)^k [(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)^2 (k+2)^2}\right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^4 (2k+3)}{(k+1)^2 (k+2)^2}}$

10	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\left[ \frac{\gamma}{4} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)} \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}$
11	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4}{\gamma^3} \frac{\left[ \frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+2) \operatorname{div} 2]}{(k+1)(k+2)} \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)(k+2)}}$

## 7.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности  $\mu$ , воспользовавшись средствами Mathcad найти выражения для оценки  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$  и  $\delta_{\min}(\alpha, m)$  (см. лабораторную работу 5).
2. Найти модель спектральной плотности мощности для определенных параметров нормированной корреляционной функции, проверить условие нормировки.
3. Найти модель спектральной плотности мощности для параметров  $\{b_k\}_{k=0, \dots, m}$  нормированной корреляционной функции, проверить условие нормировки.
4. Для той же модели спектральной модели плотности мощности определить корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$  и построить ортогональную модель спектральной плотности мощности. Проверить условие нормировки.
5. Оформить отчет.

## 7.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Основные соотношения.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения вычислительного практикума 7 приведен в Приложении 13.

## 7.4. Контрольные вопросы

1. Что такое условие нормировки для спектральной плотности мощности?
2. Из каких соображений определяются корректирующие коэффициенты?
3. Почему необходимо правильно выбирать интервал дискретизации спектральной плотности мощности? Каким образом?
4. Какие способы аппроксимации спектральной плотности мощности в ортогональных базисах существуют? В чем их суть?

## 8. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных функций случайных процессов ортогональными функциями.

### 8.1. Теоретические основы вычислительного практикума

Определим спектральную функцию по аналогии с функцией распределения в виде

$$F_x(\omega) = \int_0^{\omega} S_x(\omega) d\omega. \quad (8.1)$$

Спектральная функция позволяет определить мощность процесса в заданном диапазоне частот  $P(\omega_1, \omega_2) = F_x(\omega_2) - F_x(\omega_1)$ .

Аналитические выражения спектральной плотности мощности для типовых моделей корреляционных функций представлены в таблице 8.1.

Спектральная плотность мощности

Таблица 8.1

$K_x(\tau)$	$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau }$	$\frac{\sigma_x^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha^3}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha \omega^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau  + \alpha^2 \tau^2 / 3)$	$\frac{8\sigma_x^2 \alpha^5}{3\pi(\alpha^2 + \omega^2)^3}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{\sigma_x^2 \alpha}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha (\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$\frac{2\sigma_x^2 \alpha \omega^2}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$
$\sigma_x^2 e^{-\alpha \tau } (\cos \omega_0 \tau + c \sin \omega_0  \tau )$	$\frac{\sigma_x^2 [\alpha(\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2) + c \omega_0 (\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2)]}{\pi [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$

Более удобные выражения спектральной плотности мощности для нахождения спектральной функции (интегрирования), представлены в таблице 8.2.

Спектральные плотности мощности

Таблица 8.2

№ модели КФ	$S_x(\omega)$	$\varphi$
1	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \cos^2 \varphi$	$\arctg \frac{\omega}{\lambda}$
2, 3	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \cos^2 \varphi (1 \pm \cos 2\varphi)$	
4	$\frac{\sigma_x^2}{\lambda\pi} \left[ \cos^2 \varphi (1 + \cos 2\varphi) + \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \cos 3\varphi \right]$	
5	$\frac{\sigma_x^2}{2\lambda\pi} (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2)$	$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega + \omega_0}{\lambda}$
6, 7	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left( \frac{\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2}{\lambda} \pm \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2}{2\omega_0} \right)$	$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega - \omega_0}{\lambda}$

Спектральные функции для типовых моделей КФ с учетом принятых обозначений представлены в таблице 8.3.

Спектральные функции

Таблица 8.3

№ модели КФ	$F_x(\omega)$
1	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \varphi$
2, 3	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \left( \varphi \pm \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)$
4	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \left( \varphi + \frac{2 \sin 2\varphi}{3} + \frac{\sin 4\varphi}{12} \right)$
5	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} (\varphi_1 + \varphi_2)$
6, 7	$\frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left( \varphi_1 + \varphi_2 \mp \frac{\lambda}{\omega_0} (\ln  \cos \varphi_1  - \ln  \cos \varphi_2 ) \right)$

Представив модель спектральной плотности в ортогональном базисе Лагерра в виде [21]

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (8.2)$$

где  $\sum_{k=0}^m b_k = 1$ ;



$$\varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}, \quad (8.3)$$

получим

$$F_x(\omega) = \int_0^{\omega} S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_0^{\omega} \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi d\omega. \quad (8.4)$$

Из выражения (8.3), следует, что

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда

$$d\omega = \frac{\alpha}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Следовательно

$$F_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_0^{\varphi} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (8.5)$$

В соответствии с 2.539.7 [5]

$$J = \int_0^{\varphi} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \varphi, & \text{если } k=0; \\ 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi}{2s} + (-1)^k \varphi, & \text{если } k>0. \end{cases} \quad (8.6)$$

Подставив (8.6) в (8.5), получим

$$F_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[ \varphi + 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi}{2s} \right]. \quad (8.7)$$

Отметим, что при  $\varphi=0$   $F_x(\omega)=0$ , а при  $\varphi=\pi/2$   $F_x(\omega)=\sigma_x^2$ .

Результаты определения функции спектра для различных моделей в ортогональном базисе Лагерра приведены на рис. 8.1 ( $\sigma_x^2=1$ ).

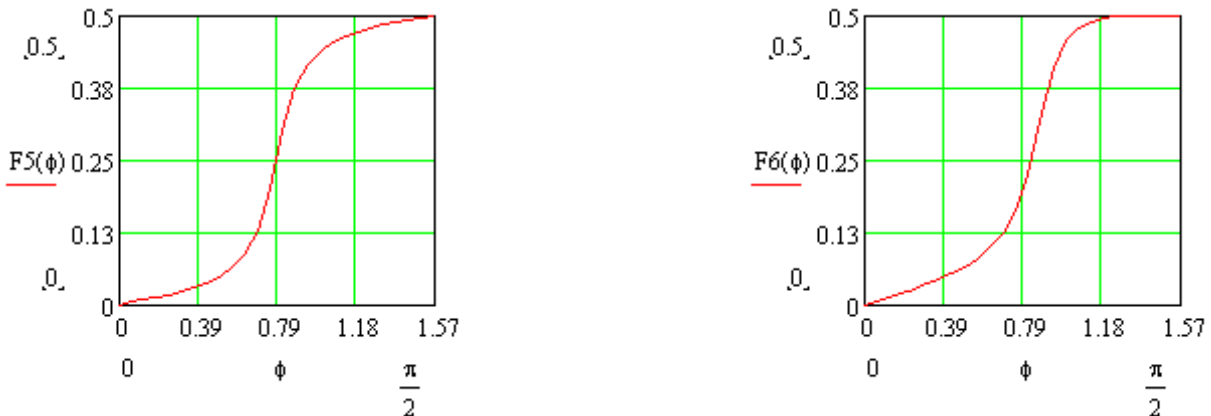


Рисунок 8.1 - Спектральные функции для различных моделей в ортогональном базисе Лагерра

Следует отметить, что спектральную функцию для других ортогональных базисов без биномиальных коэффициентов определить невозможно. Это объясняется тем, что в отличие от ортогональных функций Лагерра у других ортогональных функций экспоненциального типа норма не постоянна, а зависит от порядка функции.

Выражения спектральной плотности мощности в ортогональных базисах Сонина-Лагерра приведены в таблице 8.3, а соответствующие им спектральные функции – в таблице – в таблице 8.4.

Ортогональные модели спектральных плотностей мощности  
в базисе Сонина-Лагерра

Таблица 8.3

№	$\psi_k(\tau, \gamma)$	$S_x(\omega)$	$\varphi$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} (-2)^s \cos^s \varphi \cos(s+1)\varphi$	$\arctg \frac{2\omega}{\gamma}$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4\sigma_x^2 \cos \varphi}{\pi \gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} (-2)^s \cos^s \varphi \cos(s+1)\varphi$	

Ортогональные модели спектральных функций в базисе Сонина-Лагерра

Таблица 8.4

№	$\psi_k(\tau, \gamma)$	$F_x(\omega)$	$\varphi$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \left[ \varphi + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=1}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-2)^s}{s} \cos^s \varphi \sin s \varphi \right]$	$\arctg \frac{2\omega}{\gamma}$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\pi} \left[ \frac{\varphi}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=1}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-2)^s}{s} \cos^s \varphi \sin s \varphi \right]$	

Для определения ортогональных моделей спектральной функции в ортогональных базисах Лежандра, Дирихле и Якоби воспользуемся другим представлением спектральной плотности мощности. Так как

$$S_a(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{Re} W_k(j\omega),$$

а для ортогональных функций Лежандра, Дирихле и Якоби

$$\operatorname{Re} W_k(j\omega) = \sum_{s=0}^k A_{k,s} \frac{1/2 \|\psi_s\|^2}{1/4 \|\psi_s\|^4 + \omega^2},$$

выражения для ортогональных моделей спектральной плотности мощности представим в виде (см. таблицу 8.5). Соответствующие им модели спектральных функций представлены в таблице 8.6.

Ортогональные модели спектральных плотностей мощности  
в базисах Лежандра, Дирихле, Якоби

Таблица 8.5

№	$\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$	$S_x(\omega)$
1	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\alpha(2s+1)}{\alpha^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s} \frac{\alpha(s+1)}{\alpha^2(s+1)^2 + \omega^2}$

3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^s (-1)^s \frac{\gamma(4s+1)/2}{\gamma^2(4s+1)^2/4 + \omega^2}$
4	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^s (-1)^s \frac{\gamma(4s+3)/2}{\gamma^2(4s+3)^2/4 + \omega^2}$
5	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\gamma(s+1)}{\gamma^2(s+1)^2 + \omega^2}$
6	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{\gamma^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
7	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+3)}{\gamma^2(2s+3)^2 + \omega^2}$
8	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{\gamma^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
9	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{\gamma^2(2s+1)^2 + \omega^2}$
10	$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}, k=0, \\ \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \frac{(2(k-s)+1)\gamma}{\gamma^2(2(k-s)+1)^2 + \omega^2}, k \neq 0 \end{cases}$
11	$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \frac{(2(k-s)+1)\gamma}{\gamma^2(2(k-s)+1)^2 + \omega^2}$

Ортогональные модели спектральных функций  
в базисах Лежандра, Дирихле и Якоби

Таблица 8.6

№	$\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$	$F_x(\omega)$
1	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha(2s+1)}$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^{k-s} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha(s+1)}$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\gamma(4s+1)}$
4	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{2\omega}{\gamma(4s+3)}$
5	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(s+1)}$
6	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$

7	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(2s+3)}$
8	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$
9	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\gamma(2s+1)}$
10	$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{\gamma} \right), k=0, \\ \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{\gamma(2(k-s)+1)} \right), k \neq 0 \end{cases}$
11	$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega}{\gamma(2(k-s)+1)} \right)$

Недостатком такого представления, является то, что спектральную плотность мощности и спектральные функции нельзя определить для большого числа членов разложения ряда  $m$ .

На рис. 8.2 - приведены результаты определения спектральной функции для  $\rho_{x,5}(\tau)$  в ортогональных базисах Лежандра и Дирихле ( $\sigma_x^2 = 1$ ).

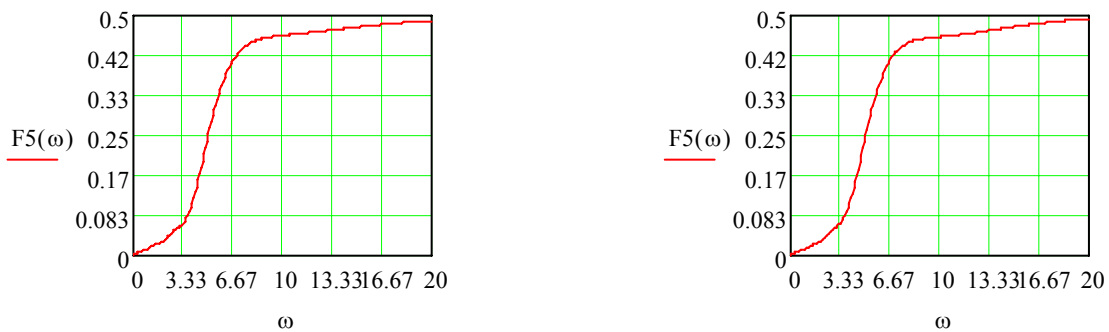


Рисунок 8.2 - Спектральные функции для  $\rho_{x,5}(\tau)$  в ортогональных базисах Лежандра и Дирихле

## 8.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и её параметров, воспользовавшись средствами Mathcad, найти численное значение параметра масштаба  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{b_k\}_{k=0,\dots,m}$  (см. лабораторную работу 6).
2. Построить спектральную функцию и её ортогональную модель.
3. Найти приведенную погрешность определения спектральной функции её ортогональной моделью, построить график.
4. Оформить отчет.

### 8.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Основные соотношения.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения лабораторной работы 8 приведен в Приложении 14.

### 8.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл спектральной функции.
2. Чему равно значение спектральной функции при  $\omega \rightarrow \infty$ ?
3. Существует ли условие нормировки для спектральной функции? В чем оно выражается?
4. По аналогии с какой вероятностной характеристикой введено понятие спектральной функции?
5. По какой причине ограничено использование спектральной функции и ее ортогональной модели при решении ряда задач?

## 9. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимативном анализе корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов ортогональными функциями.

### 9.1. Теоретические основы вычислительного практикума

По найденной корреляционной функции возможно определение обобщенных корреляционных характеристик. К ним относятся [21, 48]:

- показатель колебательности, равный числу пересечений «нуля» корреляционной функцией и используемый при оценке интервала дискретизации случайного процесса, метрологическом анализе результатов оценивания вероятностных характеристик;
- интервалы корреляции, определяющие длительность существования корреляционной функции;
- корреляционные моменты, вводимые по аналогии с начальными моментами законов распределения и используемые, например, для идентификации процесса по виду корреляционной функции.

Обобщенные корреляционные характеристики широко применяются при решении разнообразных прикладных задач, связанных с:

- определением интервала дискретизации исследуемых процессов при цифровых методах анализа;
- идентификацией случайного процесса по виду корреляционной функции;
- метрологическим анализом результатов измерения вероятностных характеристик с целью получения оценок сверху, инвариантных к виду корреляционной функции исследуемого процесса.

Существуют различные способы определения интервалов корреляции, имеющие один и тот же физический смысл – **длительность существования корреляционной функции**.

Максимальный интервал корреляции  $\tau_k^{(l)} = \tau_{k \max}$  определяется в результате решения уравнения (см. таблицу 9.1):

$$|\rho(\tau \geq \tau_{k \max})| \leq \Delta, \quad (9.1)$$

где  $\Delta$  – заданное значение, принимаемое, как правило, равным 0,01; 0,02; 0,05.

То есть под максимальным интервалом корреляции понимается временной интервал от начала координат до точки пересечения с линиями  $\Delta$  или  $-\Delta$ , после которой нормированная корреляционная функция не выходит из коридора  $[-\Delta, \Delta]$ . На рисунке 9.1 поясняется, каким образом определяется максимальный интервал корреляции для колебательной модели корреляционной функции  $\rho_x(\tau, \lambda, \omega_0) = e^{-\lambda|\tau|} \cos(\omega_0 \tau)$  при  $\lambda = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ ,  $\Delta = 0,05$ .

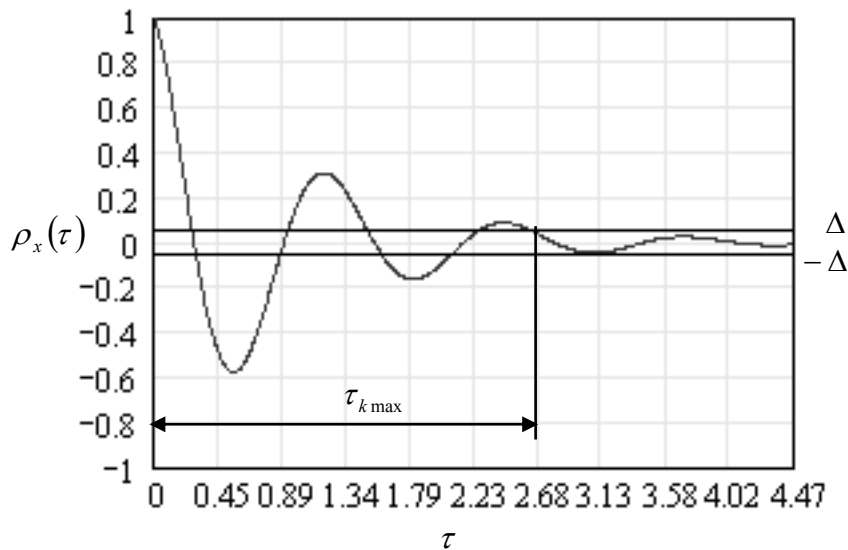


Рисунок 9.1 - Максимальный интервал корреляции

Аналитические выражения  $\tau_{k \max}$  для типовых моделей  $\rho_x(\tau, \lambda, \omega_0)$  приведены в таблице 9.1.

Максимальные интервалы корреляции типовых моделей корреляционных функций

Таблица 9.1

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda, \omega_0)$	$\Delta = 0,01$	$\Delta = 0,02$	$\Delta = 0,05$
1	$e^{-\lambda \tau }$	$4,61/\lambda$	$3,92/\lambda$	$3/\lambda$
2	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$6,64/\lambda$	$5,84/\lambda$	$4,75/\lambda$
3	$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$6,27/\lambda$	$5,40/\lambda$	$4,14/\lambda$
4	$e^{-\lambda \tau }\left(1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2 \tau^2}{3}\right)$	$8,03/\lambda$	$7,14/\lambda$	$5,92/\lambda$
5	$e^{-\lambda \tau } \cos(\omega_0 \tau)$	$4,61/\lambda$	$3,92/\lambda$	$3/\lambda$
6	$e^{-\lambda \tau }\left(\cos(\omega_0 \tau) + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0  \tau )\right)$	$4,61/\lambda$	$3,92/\lambda$	$3/\lambda$
7	$e^{-\lambda \tau }\left(\cos(\omega_0 \tau) - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0  \tau )\right)$	$4,61/\lambda$	$3,92/\lambda$	$3/\lambda$

Часто под интервалом корреляции понимается основание прямоугольника с высотой, равной единице, площадь которого равновелика площади фигуры, определяемой нормированной КФ [48, 49]:

$$\tau_k^{(2)} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (9.2)$$

Графическая интерпретация величины  $\tau_k^{(2)}$  дана на рисунке 9.2.

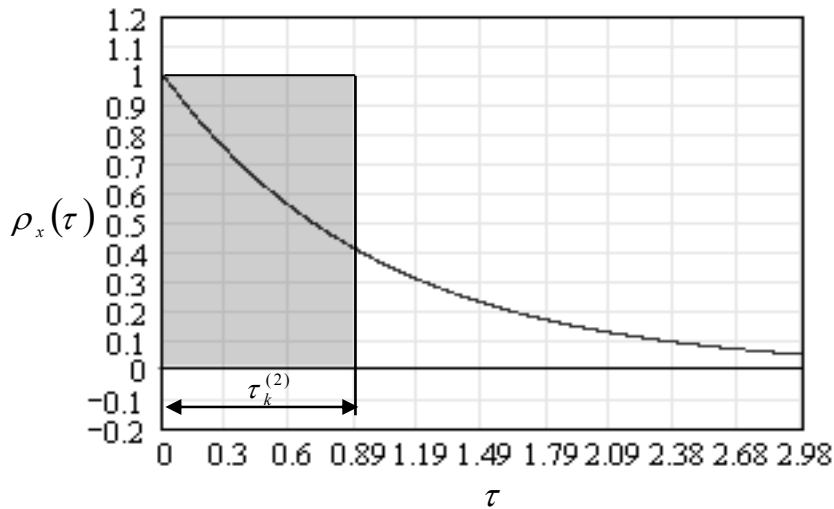


Рисунок 9.2 - Интервал корреляции  $\tau_k^{(2)}$

Отметим, что для некоторого класса процессов  $\tau_k^{(2)} = 0$  (например, для колебательных моделей, площадь положительной и отрицательной части которых равна), что свидетельствует об отсутствии корреляции между сечениями процесса. Однако это не так, корреляция есть, и это подтверждает  $\tau_{k \max} > 0$ . Следовательно, при оценке длительности существования корреляционной функции интервал корреляции  $\tau_k^{(2)}$  целесообразно применять лишь при анализе случайных процессов с монотонными корреляционными функциями.

Для устранения отмеченного недостатка в [48] были предложены следующие определения интервалов корреляции:

$$\tau_k^{(3)} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau, \quad (9.3)$$

$$\tau_k^{(4)} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (9.4)$$

Графическая интерпретация величины  $\tau_k^{(3)}$  приведена на рисунке 9.3.

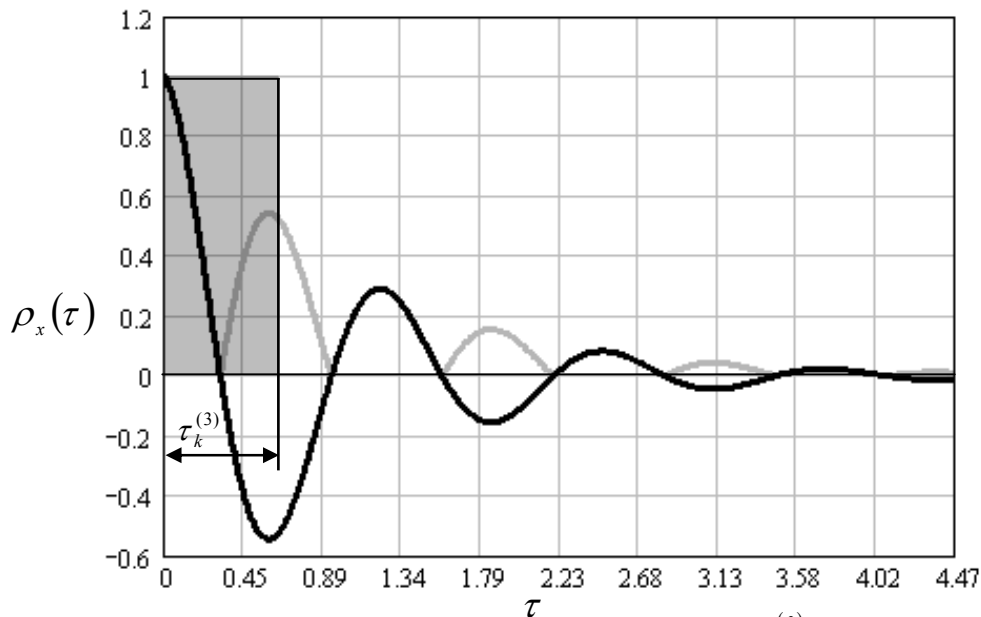


Рисунок 9.3 - Интервал корреляции  $\tau_k^{(3)}$



Анализ выражений (9.2) и (9.3) показывает, что аналитическая оценка длительности существования корреляционной функции для колебательных моделей затруднена. От этого недостатка свободно определение  $\tau_k^{(4)}$ . Поэтому, несмотря на то, что  $\tau_k^{(4)}$  дает заниженные результаты, в технических приложениях он применяется значительно чаще, чем  $\tau_k^{(3)}$ . Значения интервалов корреляции  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  для типовых моделей корреляционных функций приведены в таблице 9.2.

Интервалы корреляции для типовых моделей корреляционных функций

Таблица 9.2

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda, \omega_0)$	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\lambda \tau }$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{2\lambda}$
2	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$\frac{2}{\lambda}$	$\frac{5}{4\lambda}$
3	$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	0	$\frac{1}{4\lambda}$
4	$e^{-\lambda \tau }\left(1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2\tau^2}{3}\right)$	$\frac{8}{3\lambda}$	$\frac{7}{4\lambda}$
5	$e^{-\lambda \tau } \cos(\omega_0\tau)$	$\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2}$	$\frac{2\lambda^2 + \omega_0^2}{4\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2)}$
6	$e^{-\lambda \tau }\left(\cos(\omega_0\tau) + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau )\right)$	$\frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2}$	$\frac{5\lambda^2 + \omega_0^2}{4\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2)}$
7	$e^{-\lambda \tau }\left(\cos(\omega_0\tau) - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau )\right)$	0	$\frac{1}{4\lambda}$

В таблице 9.3 показано, во сколько раз  $\tau_{k\max}$  больше  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  ( $\Delta = 0,05$ ).

Таблица 9.3

№	Вид модели $\rho_x(\tau, \lambda, \omega_0)$	$\tau_{k\max}/\tau_k^{(2)}$	$\tau_{k\max}/\tau_k^{(4)}$
1	$e^{-\lambda \tau }$	3	6
2	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	2,375	3,8
3	$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$\infty$	16,56
4	$e^{-\lambda \tau }\left(1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2\tau^2}{3}\right)$	2,22	3,38
5	$e^{-\lambda \tau } \cos(\omega_0\tau)$	$3(1 + \mu^2)$	$\frac{2(1 + \mu^2)}{2 + \mu^2}$

6	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos(\omega_0 \tau) + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0  \tau ) \right)$	$1,5(1 + \mu^2)$	$\frac{12(1 + \mu^2)}{(5 + \mu^2)}$
7	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos(\omega_0 \tau) - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0  \tau ) \right)$	$\infty$	12

Отсюда видно, что  $\tau_k^{(2)}$  и  $\tau_k^{(4)}$  дают сильно заниженный результат по сравнению с  $\tau_{k \max}$ .

### 9.1.1. Интервалы корреляции

Определив параметры модели корреляционной функции в ортогональном базисе в виде (5.13) и воспользовавшись определением корреляционных характеристик, можно найти их аналитические выражения, содержащие только параметры модели.

Так выражение для оценки  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  примет вид:

$$\hat{\tau}_k^{(2)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k \int_0^\infty \psi_k(\tau, \alpha) d\tau = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0). \quad (9.5)$$

Аналитические выражения  $\tau_k^{(2)}$  для различных ортогональных базисов приведены в таблице 9.4.

Интервалы корреляции в различных ортогональных базисах

Таблица 9.4

№	$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\hat{\tau}_k^{(2)}$
1	$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k$
2	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} [(k+1) \bmod 2]$
3	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} [(k+2) \div 2]$
4	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+1)}$
5	$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^m b_k \frac{(-1)^k}{(k+1)}$
6	$P_k^{-1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+1)}$
7	$P_k^{1/2,0}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(4k+3)}$
8	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(k+1)}$
9	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m b_k \frac{1}{(2k+3)}$

10	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)^2} [(k+1) \bmod 2]$
11	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{4}{\gamma} \sum_{k=0}^m \frac{b_k (-1)^k}{(k+1)^2 (k+2)^2} [(k+2) \bmod 2]^2$

Конечное число членов разложения ряда (5.13)  $m$  приводит к погрешности от смещенности в определении интервала корреляции, которую оценим в соответствии с выражением:

$$\gamma_{см} = \frac{\hat{\tau}_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}}{\tau_k^{(2)}}. \quad (9.6)$$

Определим погрешность от смещенности, в качестве примера, для ортогонального базиса Лагерра (частное сообщение Волкова И.И.).

Для НКФ  $\rho_{x1}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \tau_k^{(2)} = \frac{I}{\lambda}$ , а коэффициенты разложения [22, 23]

$$\beta_k = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k. \quad (9.7)$$

Подставив выражение (9.3) в (9.1), получим

$$\hat{\tau}_k^{(2)} = \frac{2}{\alpha} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \cdot \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k (-1)^k = \frac{I - \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}}{\lambda}. \quad (9.8)$$

Погрешность от смещенности в соответствии с (9.2) примет вид:

$$\gamma_{см} = - \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1}. \quad (9.9)$$

При произвольном значении  $\alpha$   $\gamma_{см}$  может принимать достаточно большое значение.

Определим  $\alpha$  в результате решения уравнения  $\beta_0 = I$  [22, 23]. Отсюда

$$\alpha = 2\lambda. \quad (9.10)$$

Погрешность от смещенности в этом случае:  $\gamma_{см} = 0$ .

Таким образом, выбор параметра  $\alpha$  для данной модели дает возможность получить принципиально нулевую погрешность.

Для второй типовой модели  $\rho_{x2}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (I + \lambda|\tau|) \tau_k^{(2)} = \frac{2}{\lambda}$ ,

$$\beta_k = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha/2} \cdot \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \left\{ \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \cdot \frac{2\lambda + \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} - k \frac{\alpha\lambda}{(\lambda + \alpha/2)^2} \right\}, \quad (9.11)$$

$$\hat{\tau}_k^{(2)} = \frac{2}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^{m+1} - \frac{(m+1)\alpha}{(\alpha/2 + \lambda)^2} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^m, \quad (9.12)$$

$$\gamma_{см} = - \frac{I}{\alpha/2 + \lambda} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^m \left[ \alpha/2 - \lambda + \frac{(m+1)\alpha\lambda}{2(\alpha/2 + \lambda)} \right]. \quad (9.13)$$

Найдем  $\alpha$  из условия  $\beta_0 = 1 - \alpha = 2\lambda(\sqrt{2} - 1)$  [22, 23]. Подставив  $\alpha$  в (9.13), получим:

$$\gamma_{cm} = -\frac{(m-1)}{2(\sqrt{2}+1)^{m+1}}(-1)^m. \quad (9.14)$$

Если  $m=1$   $\gamma_{cm}=0$ . При  $m \rightarrow \infty$   $\gamma \rightarrow 0$ .

Погрешность  $\gamma_{cm}$ , как следует из (9.14), достигает минимума при

$$n = 1 + \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}, \quad \gamma_{cm \min} = \frac{1}{2e(3+2\sqrt{2})\ln(1+\sqrt{2})} < 1.$$

Для третьей типовой модели  $\rho_{x3}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 - \lambda|\tau|)$   $\tau_k^{(2)} = 0$ ,

$$\beta_k = \frac{\alpha^2/2}{(\lambda + \alpha/2)^2} \left[ \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^k + \frac{2k\lambda}{(\lambda + \alpha/2)} \left( \frac{\lambda - \alpha/2}{\lambda + \alpha/2} \right)^{k-1} \right], \quad (9.15)$$

$$\tau_k^{(2)} = \frac{(m+1)\alpha}{(\lambda + \alpha/2)^2} \cdot \left( \frac{\alpha/2 - \lambda}{\alpha/2 + \lambda} \right)^m. \quad (9.16)$$

Нетрудно видеть, что при произвольном  $\alpha$   $\tau_k^{(2)} \neq 0$ . Найдем  $\alpha$  из условия  $\beta_0 = 1 - \alpha = 2\lambda(1 + \sqrt{2})$  [22, 23].

Величина оценки интервала корреляции в этом случае будет равна:

$$\tau_k^{(2)} = \frac{1}{\lambda} \frac{m+1}{(\sqrt{2}+1)^{m+1}} \quad (9.17)$$

Как следует из (9.17) при  $m \rightarrow \infty$   $\tau \rightarrow 0$ , то есть оценка стремится к идеальной.

Для типовой модели  $\rho_{x5}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$   $\tau_k^{(2)} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2}$ ,

$$\beta_k = \frac{\alpha/2}{\lambda + \alpha/2 - j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 - j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k + \frac{\alpha/2}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \left( \frac{\lambda - \alpha/2 + j\omega_0}{\lambda + \alpha/2 + j\omega_0} \right)^k, \quad (9.18)$$

$$\tau_k^{(2)} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda - j\omega_0} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda + j\omega_0}{\alpha/2 + \lambda - j\omega_0} \right)^{m+1} + \frac{1}{\lambda + j\omega_0} \left( \frac{\alpha/2 - \lambda - j\omega_0}{\alpha/2 + \lambda + j\omega_0} \right)^{m+1} \right] \quad (9.19)$$

Погрешность от смещенности равна:

$$\gamma_{cm} = \frac{1}{2\lambda} \left[ (\lambda + j\omega_0) \left( \frac{\alpha/2 - \lambda + j\omega_0}{\alpha/2 + \lambda - j\omega_0} \right)^{m+1} + (\lambda - j\omega_0) \left( \frac{\alpha/2 - \lambda - j\omega_0}{\alpha/2 + \lambda + j\omega_0} \right)^{m+1} \right] \quad (9.20)$$

Найдем  $\alpha$  из условия  $\beta_0 = 1 - \alpha = 2\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$  [22,23].

В результате получим:

$$\gamma_{cm} = \frac{jm+1}{2\lambda} \left( \frac{\omega_0}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \right)^{m+1} \left[ \lambda + j\omega_0 + (-1)^{m+1} \lambda - (-1)^{m+1} j\omega_0 \right] \quad (9.21)$$

Величина погрешности  $\gamma_{cm}$ , как видно из (9.21), зависит от того, четным или нечетным будет число  $m$ .

При  $m=2n$ , получим:

$$\gamma_{cm} = (-I)^{n+l} \frac{\omega_0}{\lambda} \left( \frac{\omega_0}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \right)^{2n+l} = (-I)^{n+l} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left( \frac{\xi}{1 + \sqrt{1-\xi^2}} \right)^{2n+l} \quad (9.22)$$

а при нечетном  $m=2n+1$ :

$$\gamma_{cm} = (-I)^{n+l} \left( \frac{\omega_0}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}} \right)^{2(n+l)} = (-I)^{n+l} \left( \frac{\xi}{1 + \sqrt{1-\xi^2}} \right)^{2(n+l)} \quad (9.23)$$

где  $\xi = \frac{\omega_0}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ .

Формулы (9.22) и (9.23) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \gamma_{cm} = (-I)^{n+l} \frac{1-\psi}{\psi} \left( \frac{1-\psi}{1+\psi} \right)^n \\ \gamma_{cm} = (-I)^{n+l} \left( \frac{1-\psi}{1+\psi} \right)^{n+l} \end{cases} \quad (9.24)$$

где  $\psi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}}$ ,  $0 \leq \psi \leq 1$ .

Анализ погрешности от смещенности оценки  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  показывает, что при  $n \rightarrow \infty$   $\gamma_{cm} \rightarrow 0$ . Однако при четном  $m$  погрешность от смещенности стремится к бесконечности при  $\lambda \rightarrow 1$  ( $\psi \rightarrow 0$ ), то есть при большом показателе колебательности корреляционной функции. Поэтому, с точки зрения повышения точности необходимо выбирать  $m=2n+1$ . Аналогичные рекомендации можно сделать и для других колебательных моделей корреляционных функций.

Воспользовавшись определением погрешности аппроксимации корреляционной функции ( $\mu(\tau) = I$ )

$$\Delta = \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - A_m^2 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 \quad (9.25)$$

и выражением (9.4), в качестве оценки интервала корреляции можно принять выражение:

$$\tau_k^{(4)} \approx \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (9.26)$$

Эта оценка будет тем точнее, чем меньше квадратическая погрешность аппроксимации корреляционной функции моделью вида (5.13). Заметим, что анализ этой погрешности и рекомендации по выбору оптимальных значений параметров модели представлен в лабораторной работе 5.

### 9.1.2. Оценка моментов корреляционных функций

Определив начальный момент  $n$ -го порядка в виде

$$\mu_n = \int_0^\infty \tau^n \rho_x(\tau) d\tau, \quad (9.27)$$

можно показать, что при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями Лагерра [22, 23]

$$\mu_n = \varphi_n(\alpha) \sum_{k=0}^m (-1)^k c_{nk} \beta_k. \quad (9.28)$$

Рекомендации по выбору параметров модели  $\alpha$ ,  $m$  и  $\beta_k$  аналогичны рекомендациям при определении интервала корреляции  $\hat{\tau}_k^{(2)}$ . Выражения для первых четырёх моментов представлены в таблице 9.5.

К определению моментов корреляционной функции

Таблица 9.5

$\mu_n$	$\varphi_n(\alpha)$	$c_{nk}$
$\mu_0$	$2/\alpha$	$1$
$\mu_1$	$4/\alpha^2$	$1+2k$
$\mu_2$	$16\alpha^3$	$1+2k+2k^2$
$\mu_3$	$32/\alpha^4$	$3+8k+6k^2+4k^3$

С учетом (9.21) выражения для корреляционных моментов в ортогональном базисе Лежандра и Дирихле равны:

$$\mu_n = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s \frac{(-1)^s}{(2s+1)^{n+1}}, \quad (9.29)$$

$$\mu_n = \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} \frac{(-1)^s}{(s+1)^{n+1}}. \quad (9.30)$$

### 9.1.3. Оценка эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса

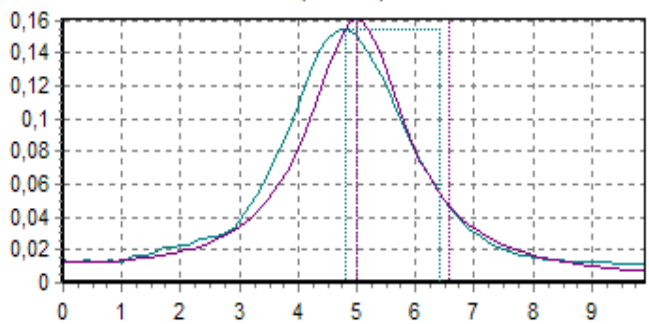
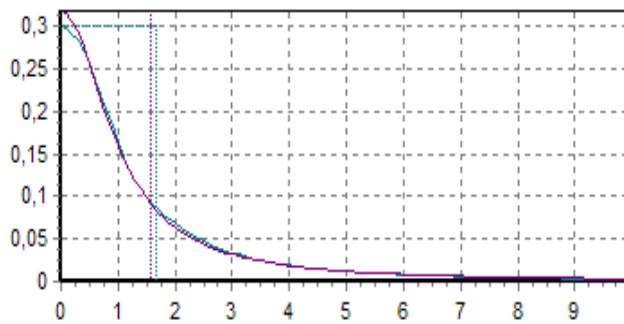
Наиболее часто для процессов, у которых спектральная плотность мощности сосредоточена вблизи нулевой частоты (рис. 9.4 а),  $\Delta\omega$ , определяют в виде:

$$\Delta\omega_s = \frac{\int_0^\infty S_x(\omega) d\omega}{S_x(0)} = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(0)}. \quad (9.31)$$

Если основная мощность процесса сосредоточена вблизи экстремальной частоты спектральной плотности мощности  $\omega_s$  (см. рис. 9.4 б), а не в нуле, выражение для оценки эквивалентной ширины примет вид:

$$\Delta\omega'_s = \omega_s + \Delta\omega_s / 2. \quad (9.32)$$

Выражения для экстремальной частоты и эквивалентной ширины спектра мощности для типовых моделей корреляционных функций представлены в таблицах 9.6 и 9.7 соответственно.



а) б)  
Рисунок 9.4 - Эквивалентная ширина спектра мощности

### Экстремальные частоты

Таблица 9.6

№	$\rho_x(\tau)$	$\omega_s$
1	$e^{-\lambda \tau }$	0
2	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	0
3	$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$\alpha$
4	$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau  + \lambda^2\tau^2/3)$	0
5	$e^{-\lambda \tau }\cos\omega_0\tau$	$\sqrt{2\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2} - (\omega_0^2 + \lambda^2)}$
6	$e^{-\lambda \tau }(\cos\omega_0\tau + \lambda/\omega_0\sin\omega_0 \tau )$	$\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$
7	$e^{-\lambda \tau }(\cos\omega_0\tau - \lambda/\omega_0\sin\omega_0 \tau )$	$\sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2}$

### Эквивалентная ширина спектра мощности

Таблица 9.7

№ КФ	$\Delta\omega'_s = \omega_s + \frac{\Delta\omega'_s}{2}$
1	$\frac{\pi\lambda}{2}$
2	$\frac{\pi\lambda}{4}$
3	$\frac{\lambda(2\sqrt{2} + 9\pi)}{4}$
4	$\frac{3\pi\lambda}{16}$
5	$\omega_s + \frac{\pi[\lambda^2 + (\omega_s - \omega_0)^2][\lambda^2 + (\omega_s + \omega_0)^2]}{4\lambda(\lambda^2 + \omega_s^2 + \omega_0^2)}$

6	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} + \frac{\pi \left[ \lambda^2 + \left( \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[ \lambda^2 + \left( \sqrt{\omega_0^2 - \pi^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}{8\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2)}}{S_x(\omega_0)}$
7	$\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2} + \frac{\pi \left[ \lambda^2 + \left( \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2} - \omega_0 \right)^2 \right] \left[ \lambda^2 + \left( \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2} + \omega_0 \right)^2 \right]}{8\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2)}}{S_x(\omega_0)}$

Более точно эквивалентную ширину спектра мощности исследуемого сигнала для колебательных моделей КФ можно определить в соответствии с выражением

$$\Delta\omega_{\omega} = \omega_{\omega} + \Delta\omega'_{\omega} = \omega_{\omega} + \frac{\int_{\omega_{\omega}}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}{S_x(\omega_{\omega})}. \quad (9.33)$$

С учетом определения спектральной функции формула (9.33) преобразуется к виду:

$$\Delta\omega_{\omega} = \omega_{\omega} + \frac{F_x(\infty) - F_x(\omega_{\omega})}{S_x(\omega_{\omega})} = \omega_{\omega} + \frac{0,5 - F_x(\omega_{\omega})}{S_x(\omega_{\omega})}. \quad (9.34)$$

В таблице 9.8 приведены аналитические выражения эквивалентной ширины спектра  $\Delta\omega'_{\omega}$  для колебательных моделей КФ, полученные с использованием формулы (9.33), (9.34).

Аналитические выражения для оценки эквивалентной ширины спектра

Таблица 9.8

№ КФ	$\Delta\omega'_{\omega}$
3	$2\lambda \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right)$
5	$\omega_{\omega} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{\left[ \arctg\left(\frac{\omega_{\omega} - \omega_0}{\lambda}\right) + \arctg\left(\frac{\omega_{\omega} + \omega_0}{\lambda}\right) \right]}{2\pi}}{S_x(\omega_{\omega})}$
6	$\omega_{\omega} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{\lambda \left[ \ln\left(\lambda^2 + (\omega_{\omega} - \omega_0)^2\right) - \ln\left(\lambda^2 + (\omega_{\omega} + \omega_0)^2\right) \right] - 2\omega_0 \left[ \arctg\left(\frac{\omega_{\omega} - \omega_0}{\lambda}\right) + \arctg\left(\frac{\omega_{\omega} + \omega_0}{\lambda}\right) \right]}{4\pi\omega_0}}{S_x(\omega_{\omega})}$
7	$\omega_{\omega} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{\lambda \left[ \ln\left(\lambda^2 + (\omega_{\omega} - \omega_0)^2\right) - \ln\left(\lambda^2 + (\omega_{\omega} + \omega_0)^2\right) \right] + 2\omega_0 \left[ \arctg\left(\frac{\omega_{\omega} - \omega_0}{\lambda}\right) + \arctg\left(\frac{\omega_{\omega} + \omega_0}{\lambda}\right) \right]}{4\pi\omega_0}}{S_x(\omega_{\omega})}$



Определим мощность процесса, сосредоточенную в интервале  $(0; \Delta\omega_3)$

$$K\sigma_x^2 = \int_0^{\Delta\omega_3} S_x(\omega) d\omega. \quad (9.35)$$

Значения коэффициента  $K$  типовых моделей КФ приведены в таблице 9.9.

Значения коэффициента мощности

Таблица 9.9

Номер модели	$\rho_x(\tau)$	$K$
1	$e^{-\lambda \tau }$	0,32
2	$e^{-\lambda \tau } (1 + \lambda \tau )$	0,367
3	$e^{-\lambda \tau } (1 - \lambda \tau )$	0,33
4	$e^{-\lambda \tau } \left( 1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2 \tau^2}{3} \right)$	0,378
5	$e^{-\lambda \tau } \cos(\omega_0 \tau)$	0,4
6	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos(\omega_0 \tau) + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau) \right)$	0,436
7	$e^{-\lambda \tau } \left( \cos(\omega_0 \tau) - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau) \right)$	0,365

Заметим, что коэффициент  $K$  это значение нормированной спектральной функции в точке  $\Delta\omega_3$ . На рисунке 9.5 представлена нормированная спектральная функция и соответствующий коэффициент мощности для третьей модели ( $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 - \lambda|\tau|)$ ,  $\lambda = 1$ ). Этому значению  $K = 0,33$  соответствует значение эквивалентной ширины спектра мощности  $\Delta\omega_3 = 3,571$ .

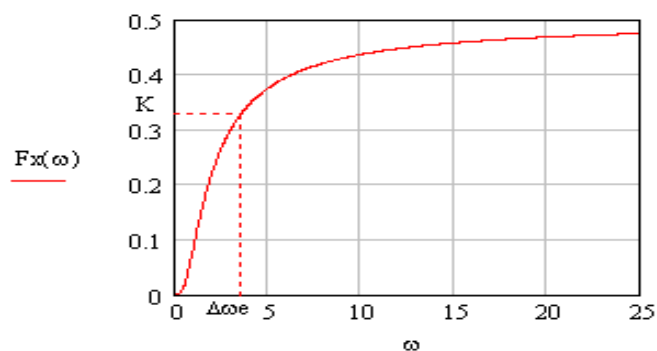


Рисунок 9.5 - Спектральная функция и соответствующий коэффициент мощности для третьей модели ( $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 - \lambda|\tau|)$ ,  $\lambda = 1$ )

Рассмотрим еще один способ определения эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса, основанной на применении ортогональной модели спектральной плотности мощности.

Представив модель спектральной плотности в ортогональном базисе Лагерра в виде [21]

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2 \cos \varphi}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \cos(2k+1)\varphi, \quad (9.36)$$

$$\text{где } \varphi = \arctg \frac{2\omega}{\alpha}, \quad (9.37)$$

определим эквивалентную ширину спектра мощности в соответствии с определением (9.26). С учетом выражений (9.27) и (9.28) определим

$$J = \int_{\omega_0}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha \pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_{\omega_0}^{\infty} \cos \varphi \cos(2k+1)\varphi d\omega. \quad (9.38)$$

Из выражения (9.37), следует, что

$$\omega = \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда

$$d\omega = \frac{\alpha}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Следовательно,

$$J = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m b_k (-1)^k \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (9.39)$$

$$\text{где } \varphi_0 = \arctg \frac{2\omega_0}{\alpha}.$$

В соответствии с 2.539.7 [5]

$$J1_k = \int \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \varphi + c, \text{ если } k=0; \\ 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi}{2s} + (-1)^k \varphi + c, \text{ если } k>0. \end{cases} \quad (9.40)$$

Подставив пределы интегрирования, получим

$$\begin{aligned} J2_k &= \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{\cos(2k+1)\varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \\ &= \begin{cases} \pi/2 - \varphi_0, \text{ если } k=0; \\ (-1)^k \pi/2 - 2 \sum_{s=1}^k (-1)^{k-s} \frac{\sin 2s\varphi_0}{2s} - (-1)^k \varphi_0, \text{ если } k>0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.41)$$

Подставив  $J2$  в  $J$ , получим

$$J = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi_0}{2s} \right]. \quad (9.42)$$

Тогда выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности примет вид

$$\Delta \omega_0 = \omega_0 + \frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_0)} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - 2 \sum_{k=1}^m b_k \sum_{s=1}^k (-1)^s \frac{\sin 2s\varphi_0}{2s} \right]. \quad (9.43)$$

Для других ортогональных базисов, представив модель спектральной плотности мощности в виде (см. таблицу 9.1) и выполнив необходимые преобразования, выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности представим в виде

$$\Delta \hat{\omega}_s = \omega_s + \frac{\sigma_x^2}{S_x(\omega_s)} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m b_k \left[ \psi_k(0, \alpha / \gamma)^k - \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^k A_{k,s} \arctg 2\omega_s \|\psi_s\|^2 \right] \right\}. \quad (9.44)$$

Принятые обозначения для выражения (9.43) представлены в таблице 9.10.

Принятые обозначения

Таблица 9.10

№	$\psi_k(\tau, \alpha / \gamma)$	$A_{k,s}$	$\arctg 2\omega_s \ \psi_s\ ^2$
1	$Leg_k(\tau, \alpha)$	$C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_s}{\alpha(2s+1)}$
2	$D_k(\tau, \alpha)$	$C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^{k-s}$	$\arctg \frac{\omega_s}{\alpha(s+1)}$
3	$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s$	$\arctg \frac{2\omega_s}{\gamma(4s+1)}$
4	$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s$	$\arctg \frac{2\omega_s}{\gamma(4s+3)}$
5	$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_s}{\gamma(s+1)}$
6	$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_s}{\gamma(2s+1)}$
7	$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s$	$\arctg \frac{\omega_s}{\gamma(2s+3)}$

Выражения для определения эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса в ортогональных базисах Сонина-Лагерра и Якоби  $(0, \beta)$  представлены в таблице 9.11.

Эквивалентная ширина спектра мощности случайного процесса в ортогональных базисах Сонина-Лагерра и Якоби  $(0, \beta)$

Таблица 9.11

№	$\psi_k(\tau, \gamma)$	$\Delta \hat{\omega}_s' = \Delta \hat{\omega}_s - \omega_s$	$\varphi_s$
1	$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_s - 2 \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-1)^s}{s} \cos^s \varphi_s \sin s \varphi \right]$	$\arctg \frac{2\omega_s}{\gamma}$
2	$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_s - 4 \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-1)^s}{s} \cos^s \varphi_s \sin s \varphi \right]$	
3	$P_k^{(0,1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \varphi_s \right]$	$\arctg \frac{\omega_s}{\gamma(2s+1)}$
4	$P_k^{(0,2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{(k+1)(k+2)} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \varphi_s \right]$	

5	$T_k(\tau, \gamma)$	$\begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m b_k \varphi_{0,0} \right], k=0, \\ \frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m b_k \sum_{s=0}^k \frac{k}{2k-s} C_{2k-s}^s (-4)^{k-s} \varphi_{k,s} \right], k \neq 0 \end{cases}$	$\arctg \frac{\omega_s}{\gamma(2(k-s)+1)}$
6	$U_k(\tau, \gamma)$	$\frac{\sigma_x^2}{\pi S_x(\omega_s)} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^m \frac{b_k}{k+1} \sum_{s=0}^k C_{2k-s+1}^s (-4)^{k-s} \varphi_{k,s} \right]$	

Отметим, что для широкополосных процессов с учетом соотношения неопределенности

$$\Delta\omega_s \tau_k^{(2)} = \frac{\pi}{2} \quad (9.45)$$

и выражения для определения интервала корреляции

$$\tau_k^{(2)} = \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0) \quad (9.46)$$

можно получить более простое выражение для оценки эквивалентной ширины спектра мощности в различных ортогональных базисах

$$\Delta\omega_s = \frac{\pi}{2 \sum_{k=0}^m \beta_k W_k(0)}. \quad (9.47)$$

Эквивалентную ширину спектра мощности случайного процесса можно получить, воспользовавшись аппроксимацией спектральной плотности мощности в ортогональных базисах в виде

$$S_x(\omega) = S_x(\omega_s) \left( \sum_{k=0}^{m_n} b_{k,n} 1(\omega - \omega_s) \psi_k(\omega - \omega_s, \alpha_n) + \sum_{k=0}^{m_l} b_{k,l} 1(\omega_s - \omega) \psi_k(\omega_s - \omega, \alpha_l) \right), \quad (9.48)$$

где  $\omega_s$  - частота соответствующая последнему максимуму спектральной плотности мощности. По аналогии с определением интервала корреляции  $\tau_k^{(2)}$ , окончательно получим

$$\Delta\omega_s = \omega_s + \sum_{k=0}^m b_k W_k(0). \quad (9.49)$$

## 9.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности  $\mu$ , воспользовавшись средствами Mathcad, найти выражения для оценки  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0, \dots, m}$ ,  $\{b_k\}_{k=0, \dots, m}$  и соответствующие оценки интервалов корреляции  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  и  $\hat{\tau}_k^{(4)}$ .

2. Определить относительные погрешности оценки интервалов корреляции  $\hat{\tau}_k^{(2)}$  и  $\hat{\tau}_k^{(4)}$ ,  $\gamma_{cm}^{(l)}(m)$ ,  $\gamma_{cm}^{(2)}(m)$ .

3. Для заданной модели спектральной плотности мощности с использованием параметров модели корреляционной функции определить  $\Delta\omega'_s$  по аналитиче-

ским выражениям и  $\Delta\omega$ , по параметрам ортогональной модели корреляционной функции.

4. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности по параметрам модели корреляционной функции  $\gamma_{cm}^{(3)}(m)$ .

5. Найти параметры модели спектральной плотности мощности, корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$ . Определить  $\Delta\omega$ , по параметрам модели спектральной плотности мощности.

6. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности  $\gamma_{cm}^{(4)}(m)$ .

7. Оформить отчет.

### 9.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Основные соотношения.
4. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
5. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения вычислительного практикума 9 приведен в Приложении 15.

### 9.4. Контрольные вопросы

1. Поясните физический смысл интервалов корреляции.
2. В каких случаях целесообразно использовать каждое из описанных определений интервала корреляции?
3. Поясните физический смысл эквивалентной ширины спектра мощности случайного процесса.
4. Какой из способов определения эквивалентной ширины дает более точный результат? Почему?
5. Для чего необходимы аналитические соотношения для определения эквивалентной ширины спектра мощности?

## 10. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ (АИС)

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик временных рядов.

### 10.1 Теоретические основы вычислительного практикума

В предлагаемой лабораторной работе решаются основные задачи корреляционно-спектрального анализа временных рядов.

Исследование алгоритмов проводится методом имитационного моделирования на ЭВМ, суть которого заключается в анализе их метрологических характеристик с использованием псевдослучайных последовательностей, сгенерированных с помощью ЭВМ.

Как правило, реализация этого метода включает следующие основные блоки:

- имитации входных процессов и внешних воздействий;
- реальных и идеальных моделей, а также их разности;
- формирования изменения параметров модели:
  - под воздействием внешних факторов;
  - в случае технологического разброса на множестве экземпляров;
  - в случае временной нестабильности;
- первичной статистической обработки для определения статистических характеристик наблюдаемых процессов при данных испытаниях;
- вторичной статистической обработки и управления машинным экспериментом:
  - совокупной обработки множества результатов экспериментов;
  - определения необходимого числа прогонов модели и принятия решений при последовательном планировании о продолжении или окончании эксперимента;
  - управления параметрами модели и значениями внешних факторов;
  - управления системным временем;
- датчик системного времени;
- управляющую программу, синхронизирующую процесс моделирования.

Функциональная схема системного моделирования, поясняющая взаимодействие отдельных блоков, представлена на рис. 10.1.

Сложность имитационной модели и затраты машинного времени при ее исследовании во многом будут зависеть от принципа имитационного моделирования.

Учитывая, что основным принципом проектирования АСНИ, ИИС, процессорных средств измерения является агрегатное проектирование [21], наиболее целесообразно при конструировании модели использовать принцип блочного моделирования, суть которого сводится к следующему:

- на основании декомпозиции АСНИ, ИИС, ПРИС создается библиотека моделей стандартных блоков для моделирования входных воздействий, дестабилизирующих факторов, блоков реальных систем;

- на основании разработанных моделей блоков конструируется модель системы в соответствии с ее структурой, с возможностью контроля промежуточных последовательностей, соответствующих реальным физическим точкам системы.

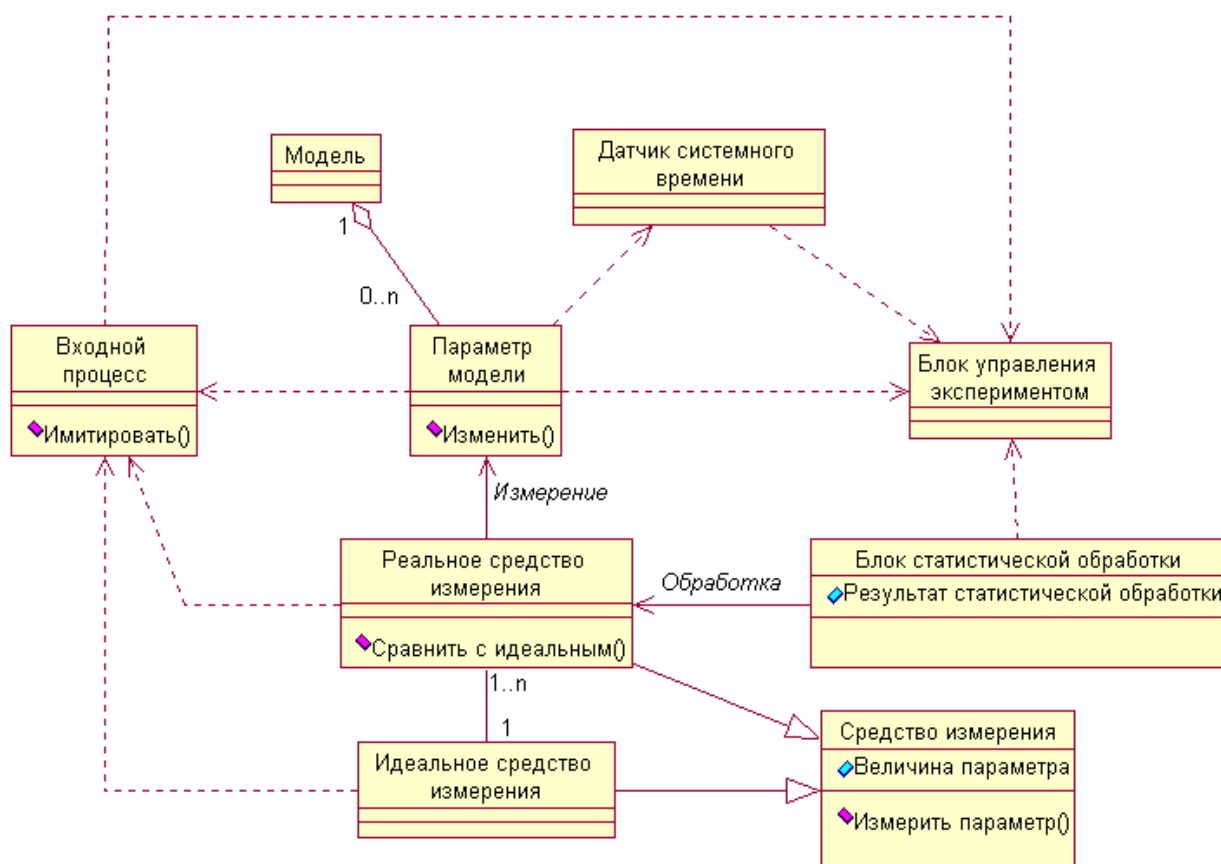


Рисунок 10.1 - Функциональная схема имитационного моделирования

Достоинствами блочных моделей являются:

- гибкость, простота изменения конфигурации модели системы, возможность прослеживания промежуточных результатов; соответствие математической модели;
- возможность унификации процедур моделирования путём создания библиотеки стандартных процедур;
- единообразие и простота построения моделей разнообразных структур;
- возможность автоматизации процедуры построения моделей систем.

К недостаткам блочного моделирования следует отнести:

- увеличение времени моделирования;
- необходимость большого объёма памяти для хранения библиотеки моделей.

Следует подчеркнуть, что затраты на моделирование, достоверность полученных результатов во многом зависят от принятых решений на этапе планирования эксперимента, особенно при определении необходимого числа испытаний, выборе входных воздействий и т.д.

Согласно методике [16], в качестве метрологической характеристики может выбираться максимальное значение модуля погрешностей оценки  $\hat{\Theta}$ :

$$\Delta = \max\{\Delta_j | j = 1, \dots, N, \quad (10.1)$$

где  $N$  – число испытаний, зависящее от доверительной информации. Так, если  $P_d = 0,95$ , то число испытаний равно 29 независимо от закона распределения погрешностей.

В общем случае, структура пакета прикладных программ имитационного моделирования алгоритмов оценивания вероятностных характеристик временных рядов, содержащего как обрабатывающие, так и управляющие программы, состоит из следующих основных блоков:

- задания входных воздействий с требуемыми характеристиками;
- первичной статистической обработки информации;
- вторичной статистической обработки информации;
- алгоритмов оценивания вероятностных характеристик;
- сервисных;
- определения методической погрешности и ее составляющих;
- определения инструментальных составляющих погрешности.

Методика имитационного моделирования исследуемых алгоритмов представлена на рис.10.2.

Одним из важных этапов имитационного моделирования является выбор, обоснование и моделирование сигналов, используемых в модельном эксперименте. Решение этой задачи определяется целевой функцией моделирования, назначением исследуемой системы и т.д. Так как при моделировании АСНИ, ИИС, ПРИС основной задачей является определение метрологических характеристик при определенных ограничениях на технико-экономические показатели, то существенным требованием, предъявляемым к образцовому (испытательному или тестовому) сигналу, является возможность оценки с его помощью погрешности результата измерения данным средством на заданном классе входных воздействий.

Учитывая большое разнообразие решаемых задач и соответствующих им средств измерения, однозначного ответа о виде образцового сигнала быть не может. Окончательное решение о выборе вида образцового сигнала для конкрет-

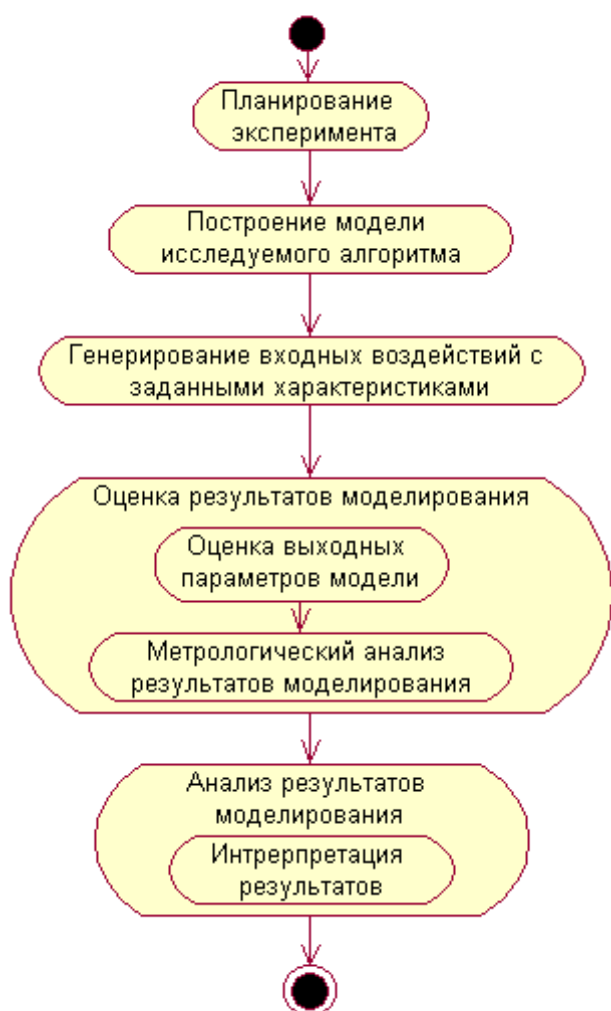


Рисунок 10.2 – Методика моделирования

ных типов средств измерения должно приниматься по результатам лабораторных исследований.

В самом общем виде выбор образцового сигнала осуществляется:



- выбором наихудшего сигнала из множества возможных входных сигналов, для обеспечения гарантированной погрешности результата измерения;
- формированием набора типовых сигналов, то есть наиболее часто встречающихся входных сигналов или сигналов, наиболее интересующих исследователя;
- формированием набора типовых сигналов, включающих в себя наихудший сигнал.

Основными требованиями, предъявляемыми к образцовым сигналам, являются следующие:

- заданный вид вероятностных характеристик;
- принадлежность к классу входных сигналов, для которых предназначено данное средство;
- стабильность во времени;
- отклонение текущих характеристик от расчетных не должно быть более допустимого.

При формировании случайных процессов с заданным видом корреляционной функции (спектральной плотности мощности), как правило, применяется метод фильтрации. При этом необходимо определить характеристики формирующего фильтра при известных характеристиках входного и выходного сигналов [21] (см. рис. 10.3).

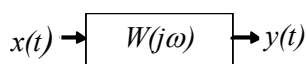


Рисунок 10.3

Известно, что спектральная плотность мощности выходного сигнала фильтра определяется в соответствии с выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (10.2)$$

где  $S_x(\omega)$  - спектральная плотность мощности входного сигнала;

$|W(j\omega)|^2$  - квадрат модуля частотной характеристики формирующего фильтра.

Учитывая, что  $S_x(\omega)$ ,  $S_y(\omega)$  и  $|W(j\omega)|^2$  - чётные функции, их можно представить в виде:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = \varphi(j\omega)\varphi(-j\omega); \\ S_y(\omega) = \psi(j\omega)\psi(-j\omega); \\ |W(j\omega)|^2 = W(j\omega)W(-j\omega). \end{cases} \quad (10.3)$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\varphi(j\omega)}. \quad (10.4)$$

Сложность частотной характеристики формирующего фильтра  $W(j\omega)$  во многом будет определяться видом  $S_x(\omega)$ . При использовании в качестве входного сигнала «белого» шума с  $S_x(\omega) = S_0$ , получим:

$$W(j\omega) = \frac{\psi(j\omega)}{\sqrt{S_0}}. \quad (10.5)$$

Для моделирования случайного процесса с помощью ЭВМ необходимо найти импульсную характеристику формирующего фильтра:

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{S_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (10.6)$$

Выходной сигнал формирующего фильтра может быть определен различными способами в зависимости от принятого способа преобразования аналогового фильтра в цифровой. Один из самых простых, но не эффективных способов в смысле временных затрат заключается в следующем:

$$y_j = \Delta\tau \sum_{i=0}^{NI} x_{j-i} h_i, \quad (10.7)$$

где  $NI$  - число отсчётов импульсной характеристики, зависящее от вида корреляционной функции;

$\Delta\tau$  - интервал дискретизации исследуемого процесса;

$h_i = h(i\Delta\tau)$  - значение импульсной переходной характеристики формирующего фильтра.

Значение интервала дискретизации зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, требуемой точности вычисления корреляционной функции  $\delta$  и способа интерполяции корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат импульсной переходной характеристики при линейной интерполяции и различных погрешностях восстановления корреляционной функции представлено в таблице 10.1.

Поиски более быстродействующих алгоритмов моделирования ПСП с заданным видом корреляционной функции привели исследователей к использованию рекурсивной фильтрации [21]:

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i y_{n-i}. \quad (10.8)$$

Для нахождения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  (т.е. параметров фильтра) применяются, в основном, три класса методов: методы преобразования аналоговых фильтров в цифровые, прямые методы расчёта цифровых фильтров в  $Z$  - плоскости и методы, использующие алгоритмы оптимизации. В общем случае невозможно отдать предпочтение какому-либо одному из них. С учётом применимости этих методов в конкретных условиях и многих других факторов, каждый из них может оказаться наиболее подходящим. Однако большинство цифровых фильтров рассчитываются методом билинейного преобразования стандартных аналоговых фильтров. Это обстоятельство связано с тем, что в задачах статистического моделирования необходимо проектировать фильтры, для которых билинейные преобразования аналоговых фильтров уже известны.

Параметры и вид цифрового рекурсивного фильтра для основных моделей корреляционных функций представлены в Приложении 16.

Рассмотренные в предыдущих разделах алгоритмы для аппроксимации корреляционных функций ортогональными моделями предназначены для работы с **моделями КФ**. Однако часто исследователь имеет дело либо с **цифровыми данными**, полученными в ходе эксперимента с помощью информационно-измерительных систем, автоматизированных систем научных исследований, либо - в ходе **цифрового моделирования** того или иного процесса или явления.

И в первом и во втором случае исследователь имеет дело со случайными последовательностями

$$\{x_{ji}, t_{ji} / \Delta t_{ji}\}_{i=1, \dots, M; j=1, \dots, N}, \quad (10.9)$$

где  $j$  - номер реализации;  $i$  - номер отсчета в  $j$  - ой реализации;  $t_{ji}$  - время отсчёта;

$$\Delta t_{ji} = t_{j,i+1} - t_{ji}. \quad (10.10)$$

При  $\Delta t_{ji} = \Delta t_0 = \text{const}$  исследователь имеет дело с **регулярной** временной последовательностью - регулярным временным рядом, примеры реализаций которого приведены на рис. 10.4.



Рисунок 10.4 - Примеры реализации регулярных случайных последовательностей

Выражения для оценки КФ при анализе последовательностей в зависимости от оператора усреднения примут вид:

$$\begin{cases} \hat{K}_{xyi}(J\Delta\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ji} y_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xyj}(J\Delta\tau) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} y_{j,i+J}; \\ \hat{K}_{xycp}(J\Delta\tau) = \frac{1}{N(M-J-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M-J} x_{ji} y_{j,i+J}. \end{cases} \quad (10.11)$$

Следует отметить, что при аппроксимации ВКФ с помощью ЭВМ не важно, какая характеристика аппроксимируется -  $t$ -текущая,  $j$  - текущая или средняя, - подход один и тот же.

В тех случаях, когда исследователь располагает только одной реализацией ( $j = \text{const}$ ), при проведении корреляционного анализа, как правило, используется мультипликативный алгоритм, инвариантный к закону распределения случайного процесса [55]:

При этом интервал дискретизации корреляционной функции, как правило, выбирают равным  $\Delta\tau = \Delta t_0$ .

Значение интервала дискретизации  $\Delta\tau$  зависит от вида корреляционной функции, значения её параметров, допустимой погрешности  $\delta$  и способа восстановления

корреляционной функции между узлами. Минимальное количество требуемых ординат корреляционной функции  $J_{max}$  при линейной интерполяции и различных погрешностях её восстановления представлено в таблице 10.1 [21].

Количество ординат корреляционной функции и интервалы дискретизации

Таблица 10.1

$\rho_x(\tau)$	$\Delta\tau$	$\delta = 0,02$		$\delta = 0,05$	
		$\Delta\tau$	$J_{max}$	$\Delta\tau$	$J_{max}$
$e^{-\lambda \tau }$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\lambda}$	$\frac{0,4}{\lambda}$	9	$\frac{0,632}{\lambda}$	6
$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$\frac{\sqrt{8\delta}}{\lambda}$	$\frac{0,4}{\lambda}$	13	$\frac{0,632}{\lambda}$	9
$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$\frac{\sqrt{8\delta/3}}{\lambda}$	$\frac{0,23}{\lambda}$	19	$\frac{0,365}{\lambda}$	13
$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau  + \lambda^2\tau^2/3)$	$\frac{\sqrt{24\delta}}{\lambda}$	$\frac{0,693}{\lambda}$	10	$\frac{1,095}{\lambda}$	7
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau,$ $e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau \pm \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	$\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{8\delta}{\mu^2 + 1}}$	$\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{0,16}{\mu^2 + 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$	$\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{0,4}{\mu^2 + 1}}$	$47 \frac{\mu}{2\pi}$

Для проверки качества генерирования ПСП представляется перспективным использование фазовых портретов. Под фазовым портретом будем понимать графическую зависимость, построенную в координатах:  $\rho_x(\tau)$  и  $\rho'_x(\tau)$ :

$$\rho'_x(\tau) = \Phi_x[\rho_x(\tau)]. \quad (10.12)$$

Следует отметить, что каждому типу корреляционных функций соответствует свой, уникальный фазовый портрет (см. рис. 10.5). На практике при построении фазового портрета вместо значения производных корреляционных функций возможно определение её приращений на заданном интервале.

Рассмотрим алгоритм построения КФ по параметрам модели спектральной плотности мощности (см. лабораторную работу 7).

Для этого представим модель СПМ в виде

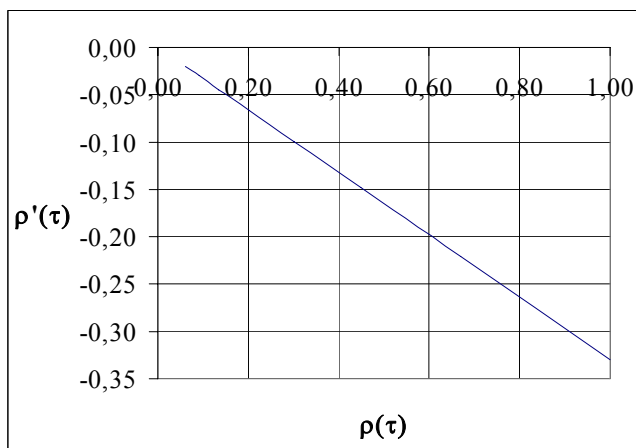
$$S_{ax}(\omega) = \sigma_x^2 \left( \sum_{k=0}^m C_k \cdot \psi_k(\omega, \alpha) I(\omega) + \sum_{k=0}^m C_k \cdot \psi_k(-\omega, \alpha) I(-\omega) \right), \quad (10.13)$$

где коэффициенты разложения  $C_k$  определяются выражением (7.24) (см. таблицы 7.6 – 7.7).

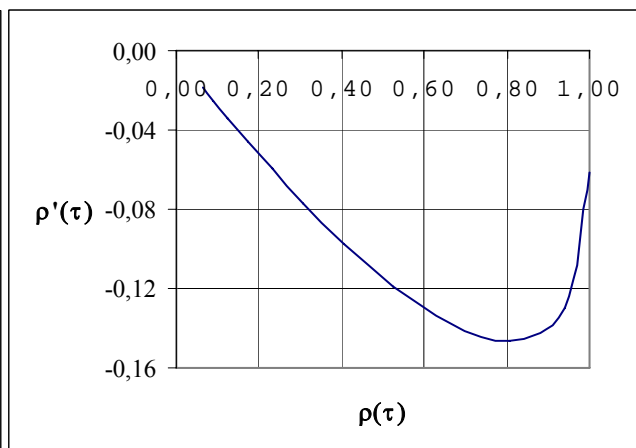
Подставив в выражение (7.2) выражение (10.13), выполнив преобразования, получим:

$$K_{ax}(\tau) = 2\sigma_x^2 \sum_{k=0}^m C_k \cdot \text{Re} W_k(j\tau). \quad (10.14)$$

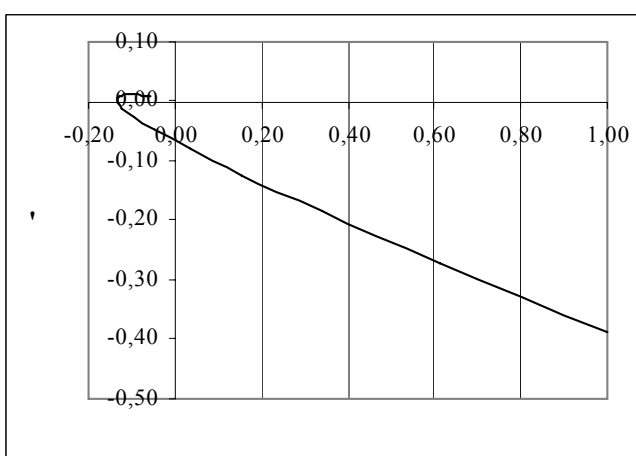
Следует отметить, что в автоматизированной системе для унификации (см. лабораторную работу 11)  $C_k$  являются коэффициентами разложения вещественной части спектра, совпадающей с СПМ.



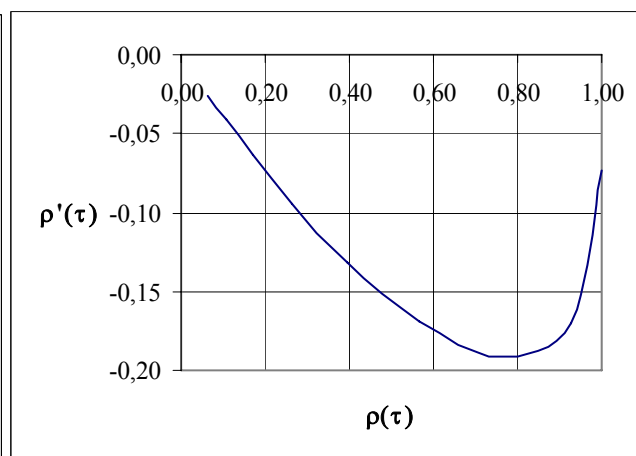
а)  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$ ,  $\lambda\tau = 0,4$



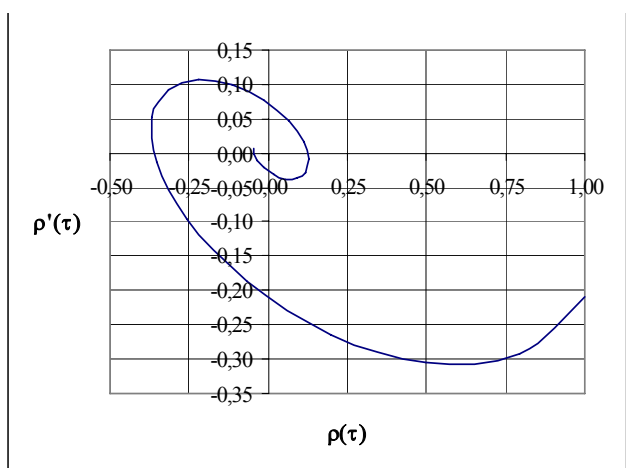
б)  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)$ ,  $\lambda\tau = 0,4$



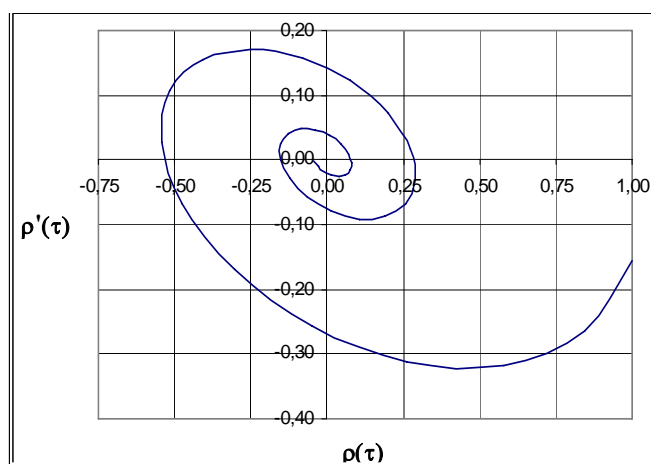
в)  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$ ,  $\lambda\tau = 0,4$



г)  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)$ ,  $\lambda\tau = 0,4$



д)  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  $\mu = 3$



е)  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ ,  $\mu = 5$

Рисунок 10.5 – Фазовые портреты моделей КФ

Для выполнения вычислительного практикума необходимо изучить автоматизированную систему корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах

(см. Приложение 17). Руководство пользователя приведено в Приложении 18, а формат вводимых и выводимых данных – в Приложении 19.

Основные алгоритмы, положенные в основу её работы, подробно описаны в лабораторных работах 2-9.

Следует отметить, что с помощью автоматизированной системы возможен корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных. Для этого необходимо ввести данные в соответствующем формате (см. Приложение 19), используя экранную форму «Filter setting». Пример корреляционно-спектральной обработки экспериментальных данных (см. Приложение 21) приведен в Приложении 20.

## 10.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать временной ряд с заданным видом корреляционной функции и со следующими параметрами -  $M = \text{ent}[\tau_{k \max} / \Delta\tau]$ ,  $N=5000$ ,  $\delta = 0,02$ .
2. Построить КФ и её фазовый портрет, сравнить с теоретическими кривыми.
3. Для заданного ортогонального базиса определить параметры модели и погрешность аппроксимации.
4. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
5. Найти корректирующие коэффициенты, обеспечивающие условие нормировки ортогональной модели КФ, и построить модель КФ.
6. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
7. Построить модель спектральной плотности мощности.
8. Определить экстремальную частоту, значение СПМ в точке, соответствующей экстремальной частоте, и эквивалентную ширину спектра мощности. Сравнить полученные результаты с теоретическими характеристиками, найти относительную погрешность оценивания обобщенных характеристик.
9. Передать действительную компоненту СПМ в подсистему аппроксимации составляющих СПМ и построить ортогональную модель действительной части СПМ.
10. Построить КФ и сравнить с теоретической.
11. При исследовании других ортогональных базисов необходимо повторить пункты 3 – 10.
12. Построить КФ «идеального» полосового шума.
13. Построить ортогональную модель КФ.
14. Построить ортогональную модель спектральной плотности мощности.
15. Пункты 13 – 14 повторить и выбрать наилучший базис.

## 10.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Результаты выполнения работы в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм.
4. Выводы.

#### 10.4. Контрольные вопросы

1. Какой метод положен в основу генерации временных рядов с заданным видом корреляционной функции?
2. Из каких соображений выбирают численное значение интервала дискретизации временного ряда?
3. Какой метод фильтрации применен в лабораторной работе?
4. Чем отличается метод имитационного моделирования от обработки экспериментальных данных?
5. С какой целью строятся фазовые портреты моделей?
6. Какая часть фазового портрета наиболее информативна?
7. Как по виду фазового портрета определить характер корреляционной функции: монотонная, колебательная?
8. Что из себя представляет «идеальный полосовой шум»?

## 11. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ АИС

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков построения ортогональных моделей взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов.

### 11.1. Теоретические основы вычислительного практикума

В предлагаемой лабораторной работе решаются основные задачи взаимного корреляционно-спектрального анализа временных рядов.

Для ее выполнения необходимо изучить автоматизированную систему корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах (см. Приложение 17).

Основные алгоритмы, положенные в основу её работы, подробно описаны в лабораторных работах 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11.

Исследование алгоритмов проводится методом имитационного моделирования на ЭВМ с помощью АИС (см. Приложение 17).

Исходными данными для АИС являются коррелированные временные ряды с заданными корреляционными характеристиками.

Самый простой вариант решения этой задачи заключается в генерировании ПСП с заданным видом корреляционной функции и её задержке на заданный временной интервал [21, 22, 23].

В качестве критерия качества генерирования ПСП можно также воспользоваться косвенным методом:

- оценить взаимную корреляционную функцию;
- аппроксимировать её заданным аналитическим выражением с параметрами, удовлетворяющими минимуму квадратической погрешности аппроксимации;
- сравнить найденные параметры модели с требуемыми значениями параметров корреляционной функции [21].

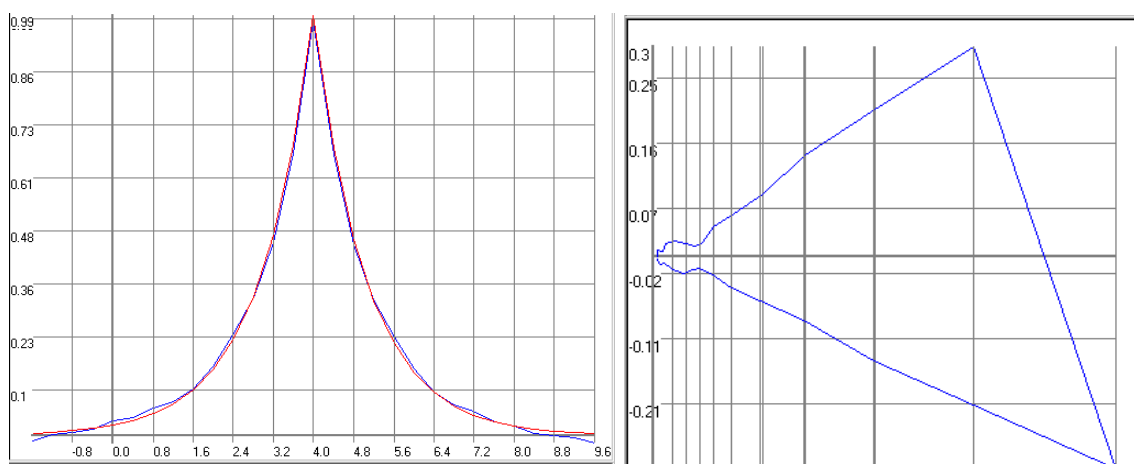
Вторым методом косвенной проверки качества генерирования двух процессов с заданным видом взаимной корреляционной функции является применение фазовых портретов [22, 23]. Методика проверки заключается в выполнении следующих этапов:

- генерирования ПСП с заданным видом корреляционной и взаимной корреляционной функций;
- построения фазового портрета по взаимной корреляционной функции;
- сравнения полученного фазового портрета с эталонным, определенным по аналитической модели требуемой взаимной корреляционной функции.

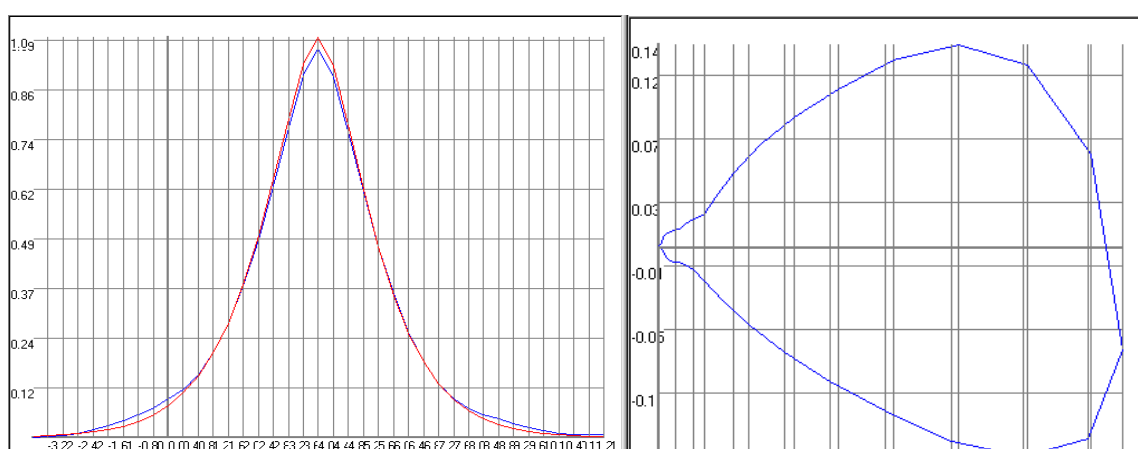
Преимущество такого способа проверки качества генерирования заключается в простоте, наглядности и отсутствии необходимости решать аппроксимативную задачу. На рис. 11.1 - 11.2 приведены примеры фазовых портретов типовых моделей взаимных корреляционных функций. Для сравнения приведены результаты аппроксимации взаимных корреляционных функций соответствующими параметрическими моделями.

Следует отметить, что задача проверки качества подобным способом требует предварительного определения фазового портрета корреляционной функции для генерируемого процесса.

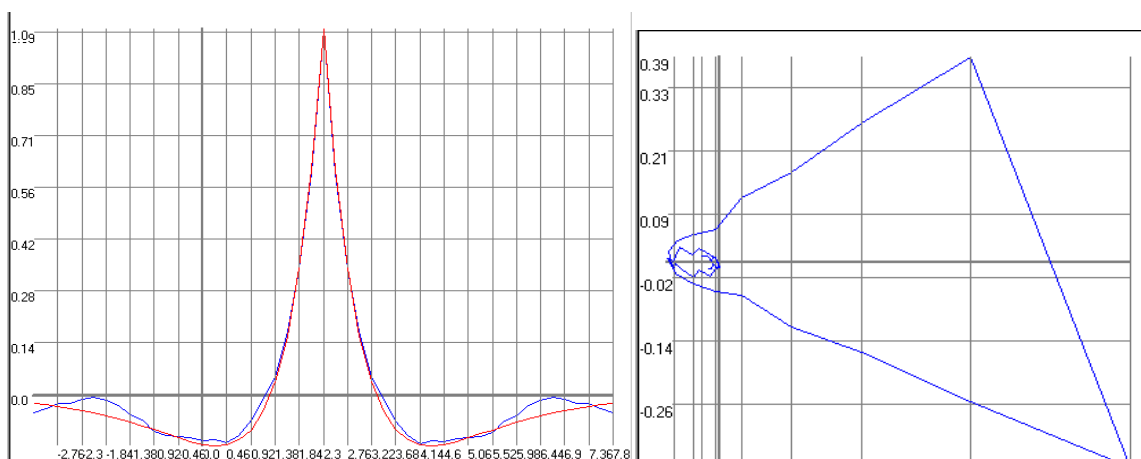




$$\text{a) } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau-\tau_m|}, \lambda=1, \tau_m=10$$

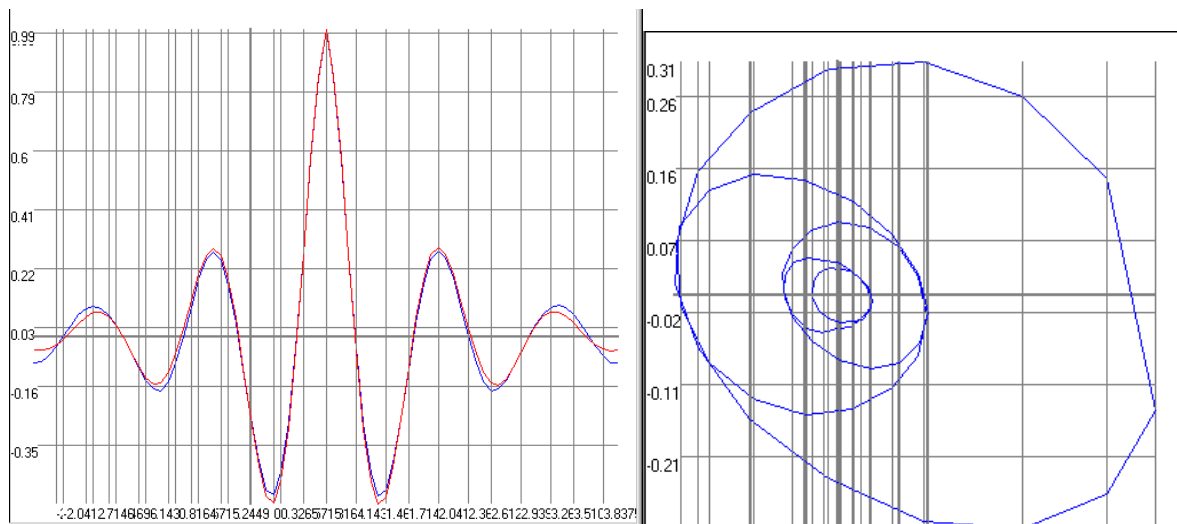


$$\text{б) } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau-\tau_m|}(1+\lambda|\tau-\tau_m|), \lambda=1, \tau_m=10$$

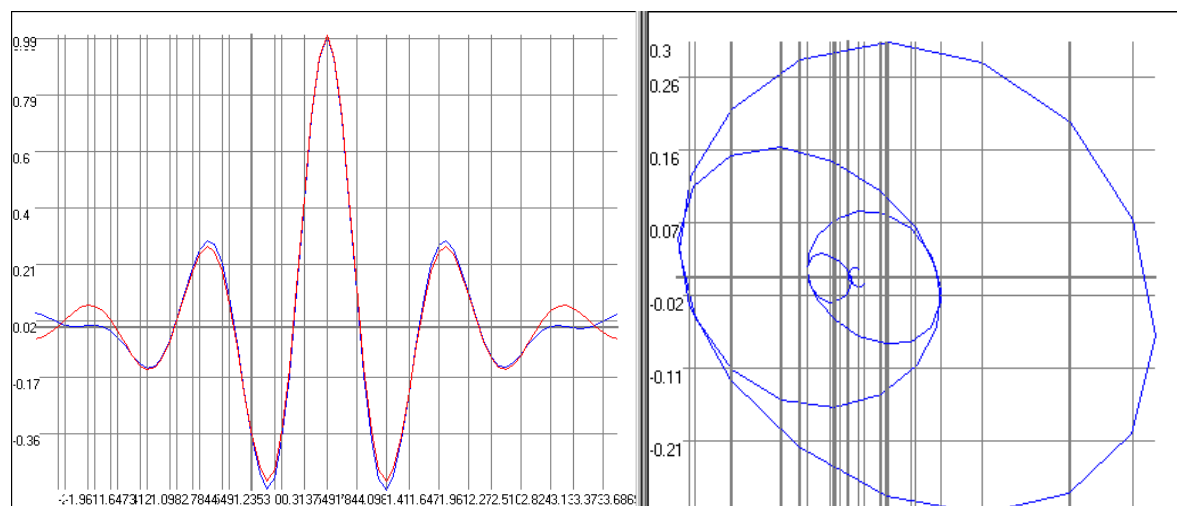


$$\text{в) } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau-\tau_m|}(1-\lambda|\tau-\tau_m|), \lambda=1, \tau_m=10$$

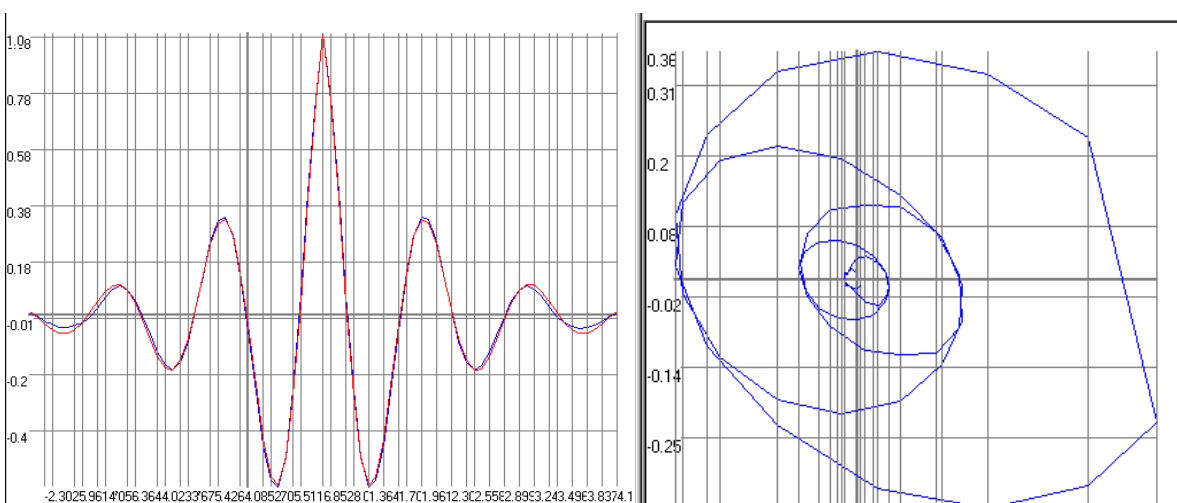
Рисунок 11.1 - Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты монотонных моделей



$$a) \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau-\tau_m|} \cos \omega_0(\tau - \tau_m), \lambda = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$



$$b) \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau-\tau_m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) + \lambda / \omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m)), \lambda = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$



$$v) \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau-\tau_m|} (\cos \omega_0(\tau - \tau_m) - \lambda / \omega_0 \sin \omega_0(\tau - \tau_m)), \lambda = 1, \omega_0 = 5, \tau_m = 10$$

Рисунок 11.2 - Взаимные корреляционные функции и фазовые портреты колебательных моделей

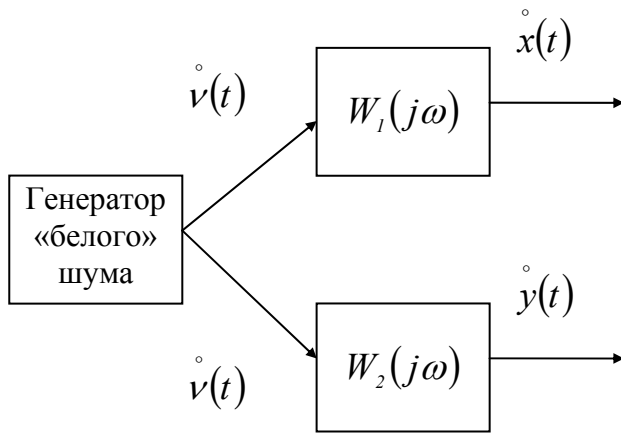


Рисунок 11.3 - Генерирование коррелированных ПСП с заданным видом корреляционных функций

Эта задача также может быть решена и методом фильтрации с использованием единственного источника первичного сигнала (см. рис. 11.3).

Спектральные плотности мощности сигналов  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{y}(t)$  соответственно равны:

$$\begin{cases} S_x(\omega) = S_0 |W_1(j\omega)|^2; \\ S_y(\omega) = S_0 |W_2(j\omega)|^2; \\ S_{xy}(j\omega) = S_0 W_1(j\omega) W_2(-j\omega); \\ S_{yx}(j\omega) = S_0 W_1(-j\omega) W_2(j\omega), \end{cases} \quad (11.1)$$

где  $W_1(j\omega)$ ,  $W_2(j\omega)$  - частотные характеристики формирующих фильтров.

В работе [44] в Приложении 2 приведены выражения для импульсных переходных характеристик формирующих фильтров, а в Приложении 3 - соответствующие им корреляционные функции.

Рассмотрим алгоритм построения ВКФ по параметрам модели спектральной плотности мощности (см. вычислительный практикум 7).

Обозначим

$$S_{xy}(j\omega) = \text{Re} S_{xy}(j\omega) - j \text{Im} S_{xy}(j\omega). \quad (11.2)$$

Отсюда очевидно, что

$$S_{yx}(j\omega) = \text{Re} S_{xy}(j\omega) + j \text{Im} S_{xy}(j\omega). \quad (11.3)$$

Запишем синфазную и квадратурную составляющие спектра:

$$C_{xy}(\omega) = 2 \text{Re} S_{xy}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] \cos \omega \tau d\tau, \quad (11.4)$$

$$Q_{xy}(\omega) = 2 \text{Im} S_{xy}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [K_{yx}(\tau) - K_{xy}(\tau)] \sin \omega \tau d\tau. \quad (11.5)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим:

$$K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^\infty C_{xy}(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \quad (11.6)$$

$$K_{yx}(\tau) - K_{xy}(\tau) = 2 \int_0^\infty Q_{xy}(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (11.7)$$

Из (11.6) и (11.7) следует, что

$$K_{xy}(\tau) = \int_0^\infty C_{xy}(\omega) \cos \omega \tau d\omega - \int_0^\infty Q_{xy}(\omega) \sin \omega \tau d\omega, \quad (11.8)$$

$$K_{yx}(\tau) = 2 \int_0^\infty \text{Re} S_{xy}(\omega) \cos \omega \tau d\omega - 2 \int_0^\infty \text{Im} S_{xy}(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (11.9)$$

Учитывая тот факт, что спектральная плотность мощности – функция комплексной переменной, будем аппроксимировать вещественную и мнимую части раздельно. При использовании в качестве аппроксимирующих функций ортогональные функции получим:

$$Re S_{axy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} \psi_{k Re}(\omega, \alpha_{Re}); \quad (11.10)$$

$$Im S_{axy}(\omega) = \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} \psi_{k Im}(\omega, \alpha_{Im}), \quad (11.11)$$

где

$$\begin{cases} \beta_{k Re} = \frac{1}{\|\psi_{k Re}\|^2} \int_0^\infty Re S_{xy}(u) \psi_{k Re}(u, \alpha_{Re}) du; \\ \beta_{k Im} = \frac{1}{\|\psi_{k Im}\|^2} \int_0^\infty Im S_{xy}(u) \psi_{k Im}(u, \alpha_{Im}) du. \end{cases} \quad (11.12)$$

Представим взаимную корреляционную функцию в виде:

$$\begin{aligned} K_{axy}(\tau) = & 2 \int_0^\infty \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} \psi_{k Re}(\omega, \alpha_{Re}) \cos \omega \tau d\omega - \\ & - 2 \int_0^\infty \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} \psi_{k Im}(\omega, \alpha_{Im}) \sin \omega \tau d\omega. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Воспользовавшись формулами Эйлера, выражение (11.13) приведем к виду:

$$K_{axy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} (W_{k Re}(-j\tau) + W_{k Re}(j\tau)) - \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} (W_{k Im}(-j\tau) - W_{k Im}(j\tau)). \quad (11.14)$$

где  $W_k(j\tau)$  – преобразование Фурье ортогональных функций (см. таблицу 4.2), в качестве аргумента которых используется  $j\tau$ .

Из выражения (11.14), выполнив преобразования, окончательно получим

$$K_{axy}(\tau) = 2 \left( \sum_{k=0}^{m_{Re}} \beta_{k Re} \cdot Re W_{k Re}(j\tau) + \sum_{k=0}^{m_{Im}} \beta_{k Im} \cdot Im W_{k Im}(j\tau) \right). \quad (11.15)$$

Выражения для оценки  $Re W_{k Re}(j\tau)$  и  $Im W_{k Im}(j\tau)$  определяются для ортогональных функций соответственно формулами:

- Лагерра, Лежандра, Дирихле, Якоби  $(\alpha, 0)$  - (4.6), (4.7);
- Сонина-Лагерра (1) - (4.11), (4.12);
- Сонина-Лагерра (2) - (4.14), (4.15);
- Якоби  $(0, 1)$  - (4.17), (4.18);
- Якоби  $(0, 2)$  - (4.29), (4.21).

В указанных формулах необходимо заменить аргументы:  $\omega$  на  $\tau$ .

В таблице 11.1 и 11.2 приведены выражения для определения  $Re W_{k Re}(j\tau)$  и  $Im W_{k Im}(j\tau)$  в указанных ортогональных базисах.

Выражения для определения  $ReW_{kRe}(j\tau)$  и  $ImW_{kIm}(j\tau)$

Таблица 11.1

$\psi_k(\tau, \alpha/\gamma)$	$ReW_{kRe}(j\tau)$	$ImW_{kIm}(j\tau)$
$L_k(\tau, \alpha)$	$\frac{2(-1)^k}{\alpha_{Re}} \cos \varphi_{Re} \cos(2k+1)\varphi_{Re}$ $\varphi_{Re} = \arctg 2\tau / \alpha_{Re}$	$-\frac{2(-1)^k}{\alpha_{Im}} \cos \varphi_{Re} \sin(2k+1)\varphi_{Re}$ $\varphi_{Im} = \arctg 2\tau / \alpha_{Im}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} (1 + (-1)^k \cos[2(k+1)\varphi_{Re}])$ $\varphi_{Re} = \arctg \frac{2\tau}{\gamma_{Re}}$	$\frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} ((-1)^{k+1} \sin[2(k+1)\varphi_{Re}])$ $\varphi_{Re} = \arctg \frac{2\tau}{\gamma_{Re}}$
$Leg_k(\tau, \alpha)$	$\frac{1}{\alpha_{Re}(2k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(2k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Im}}$
$D_k(\tau, \alpha)$	$\frac{(-1)^k}{\alpha_{Re}(k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\alpha_{Re}}$	$-\frac{(-1)^k}{\alpha_{Im}(k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\alpha_{Im}}$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\alpha_{Re}(4k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+1)\gamma_{Re}}$	$-\frac{2}{\alpha_{Im}(4k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+1)\gamma_{Im}}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{2}{\alpha_{Re}(4k+3)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+3)\gamma_{Re}}$	$-\frac{2}{\alpha_{Im}(4k+3)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{2\tau}{(4k+3)\gamma_{Im}}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\alpha_{Re}(k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\gamma_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(k+1)\gamma_{Im}}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\alpha_{Re}(2k+1)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\gamma_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(2k+1)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\gamma_{Im}}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$\frac{1}{\alpha_{Re}(2k+3)} \cos \varphi_{kRe} \cos\left(\varphi_{kRe} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sRe}\right)$ $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+3)\gamma_{Re}}$	$-\frac{1}{\alpha_{Im}(2k+3)} \cos \varphi_{kIm} \sin\left(\varphi_{kIm} + 2\sum_{s=0}^{k-1} \varphi_{sIm}\right)$ $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+3)\gamma_{Im}}$

Выражения для определения  $ReW_{kRe}(j\tau)$  и  $ImW_{kIm}(j\tau)$  Сони́на-Лагерра (2) Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2) представлены ниже:

- Сони́на-Лагерра (2) -  $\varphi_{Re} = \arctg \frac{2\tau}{\gamma_{Re}}$ ,  $\varphi_{Im} = \arctg \frac{2\tau}{\gamma_{Im}}$ :

$$ReW_k^{(2)}(j\tau) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos[(2k+3)\varphi_{Re}]}{2 \cos \varphi_{Re}} + k+1 \right); \quad (11.16)$$

$$ImW_k^{(2)}(j\tau) = \frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left( \frac{(-1)^{k+1} \sin[(2k+3)\varphi_{Im}]}{2 \cos \varphi_{Im}} - \frac{\tg \varphi_{Im}}{2} \right). \quad (11.17)$$

- Якоби (0, 1) и Якоби (0, 2) -  $\varphi_{kRe} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Re}}$ ,  $\varphi_{kIm} = \arctg \frac{\tau}{(2k+1)\alpha_{Im}}$ :

$$ReW_k^{(0,1)}(j\tau) = \frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_{sRe}}{(2s+1)}; \quad (11.18)$$

$$ImW_k^{(0,1)}(j\tau) = -\frac{1}{(k+1)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_{sIm} \sin \varphi_{sIm}}{(2s+1)}; \quad (11.19)$$

$$ReW_k^{(0,2)}(j\tau) = \frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos^2 \varphi_{sRe}}{(2s+1)}; \quad (11.20)$$

$$ImW_k^{(0,2)}(j\tau) = -\frac{2}{(k+1)(k+2)\gamma} \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^s (-1)^s \frac{\cos \varphi_{sIm} \sin \varphi_{sIm}}{(2s+1)}. \quad (11.21)$$

Основные экранные формы автоматизированной системы для проведения взаимного корреляционно-спектрального анализа приведены в Приложении 18.

Следует отметить, что с помощью автоматизированной системы возможен взаимный корреляционно-спектральный анализ экспериментальных данных. Для этого необходимо ввести данные в соответствующем формате (см. Приложение 19), используя экранную форму «Filter setting».

## 11.2. Задание на самостоятельную работу

1. Сгенерировать СП с заданным видом ВКФ.
2. Построить ВКФ и её фазовый портрет, сравнить с теоретическими кривыми.
3. Для заданного ортогонального базиса определить параметры модели ВКФ и погрешность аппроксимации.
4. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
5. Найти корректирующие коэффициенты, обеспечивающие условие нормировки ортогональной модели ВКФ, и построить модель ВКФ.
6. Определить интервалы корреляции, сравнить с теоретическими интервалами, найти относительную погрешность оценивания интервалов корреляции.
7. Построить модель взаимной спектральной плотности мощности.
8. Передать действительную и мнимую компоненты взаимной СПМ в подсистему аппроксимации составляющих СПМ и построить их ортогональные модели.
9. Построить ВКФ и сравнить с теоретической.

### 11.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Результаты выполнения работы в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм.
4. Выводы.

### 11.4. Контрольные вопросы

1. В чём заключается специфика аппроксимации взаимных корреляционных функций по сравнению с аппроксимацией автокорреляционных функций?
2. Какие численные методы применяются при аппроксимации взаимных корреляционных функций?
3. Из каких соображений выбирается начальное приближение при аппроксимации взаимных корреляционных функций параметрическими моделями?
4. Как отличить фазовый портрет колебательной взаимной корреляционной функции от монотонной?
5. Как определяются корректирующие коэффициенты взаимной корреляционной функции, обеспечивающие условие нормировки?
6. Как определяются интервалы корреляции взаимной корреляционной функции?
7. Назовите основное отличие спектральной плотности мощности и взаимной спектральной плотности мощности.

## 12. АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

**Цель работы:** анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции.

### 12.1. Теоретические основы вычислительного практикума

На практике вместо определения коэффициента разложения ортогональной модели (5.16) в соответствии с выражением

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k(\alpha)\|^2} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (12.1)$$

Как правило, приходится ограничиваться конечным интервалом наблюдения корреляционной функции:

$$\hat{\beta}_k^{(1)} = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^{\tau_{k \max}} K_x(\tau) \cdot \psi_k(\tau, \alpha) d\tau, \quad (12.2)$$

где  $\tau_{k \max}$  – интервал корреляции;

При этом появляется дополнительная составляющая методической погрешности, вызванная конечным верхним пределом интегрирования:

$$\Delta_{\beta_k}^{(1)} = \hat{\beta}_k^{(1)} - \beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_{\tau_{k \max}}^{\infty} K_x(\tau) \psi_k(\tau, \alpha) d\tau. \quad (12.3)$$

Необходимо отметить, что  $\lim_{\tau_m \rightarrow \infty} \Delta_{\beta_k}^{(1)} = 0$ .

Специфика проведения аппроксимативного корреляционного анализа с помощью ЭВМ заключается в выборе численного метода для вычисления интеграла в (12.2), «дискретизации» уравнений для оценки параметра масштаба  $\alpha / \gamma$ .

Обозначим оператор численного интегрирования  $\Phi\{\}$ . Тогда оценка коэффициента разложения, вызванная дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования выражения (12.2) примет вид:

$$\hat{\beta}_k^{(2)} = \Phi\{\rho_x(\Delta\tau i) \cdot \psi_k(\Delta\tau i, \alpha / \gamma), J_{\max}\}, \quad (12.4)$$

где  $\Delta\tau$  – шаг дискретизации корреляционной функции;

$$J_{\max} = \text{ent} \left[ \frac{\tau_{k \max}}{\Delta\tau} \right];$$

$$i = 1, \dots, J_{\max}.$$

В этом случае составляющая методической погрешности, вызванная дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования, равна

$$\Delta_{\beta_k}^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \hat{\beta}_k^{(1)}. \quad (12.5)$$

В связи с конечностью выборки значений КФ выражение для оценки коэффициента разложения представим в виде

$$\hat{\beta}_k^{(3)} = \Phi\left\{\hat{\rho}_x(\Delta\tau i) \cdot \psi_k(\Delta\tau i, \alpha / \gamma), \tau_{k \max}, N\right\}, \quad (12.6)$$



$N := N, M, NM$  – объем выборки.

С учетом выражений (12.4.) и (12.6), составляющая методической погрешности, вызванная конечностью объема выборки, будет равна:

$$\Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}. \quad (12.7)$$

Отметим, что для получения достоверных оценок (статистическая погрешность 0,02-0,05), как показали исследования, количество отсчетов равно  $N = 5000 - 2000$  соответственно [22, 23].

Следующая составляющая методической погрешности вызвана необходимостью дискретизации уравнения и применения численных методов для оценки параметра масштаба  $\hat{\alpha}/\hat{\gamma}$ . Выражение для оценки коэффициента разложения в этом случае примет вид:

$$\hat{\beta}_k^{(4)} = \Phi \left\{ \hat{\rho}_x(\Delta \tau i) \cdot \psi_k \left( \Delta \tau i, \hat{\alpha}/\hat{\gamma} \right), \tau_{k \max}, N \right\}, \quad (12.8)$$

Составляющая методической погрешности, вызванная заменой параметра масштаба  $\alpha/\gamma$  её оценкой  $\hat{\alpha}/\hat{\gamma}$ , будет равна:

$$\Delta_{\alpha}^{(4)} = \hat{\beta}_k^{(4)} - \hat{\beta}_k^{(3)}. \quad (12.9)$$

Составляющие методической погрешности, как следует из выражений (12.3), (12.5), (12.7) и (12.9), образуют полную группу погрешностей. Следовательно, методическая погрешность вычисления коэффициентов разложения  $\beta_k$  определяется выражением:

$$\Delta_{\beta_k} = \Delta_{\beta_k}^{(1)} + \Delta_{\beta_k}^{(2)} + \Delta_{\beta_k}^{(3)} + \Delta_{\alpha}^{(4)} = \hat{\beta}_k^{(4)} - \beta_k. \quad (12.10)$$

Конечность интервала интегрирования (интервала корреляции КФ) и интегрирование выражения (12.2) численными методами будут вносить в результирующую погрешность систематическую составляющую, а ограниченность выборки для определения значений КФ и оценки параметра масштаба  $\hat{\alpha}/\hat{\gamma}$  – случайную составляющую. Поэтому составляющие погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(1)}$  и  $\Delta_{\beta_k}^{(2)}$  можно определить, например, с помощью математического пакета Mathcad, а  $\Delta_{\beta_k}^{(3)}$  и  $\Delta_{\alpha}^{(4)}$  – методом имитационного моделирования.

Отметим, что составляющие методической погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(3)}$  и  $\Delta_{\alpha}^{(4)}$ , и погрешность оценки коэффициента разложения  $\beta_k$   $\Delta_{\beta_k}$  являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону. Следовательно, для описания необходимо найти их математическое ожидание и дисперсию (среднеквадратическое отклонение).

На рис. 12.1 приведены результаты оценки  $\hat{\beta}_k$  и  $\Delta_{\beta_k}$  для ортогональных функций Лагерра методом имитационного моделирования с помощью автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах [36, 37, 43] (см. вычислительный практикум 10). В качестве входного процесса был выбран процесс с корреляционной функцией  $\rho_x(\tau) = \exp(-|\tau|) \cos 5\tau$ ,  $\Delta \tau = 0,0816497$ ,  $J_{\max} = 37$ , объем выборки  $N = 5000$ , количество экспериментов – 29 [21].

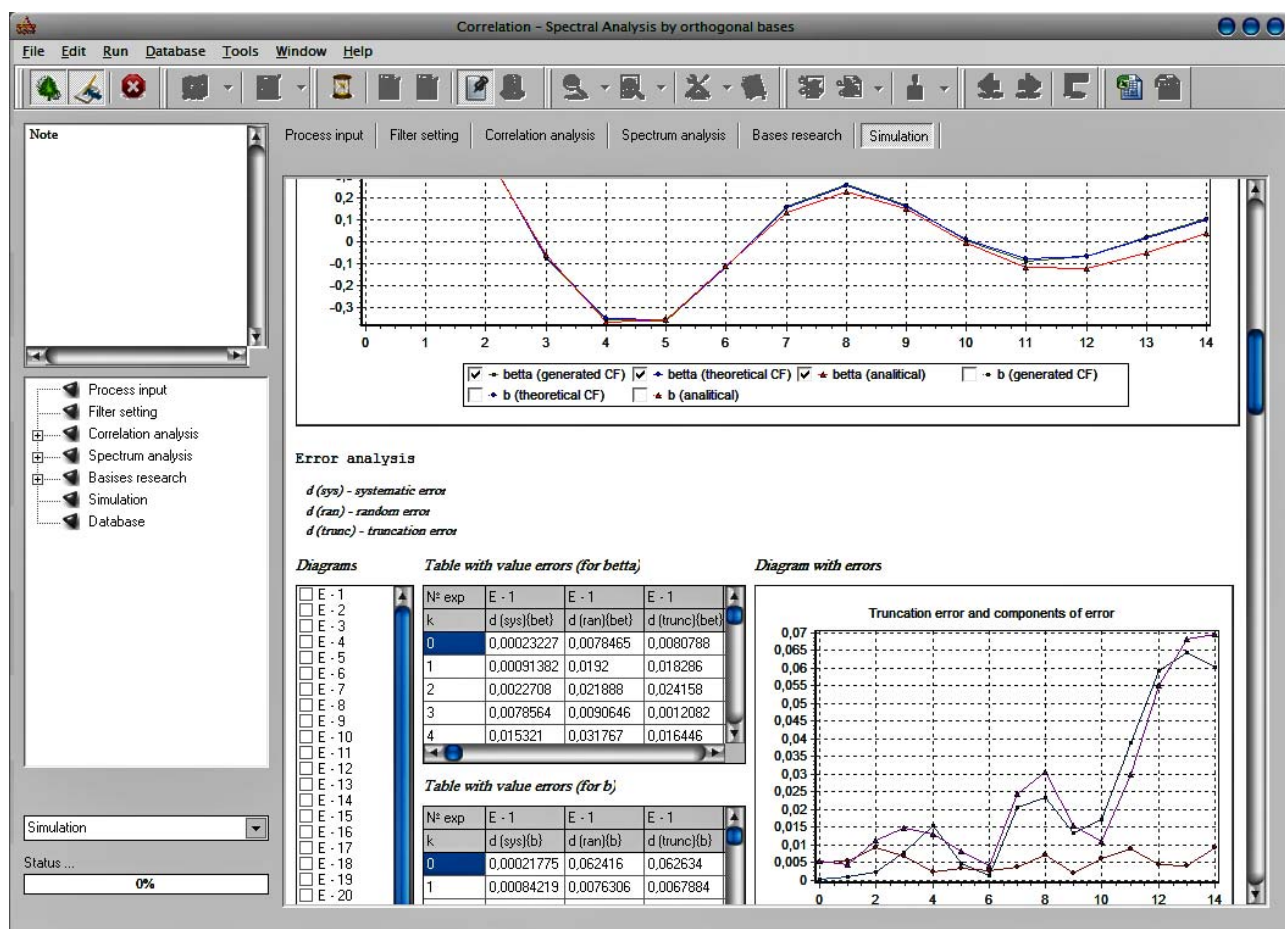


Рисунок 12.1 – Результаты имитационного моделирования

Необходимо отметить, что погрешность определения коэффициентов разложения  $\Delta_{\beta_k}$  возрастает с увеличением порядка  $k$ .

## 12.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции и показателя колебательности  $\mu$  определить коэффициенты разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  (см. лабораторную работу 5).

2. Найти оценку  $\hat{\beta}_k^{(1)}$  и составляющую методической погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(1)}$ .

3. Выбрать численный метод и найти оценку  $\hat{\beta}_k^{(2)}$  и составляющую методической погрешности  $\Delta_{\beta_k}^{(2)}$ .

4. Найти систематическую составляющую методической погрешности оценки коэффициента разложения.

5. Оформить отчет.

### 12.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
  2. Задание.
  3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
  4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
  5. Выражения для оценки составляющих методической погрешности и их численные значения.
  6. Выводы.
- Пример выполнения вычислительный практикум 12 приведен в Приложении 22.

### 12.4. Контрольные вопросы

1. Какие составляющие погрешности образуют полную группу погрешностей?
2. Из каких соображений выбирается интервал дискретизации корреляционной функции?
3. Какие составляющие методической погрешности относятся к систематическим?
4. Какие составляющие методической погрешности относятся к случайным?
5. Зависят ли численные значения составляющих методической погрешности от вида корреляционной функции и значения её параметров?

### 13. ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НА УВЕЛИЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

**Цель работы:** изучение погрешностей аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями.

#### 13.1. Теоретические основы вычислительного практикума

Запишем погрешность аппроксимации КФ в виде  $(\mu(\tau) = 1)$ :

$$\Delta = \int_0^\infty \left[ K_x(\tau) - \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \psi_k(\tau, \alpha) \right]^2 d\tau = \min, \quad (13.1)$$

где  $\hat{\beta}_k$  – оценка коэффициента  $\beta_k$ .

С учетом свойств ортогональных функций [21, 22, 23]

$$\Delta = \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - 2\sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \beta_k \|\psi_k\|^2 + \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^2 \|\psi_k\|^2. \quad (13.2)$$

Выражение (13.2) является функцией случайных оценок коэффициентов разложения  $\hat{\beta}_k$ . Считая отклонения оценок от коэффициентов разложения малыми, разложим выражение (13.2) в ряд Тейлора относительно  $\hat{\beta}_k$  в окрестности  $\beta_k$ , ограничившись квадратичными членами

$$\Delta = \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 + \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \left( \hat{\beta}_k - \beta_k \right)^2. \quad (13.3)$$

В общем случае оценка коэффициентов разложения  $\hat{\beta}_k$  смещена, поэтому

$$\hat{\beta}_k = \beta_k + \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{см,k}. \quad (13.4)$$

С учетом того, что

$$\Delta_{min} = \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau - \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2, \quad (13.5)$$

выражение (13.3) приведем к виду

$$\Delta = \Delta_{min} + \Delta_m, \quad (13.6)$$

где  $\Delta_m = \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \left( \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{см,k} \right)^2$ .

Математическое ожидание погрешности аппроксимации равно

$$M[\Delta] = \Delta_{min} + M[\Delta_m] = \Delta_{min} + \sigma_x^4 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 (\sigma_k^2 + \Delta_{см,k}^2). \quad (13.7)$$

Из выражения (13.7) видно, что математическое ожидание погрешности аппроксимации, кроме минимальной погрешности, содержит вторую составляющую, численное значение которой линейно зависит от погрешности оценки коэффициентов разложения и увеличивается с увеличением числа членов разложения ряда  $m$ . Следует отметить, что в общем случае с увеличением числа членов разложения ряда  $\Delta_{min}$  уменьшается. Следовательно, существует минимум погрешности по  $m$  (см. рис. 13.1).

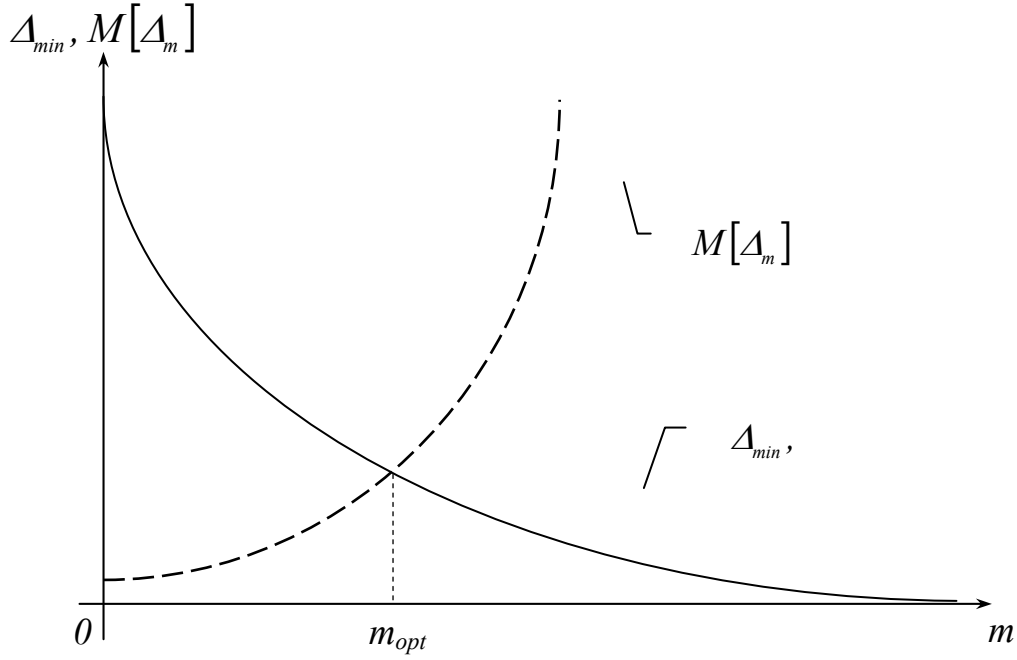


Рисунок 13.1 - Составляющие погрешности аппроксимации

Выполнив все необходимые преобразования, получим дисперсию погрешности аппроксимации:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta}^2 &= \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^m \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 M \left[ \overset{\circ}{\gamma}_k \overset{\circ}{\gamma}_n \right] = \\ &= \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_{\gamma_k}^2 + 2\sigma_x^2 \sum_{k \neq n}^m \|\psi_k\|^2 \|\psi_n\|^2 K_{\gamma,k,n},\end{aligned}\quad (13.8)$$

где  $\overset{\circ}{\gamma}_k = \left( \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{cm,k} \right)^2 - \left( \sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2 \right)$ , а  $\sigma_{\gamma_k}^2$  и  $K_{\gamma,k,n}$  - дисперсия и корреляционный момент случайной величины  $\gamma$ .

При условии некоррелированности  $\gamma_k, \gamma_n$  ( $K_{\gamma,k,n} = 0$ ), получим:

$$\sigma_{\Delta}^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_{\gamma_k}^2. \quad (13.9)$$

Оценим  $\sigma_{\gamma_k}^2$ . Закон распределения  $\overset{\circ}{\beta}_k$ , так как выполняются условия теоремы Ляпунова, можно считать нормальным. Тогда

$$\sigma_{\gamma_k}^2 = M \left\{ \left[ \left( \overset{\circ}{\beta}_k + \Delta_{cm,k} \right)^2 - \left( \sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2 \right) \right]^2 \right\} = 2\sigma_k^4 + 4\sigma_k^2 \Delta_{cm,k}^2. \quad (13.10)$$

Подставив в (13.9) выражение (13.10) и выполнив преобразования, окончательно получим:

$$\sigma_{\Delta}^2 = 2\sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2). \quad (13.11)$$

Из выражения (13.11) следует, что дисперсия погрешности аппроксимации растет с увеличением числа членов разложения ряда  $m$ , а её численное значение зависит от вида ортогональных функций, дисперсии и погрешности от смещенности оценки коэффициентов разложения ряда (5.16).

Приведем выражения для оценки математического ожидания и дисперсии погрешности для различных систем ортогональных функций.

Так как для ортогональных функций Лагерра  $\|L_k\|^2 = 1/\alpha$ , выражения (13.7) и (13.11) примут вид:

$$M[\Delta] = \Delta_{min} + \frac{\sigma_x^4}{\alpha} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2), \quad (13.12)$$

$$\sigma_\Delta^2 = \frac{2\sigma_x^8}{\alpha^2} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2). \quad (13.13)$$

Норма для ортогональных функций Лежандра равна  $\|Leg_k\|^2 = 1/2\alpha(2k+1)$ . Тогда выражения (13.7), (13.11) равны:

$$M[\Delta] = \Delta_{min} + \frac{\sigma_x^4}{2\alpha} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2)/(2k+1), \quad (13.14)$$

$$\sigma_\Delta^2 = \frac{\sigma_x^8}{2\alpha^2} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2)/(2k+1)^2. \quad (13.15)$$

Норма ортогональных функций Дирихле равна  $\|D_k\|^2 = 1/2\alpha(k+1)$ . Следовательно

$$M[\Delta] = \Delta_{min} + \frac{\sigma_x^4}{2\alpha} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2)/(k+1), \quad (13.16)$$

$$\sigma_\Delta^2 = \frac{\sigma_x^8}{2\alpha^2} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2)/(k+1)^2. \quad (13.17)$$

Так как на практике, как правило, оценивают относительную погрешность аппроксимации, выражения (13.6) и (13.11) приведем к виду

$$\delta = \frac{\Delta}{\int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau} = \delta_{min} + \delta_m, \quad (13.18)$$

где  $\delta_m = \frac{1}{\tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^2 \left( \beta_k + \Delta_{cm,k} \right)^2$ .

$$\sigma_\delta^2 = \frac{\sigma_\Delta^2}{\left[ \int_0^\infty K_x^2(\tau) d\tau \right]^2} = \frac{2}{\tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \|\psi_k\|^4 \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2). \quad (13.19)$$

Тогда выражения для оценки относительных математических ожиданий для рассматриваемых ортогональных функций примут вид:

- ортогональные функции Лагерра:

$$M[\delta] = \delta_{min} + \frac{1}{\alpha \tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2); \quad (13.20)$$

$$\sigma_\delta^2 = \frac{2}{\alpha^2 \tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2); \quad (13.21)$$

- ортогональные функции Лежандра:

$$M[\delta] = \delta_{\min} + \frac{I}{2\alpha\tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2) / (2k+1); \quad (13.22)$$

$$\sigma_\delta^2 = \frac{I}{2\alpha^2\tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2) / (2k+1)^2; \quad (13.23)$$

- ортогональные функции Дирихле:

$$M[\delta] = \delta_{\min} + \frac{I}{2\alpha\tau_k^{(4)}} \sum_{k=0}^m (\sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2) / (k+1); \quad (13.24)$$

$$\sigma_\delta^2 = \frac{I}{2\alpha^2\tau_k^{(4)2}} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 (\sigma_k^2 + 2\Delta_{cm,k}^2) / (k+1)^2. \quad (13.25)$$

На рис. 13.2 представлены результаты определения второго слагаемого в выражениях (13.20) – ряд 1, (13.22) – ряд 2 и (13.24) – ряд 3 для различных значений погрешности оценки коэффициентов разложения ( $\gamma_k = \sigma_k^2 + \Delta_{cm,k}^2$ ). Отсюда видно, что наименьший вклад в увеличении методической погрешности аппроксимации при одинаковой погрешности оценки коэффициентов разложения наблюдается у ортогональных функций Лагерра.

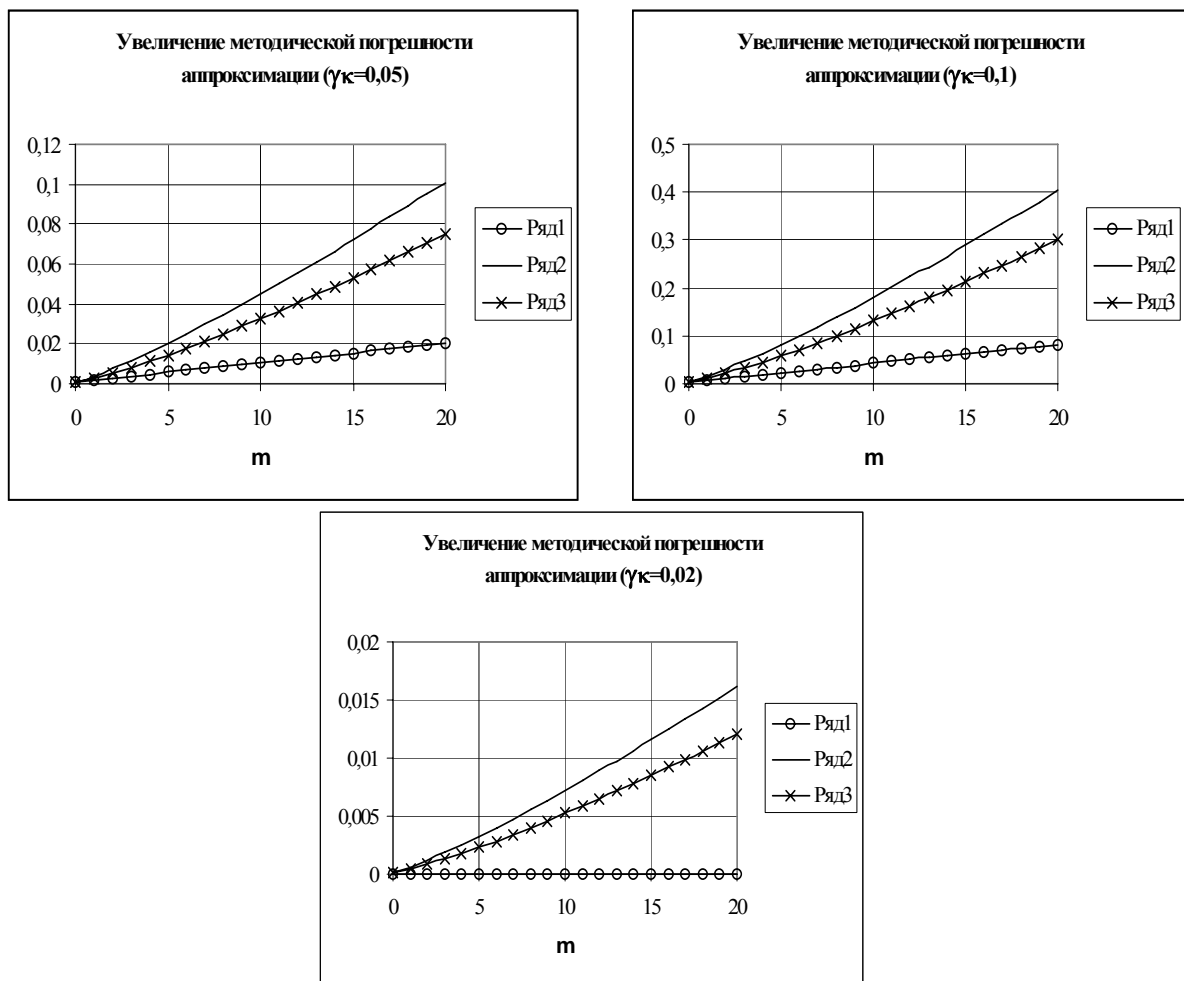


Рисунок 13.2 - Увеличение методической погрешности аппроксимации

### 13.2. Задание на самостоятельную работу

1. Для заданного ортогонального базиса, вида корреляционной функции, показателя колебательности  $\mu$ , воспользовавшись средствами Mathcad найти выражения для оценки  $\alpha$ , коэффициентов разложения  $\{\beta_k\}_{k=0,\dots,m}$  и  $\delta_{min}(\alpha, m)$  (см. лабораторную работу 5).

2. Построить зависимость  $\delta_{min}(m / \rho_x(\tau), \alpha)$ .
3. Задав значениями  $\gamma_k$  построить зависимость  $M[\delta_m] = f_1(m / \gamma_k)$ .
4. Построить зависимость  $M[\delta] = f_2(m / \gamma_k)$ .
5. Построить зависимость  $m_{opt} = f_3(\gamma_k / \mu)$ .
6. Оформить отчет.

### 13.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Исходный текст программы, написанной в MathCad.
4. Результаты выполнения работы в мат. пакете MathCad.
5. Основные соотношения.
6. Результаты расчета, представленные в графической форме.
7. Выводы.

Пример выполнения вычислительный практикум 13 приведен в Приложении 23.

### 13.4. Контрольные вопросы

1. От чего зависит значение  $m_{opt}$  при аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями?
2. Как изменится значение  $m_{opt}$  при уменьшении значения параметра масштаба  $\alpha(\gamma)$ ?
3. Как изменится значение  $m_{opt}$  при увеличении значения показателя колебательности  $\mu$ ?
4. Изменится ли значение  $m_{opt}$  при смене ортогонального базиса?



## 14. АНАЛИЗ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ АИС

**Цель работы:** изучение методики и приобретение практических навыков анализа методических погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций и их характеристик методом имитационного моделирования.

### 14.1. Теоретические основы вычислительного практикума

Сопоставляя методы исследования погрешностей и характеристик погрешностей результатов измерений, следует подчеркнуть особую роль имитационного моделирования в определении характеристик погрешностей [54]. Это обусловлено тем, что составляющие погрешности, входящие в полную группу, хотя и обусловлены разными факторами, в общем случае могут быть коррелированными. Это должно учитываться при их исследовании с целью сопоставления, что делает использование аналитического подхода чрезвычайно затруднительным, а применение экспериментальных методов практически невозможным.

С использованием АИС решены следующие задачи имитационного моделирования:

1. Оценка коэффициентов разложения корреляционной функции.
2. Оценка погрешностей оценки коэффициентов разложения.
3. Оценка погрешностей аппроксимации корреляционных функций.
4. Оценка обобщенных корреляционных характеристик.
5. Оценка обобщенных спектральных характеристик.
6. Составление отчета по результатам имитационного моделирования.

Математическое описание алгоритмов (см. лабораторные работы 12 - 13), реализованных при проведении имитационного моделирования, включающее условные обозначения исследуемых характеристик, введенных при программной реализации, приведено ниже.

#### 1. Оценка коэффициентов разложения корреляционной функции.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$betta(a)$ $b(a)$	$\beta_k$ $b_k$	$\beta_k = \frac{I}{\ \psi_k\ ^2} \int_0^\infty \rho(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau$ $b_k = \beta_k + c_k$
$betta(t)$ $b(t)$	$\hat{\beta}_k^{(2)}$	$\hat{\beta}_k^{(2)} = \frac{I}{\ \psi_k\ ^2} \int_0^{\tau_{k \max}} \rho(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau$

	$\hat{b}_k^{(2)}$	$\hat{b}_k = \hat{\beta}_k + c_k$
$betta(g)$ $b(g)$	$\hat{\beta}_k^{(3)}$ $\hat{b}_k^{(3)}$	$\hat{\beta}_k^{(3)} = \frac{I}{\ \psi_k\ ^2} \int_0^{\tau_{k\max}} \rho_x(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau) d\tau$ $\hat{b}_k = \hat{\beta}_k + c_k$

## 2. Оценка погрешностей оценки коэффициентов разложения.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$d(sys)$	$\Delta_{сист}$	$\Delta_{сист} = \Delta_{\beta_k}^{(1)} + \Delta_{\beta_k}^{(2)} = \hat{\beta}_k^{(2)} - \beta_k$
$d(ran)$	$\Delta_{случ}$	$\Delta_{случ} = \Delta_{\beta_k}^{(3)} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \hat{\beta}_k^{(2)}$
$d(trunc)$	$\Delta_{мет}$	$\Delta_{мет} = \Delta_{сист} + \Delta_{случ} = \hat{\beta}_k^{(3)} - \beta_k$

## 3. Оценка погрешностей аппроксимации корреляционных функций.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$d\ ap1$	$\delta_1$	$\delta_1 = \sqrt{I - \frac{\sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k^{(2)} \ \psi_k\ ^2}{\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}$
$d\ ap2$	$\delta_2$	$\delta_2 = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^m c_k^2 \ \psi_k\ ^2}{\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau}}$
$d\ ap$	$\delta$	$\delta = \delta_1 + \delta_2$

## 4. Составление таблицы по результатам имитационного моделирования.

Обозначение в АИС	Математическое	Алгоритм
-------------------	----------------	----------

	обозначение	
$n_{exp}$	$n$	$n = 1..10000$
$basis$	$\psi_k(\tau, \gamma)$	$P_k^{(-0,5,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(0,5,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$ $P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$ $L_k^{(0)}(\tau, \gamma)$ $L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$ $L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$
$CF$	$\rho(\tau)$	$e^{-\lambda \tau }$ $e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$ $e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$ $e^{-\lambda \tau }\left(1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2\tau^2}{3}\right)$ $e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$ $e^{-\lambda \tau }\left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau \right)$ $e^{-\lambda \tau }\left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau \right)$
$w0 / lambda$	$\omega_0 / \lambda$	$\lambda > 0, \omega_0 > 0$
$delta$	$\delta$	$0,2; 0,1; 0,05; 0,02$
$N$	$N$	$N = 1..1000000$

$M[d_{ap}]$	$M[\delta]$	
$MSE[d_{ap}]$	$\sigma[\delta]$	
$ max(d_{ap}) $	$max\{\delta_j\}$	$j = 1..n_{exp}$

5. Оценка обобщенных корреляционных характеристик.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$\tau_2$	$\tau_k^{(2)}$	$\tau_k^{(2)} = \sum_{k=0}^m \beta_k^{(3)} \tau_{k,u}^{(2)}$
$\tau_2(t)$	$\tau_k^{(2)}$	
$\tau_4$	$\tau_k^{(4)}$	$\tau_k^{(4)} = \sum_{k=0}^m \beta_k^{(3)} \tau_{k,u}^{(4)}$
$\tau_4(t)$	$\tau_k^{(4)}$	
$error(\tau_2)$	$\delta_{\tau_k^{(2)}}$	$\delta_{\tau_k^{(2)}} = \frac{\tau_k^{(2)} - \tau_k^{(2)}}{\tau_k^{(2)}}$
$error(\tau_4)$	$\delta_{\tau_k^{(4)}}$	$\delta_{\tau_k^{(4)}} = \frac{\tau_k^{(4)} - \tau_k^{(4)}}{\tau_k^{(4)}}$

6. Оценка обобщенных спектральных характеристик.

Обозначение в АИС	Математическое обозначение	Алгоритм
$\omega(l)$	$\omega_{\omega}^{(l)}$	
$S_{max}(l)$	$S_x^{(l)}(\omega_{\omega})_{max}$	

$dwe(1)$	$\Delta \omega_{\vartheta}^{(1)}$	$\begin{cases} \Delta \omega_{\vartheta}^{(1)} = \frac{I}{2 S_x(\omega_{\vartheta})_{max}^{(1)}} \\ \Delta \omega_{\vartheta}^{(1)} = \omega_{\vartheta}^{(1)} + \frac{\Delta \omega_{\vartheta}^{(1)}}{2} \end{cases}$
$we(1)(t)$	$\omega_{\vartheta}^{(1)}$	
$Smax(1)(t)$	$S_x(\omega_{\vartheta})_{max}^{(1)}$	
$dwe(1)(t)$	$\Delta \omega_{\vartheta}^{(1)}$	$\begin{cases} \Delta \omega_{\vartheta}^{(1)} = \frac{I}{2 S_x(\omega_{\vartheta})_{max}^{(1)}} \\ \Delta \omega_{\vartheta}^{(1)} = \omega_{\vartheta}^{(1)} + \frac{\Delta \omega_{\vartheta}^{(1)}}{2} \end{cases}$
$we(2)$	$\omega_{\vartheta}^{(2)}$	$\omega_{\vartheta}^{(2)} = \omega_{\vartheta}^{(1)}$
$Smax(2)$	$S_x(\omega_{\vartheta})_{max}^{(2)}$	
$dwe(2)$	$\Delta \omega_{\vartheta}^{(2)}$	$\Delta \omega_{\vartheta}^{(2)} = \omega_{\vartheta}^{(2)} + \frac{\int_{\omega_{\vartheta}^{(2)}}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}{S_x(\omega_{\vartheta})_{max}^{(2)}}$
$we(2)(t)$	$\omega_{\vartheta}^{(2)}$	$\omega_{\vartheta}^{(2)} = \omega_{\vartheta}^{(1)}$
$Smax(2)(t)$	$S_x(\omega_{\vartheta})_{max}^{(2)}$	
$dwe(2)(t)$	$\Delta \omega_{\vartheta}^{(2)}$	$\Delta \omega_{\vartheta}^{(2)} = \omega_{\vartheta}^{(2)} + \frac{\int_{\omega_{\vartheta}^{(2)}}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}{S_x(\omega_{\vartheta})_{max}^{(2)}}$
$error(we(1))$	$\delta_{\omega_{\vartheta}^{(1)}}$	$\delta_{\omega_{\vartheta}^{(1)}} = \frac{\omega_{\vartheta}^{(1)} - \omega_{\vartheta}^{(1)}}{\omega_{\vartheta}^{(1)}}$

$error(S\max(1))$	$\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(1)}$	$\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(1)} = \frac{\hat{S}_x^{(1)}(\omega_3)_{max} - S_x^{(1)}(\omega_3)_{max}}{S_x^{(1)}(\omega_3)_{max}}$
$error(dwe(1))$	$\delta_{\Delta\omega_3}^{(1)}$	$\delta_{\omega_3}^{(1)} = \frac{\hat{\Delta\omega_3}^{(1)} - \Delta\omega_3^{(1)}}{\Delta\omega_3^{(1)}}$
$error(we(2))$	$\delta_{\omega_3}^{(2)}$	$\delta_{\omega_3}^{(2)} = \frac{\hat{\omega_3}^{(2)} - \omega_3^{(2)}}{\omega_3^{(2)}}$
$error(S\max(2))$	$\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(2)}$	$\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(2)} = \frac{\hat{S}_x^{(2)}(\omega_3)_{max} - S_x^{(2)}(\omega_3)_{max}}{S_x^{(2)}(\omega_3)_{max}}$
$error(dwe(2))$	$\delta_{\Delta\omega_3}^{(2)}$	$\delta_{\omega_3}^{(2)} = \frac{\hat{\Delta\omega_3}^{(2)} - \Delta\omega_3^{(2)}}{\Delta\omega_3^{(2)}}$

## 14.2. Задание на самостоятельную работу

1. Задать параметры имитационного моделирования в соответствующих подсистемах автоматизированной системы:

1.1. Вид корреляционной функции  $\rho_x(\tau, \omega_0/\lambda)$  с параметрами -  $M = ent[\tau_{k\max} / \Delta\tau]$ ,  $\mu = \omega_0/\lambda$ ,  $\delta = 0,05; 0,02; 0,1; 0,2$ .

1.2. Вид ортогональной функции  $\psi_k(\tau, \gamma)$ .

1.3. Настройка параметров аппроксимации (выполняемость основного свойства, инвертирование, установка максимума в «нуль», диапазон поиска числа членов разложения).

1.4. Объем выборки  $N$ .

1.5. Число проводимых экспериментов  $n_{exp}$ .

2. Провести имитационное моделирование и выгрузить результаты моделирования в MS Excel.

3. Построить следующие зависимости с помощью MS Excel:

3.1. Графические зависимости  $M[\delta](N/\mu, n_{exp})$ ,  $\sigma[\delta](N/\mu, n_{exp})$ ,  $\max\{\delta_j\}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\tau_k^{(2)}}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\tau_k^{(4)}}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\omega_3}^{(1)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\omega_3}^{(2)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(1)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(2)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\Delta\omega_3}^{(1)}(N/\mu, n_{exp})$ ,  $\delta_{\Delta\omega_3}^{(2)}(N/\mu, n_{exp})$ .

3.2. Графические зависимости  $M[\delta](\mu/N, n_{exp}), \sigma[\delta](\mu/N, n_{exp}), \max\{\delta_j\}(\mu/N, n_{exp}), \delta_{\tau_k^{(2)}}(\mu/N, n_{exp}), \delta_{\tau_k^{(4)}}(\mu/N, n_{exp}), \delta_{\omega_3}^{(1)}(\mu/N, n_{exp}), \delta_{\omega_3}^{(2)}(\mu/N, n_{exp}), \delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(1)}(\mu/N, n_{exp}), \delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(2)}(\mu/N, n_{exp}), \delta_{\Delta\omega_3}^{(1)}(\mu/N, n_{exp}), \delta_{\Delta\omega_3}^{(2)}(\mu/N, n_{exp})$ .

3.3. Графические зависимости  $M[\delta](n_{exp}/N, \mu), \sigma[\delta](n_{exp}/N, \mu), \max\{\delta_j\}(n_{exp}/N, \mu), \delta_{\tau_k^{(2)}}(n_{exp}/N, \mu), \delta_{\tau_k^{(4)}}(n_{exp}/N, \mu), \delta_{\omega_3}^{(1)}(n_{exp}/N, \mu), \delta_{\omega_3}^{(2)}(n_{exp}/N, \mu), \delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(1)}(n_{exp}/N, \mu), \delta_{S_x(\omega_3)_{max}}^{(2)}(n_{exp}/N, \mu), \delta_{\Delta\omega_3}^{(1)}(n_{exp}/N, \mu), \delta_{\Delta\omega_3}^{(2)}(n_{exp}/N, \mu)$ .

4. Изменить пункты 1.4 и 1.5.

5. Изменить пункт 1.1.

6. Изменить пункт 1.2, повторить пункты 1 - 5 и выбрать наилучший базис.

### 14.3. Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Задание.
3. Результаты проведения имитационного моделирования в автоматизированной системе, представленные в виде экранных форм.
4. Результаты проведения имитационного моделирования в виде документа MS Excel.
5. Результаты построения требуемых графических зависимостей в виде документа MS Excel.
6. Выводы.

### 14.4. Контрольные вопросы

1. Каким образом влияет изменение объема выборки на погрешность аппроксимации? Погрешности оценки обобщенных корреляционно-спектральных характеристик?
2. Каким образом влияет изменение показателя колебательности на погрешность аппроксимации? Погрешности оценки обобщенных корреляционно-спектральных характеристик?
3. Влияет ли на результаты проведенных экспериментов пересчет коэффициентов разложения с учетом выполнения основного свойства?
4. Какое число экспериментов рекомендуется проводить? Почему?
5. Какой из способов оценки интервалов корреляции дает худший результат? Почему?
6. Какой из способов оценки эквивалентной ширины спектральной плотности мощности дает лучший результат? В каких случаях и почему?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом вычислительном практикуме рассмотрены вопросы:

- 1) математического описания ортогональных полиномов и функций, исследования их свойств;
- 2) построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных функций и их обобщенных характеристик;
- 3) анализа погрешностей оценки параметров ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик;
- 4) построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик при комплексных испытаниях изделий авиационно-космической техники.

Задания вычислительного практикума выполняются как с помощью математического пакета Mathcad, так и с помощью разработанной автоматизированной информационной системы.

Учитывая разнообразие вероятностных характеристик случайных процессов, естественно, работу в этой области нельзя считать решенной в полной мере. Однако, автор полагает, что предлагаемый базовый вариант вычислительного практикума предоставляет возможность для обучения научных сотрудников, аспирантов и студентов методам построения ортогональных моделей корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов, имитационного моделирования и обработки случайных процессов, связанных, в том числе, с комплексными испытаниями авиационно-космической техники. Полученные результаты моделирования и обработки результатов комплексных испытаний с помощью автоматизированной информационной системы могут экспортироваться в MS Excel и MS Word, что существенно облегчает их дальнейшее использование.

Отметим, что предлагаемый перечень работ вычислительного практикума отражает лишь опыт и точку зрения автора и может быть существенно расширен как по номенклатуре работ, так и по количеству пунктов исследований в каждой работе.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

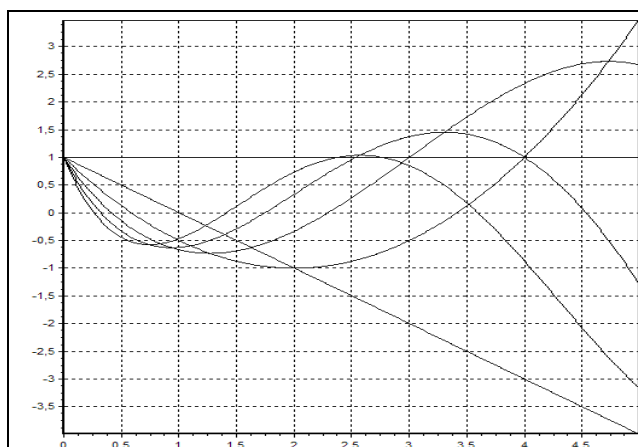
1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.
2. Бобнев М.П. Генерирование случайных сигналов. Изд. 2-е перераб. и доп. М.: «Энергия», 1971. – 239 с.
3. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
6. Дедус Ф.Ф., Махортых С.А., Устинин М.Н. и др. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. – М.: Машиностроение, 1999. – 357 с.
7. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: Главное издательство иностранной литературы, 1974. – 260 с.
8. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.1. – М.: Мир, 1971. – 320 с.
9. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Ч.2. – М.: Мир, 1972. – 288 с.
10. Докин В.Н., Жуков В.Д., Колокольникова Н.А. и др. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1990. – 208 с.
11. Егорычев Г.П. Интегральное представление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 286 с.
12. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1971. – 327 с.
13. Куликовских И.М. Многомерная параметрическая модель артериальной пульсовой волны //Биотехнические, медицинские, экологические системы и комплексы (БИОМЕДСИСТЕМЫ - 2007): Материалы XX Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов. – Рязань, 2007. – С. 112-113.
14. Лебедев П.А., Калакутский Л.И., Власова С.П. и др. Диагностика функции сосудистого эндотелия у больных с сердечно-сосудистыми заболеваниями. Методические указания. – СГАУ. – Самара, 2004. – 18 с.
15. Леоненков А.В. Самоучитель UML – СПб.: БХВ - Петербург, 2001. – 304 с., ил.
16. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74 //Минприбор. – 1974. – 76 с.
17. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. – 480 с.
18. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985.
19. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. – М.: Сов. радио, 1971. – 400 с.
20. Попов Ю.П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. – Новое в жизни, науке и технике. Сер. Мат-ка, киб., 1983, №11, М.: Знание. – 64 с.
21. Прикладной анализ случайных процессов/Под ред. С.А. Прохорова. – Самара: СНЦ РАН, 2007. – 582 с.
22. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. – 380 с., ил.
23. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – Самара, СНЦ РАН, 2001. – 329 с.

24. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 209 с.: ил.
25. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум./Самар. гос. аэрокосм. ун-т, Уральск, 2001. – 191 с.: ил.
26. Прохоров С.А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./СНЦ РАН, 2001. – 277 с., ил.
27. Прохоров С.А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Уральск, 2001. – 374 с.: ил.
28. Прохоров С.А., Иващенко А.В., Графкин А.В.; Под ред. Прохорова С.А. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа случайных процессов. - СНЦ РАН, 2003. – 286 с., ил.
29. Прохоров С.А., Графкин А.В., Графкин В.В. Автоматизированный комплекс корреляционно-спектрального анализа методом аппроксимации ортогональными функциями/ Вестник Самарского государственного технического университета. Выпуск 33. Серия «Технические науки». 2005. – С. 329-324.
30. Прохоров С.А., Кудрина М.А., Кудрин К.А. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа/ Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета № 1 (5), 2004. – С. 117-123.
31. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Якоби/ Труды 5 Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2006. – С. 50-53.
32. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Якоби/ Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции «Компьютерные технологии в науке, практике и образовании», СГТУ, Самара, 2005. – С. 54-59.
33. Прохоров С.А. Лабораторный практикум по моделированию и анализу случайных процессов/ Материалы XIV научно-технической конференции с участием зарубежных специалистов «Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления «Датчик-2002»». – С. 305-306.
34. Прохоров С.А. Частотные свойства ортогональных функций экспоненциального типа/ Труды научно-технической конференции с международным участием «Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ-2006)». Том 2. – Самара, 2006. – С. 55- 62.
35. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная информационная система исследования ортогональных полиномов и функций семейства Якоби //Проблемы автоматизации и управления в технических системах: Материалы международной научно-технической конференции. – ИИЦ ПГУ. – Пенза, 2007. – С. 149-152.
36. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах Якоби //Компьютерные технологии в науке, практике и образовании: Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – СГТУ. – Самара, 2006. – С. 50-53.
37. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Автоматизированная система корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах //Современные проблемы информатизации в анализе и синтезе технологических и программно-телекоммуникационных систем (СПИ-2008): Сборник трудов XIII Международной открытой конференции. – Воронеж, 2008. –Выпуск 13. – С. 313-317.
38. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Чебышева// Радиотехника и связь: Материалы четвертой международной научно-технической конференции. - Саратов, 2007. – С. 12-17.
39. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Корреляционно-спектральный анализ в ортогональных базисах Якоби //Компьютерные технологии в науке, практике и образовании:

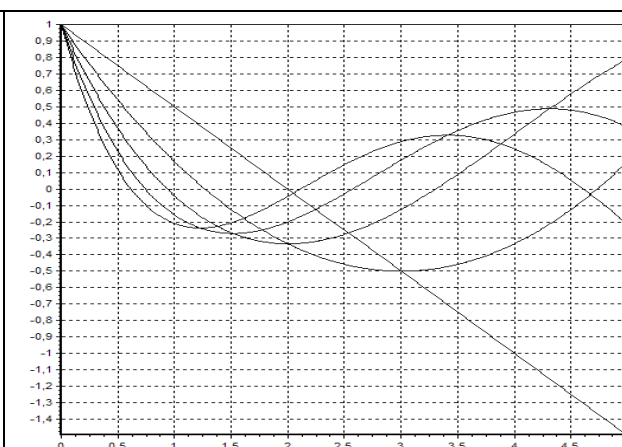
- Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – СГТУ. – Самара, 2005. – С. 54-59.
40. Прохоров С.А., Куликовских И.М., Москаленко И.С. Лабораторный практикум по корреляционно-спектральному анализу случайных процессов в ортогональных базисах //Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ - 2006): Труды научно-технической конференции с международным участием. – Самара, 2006. – Т.3. – С. 117-120.
41. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Об одном подходе к уточнению параметра масштаба ортогональных функций в задачах аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа //Компьютерные технологии в науке, практике и образовании: Труды Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. – СГТУ. – Самара, 2007. – С. 42-45.
42. Прохоров С.А., Иващенко А.В. Автоматизированная система для аппроксимативного анализа взаимных корреляционно-спектральных характеристик временных рядов / Труды международного симпозиума "Надежность и качество" / Под ред. Н.К. Юрьева. Пенза: Информационно-издательский центр Пензенского гос. университета, 2002. – С. 146-149.
43. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Программный комплекс аппроксимативного анализа корреляционных и спектральных характеристик случайных процессов в классических ортогональных базисах Якоби и Сонина-Лагерра //Инновационные технологии в управлении, образовании, промышленности (АСТИНТЕХ-2007): Материалы Всероссийской научной конференции. – Издательский дом «Астраханский университет». – Астрахань, 2007. – С. 130-134.
44. Прохоров С.А., Графкин А.В. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах. – Самара: СНЦ РАН, 2005. – 241 с.
45. Прохоров С.А. Частотные свойства ортогональных функций экспоненциального типа //Перспективные информационные технологии в научных исследованиях, проектировании и обучении (ПИТ - 2006): Труды научно-технической конференции с международным участием. – Самара, 2006. – Т.2. – С. 55-62.
46. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Частотные свойства ортогональных функций Якоби //Информационные технологии в высшем профессиональном образовании: сборник докладов второй межрегиональной научно-технической конференции. – Тольятти, 2007. – С. 125-128.
47. Прохоров С.А., Куликовских И.М. Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра //Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». -2007. - №15. – С. 123-127.
48. Пугачёв В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968. – 368 с.
49. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. - М.: Физматиздат., 1962. – 884 с.
50. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Аппроксимативные методы анализа случайных процессов. - М.: Энергия, 1974. – 176 с., ил.
51. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. - М.: Сов. радио, 1968. – 256 с.
52. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2001. – 336 с.
53. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. - М.: Наука, 1976. – 328 с.
54. Цветков Э.И. Методические погрешности статистических измерений - Л: Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1984. – 144 с., ил.
55. Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. - 2-е изд., перераб. и доп. - Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отделение, 1982. – 256 с.
56. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1972.

57. Lampard D.G. A new Method of determining Correlation Function Stationary Time Series. "Proceedings of the Institution of Electrical Engineers", vol. 102, part. C. March, 1955, London, № 1.
58. <http://millionreferatov.ru/text/18/610.htm>
59. <http://www.univer.omsk.su/omsk/Edu/Math/ddirihle.html>
60. <http://be.sci-lib.com/article058261.html>
61. <http://l-polindrom.com.ru>
62. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Rodrigues.html>
63. [http://en.wikipedia.org/wiki/Olinde\\_Rodrigues](http://en.wikipedia.org/wiki/Olinde_Rodrigues)
64. <http://www.math.ru/history/people/Rodrigues>
65. [http://www.biografija.ru/show\\_bio.aspx?id=120313](http://www.biografija.ru/show_bio.aspx?id=120313)
66. <http://ru.wikipedia.org/wiki>
67. <http://www.oval.ru/enc/81859.html>
68. <http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/121/648.html>
69. <http://www.krugosvet.ru/articles/106/1010637/1010637a1.htm>
70. <http://www.c-cafe.ru/days/bio/5/084.php>
71. <http://www.krugosvet.ru/articles/39/1003936/1003936a1.html>
72. <http://www.univer.omsk.su/omsk/Edu/Math/jajakobi.html>

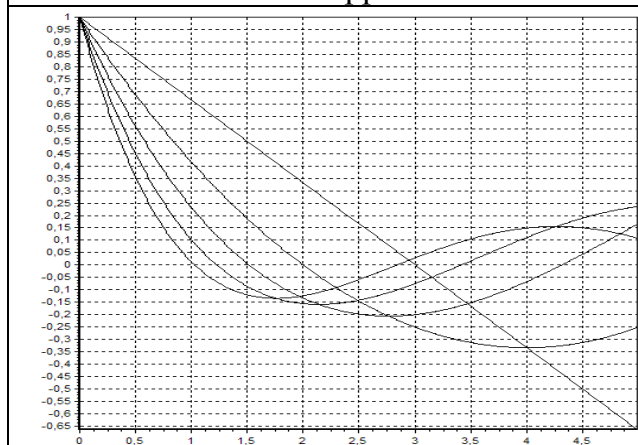
# ВИД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ $\theta$ – 5 ПОРЯДКОВ



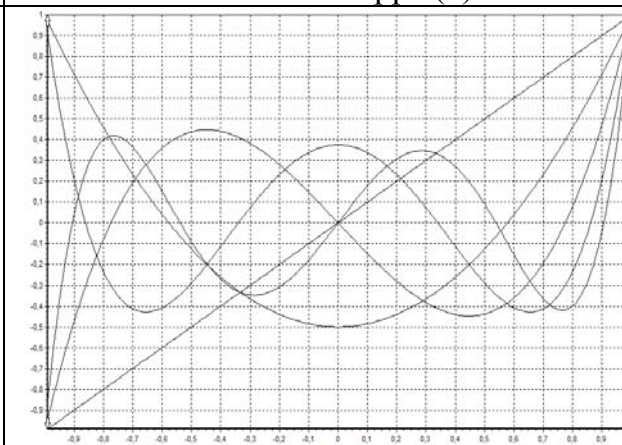
Лагерра



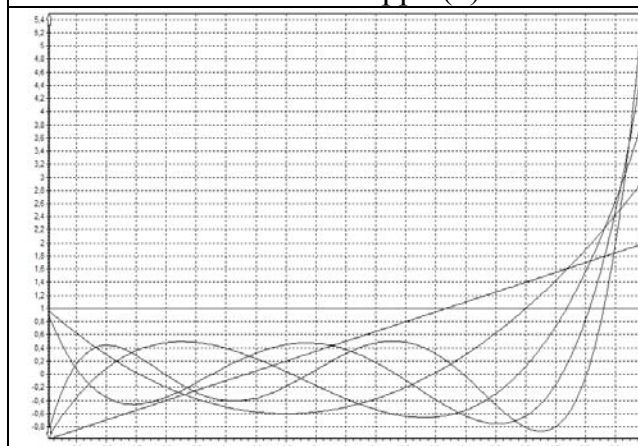
Сонина-Лагерра (1)



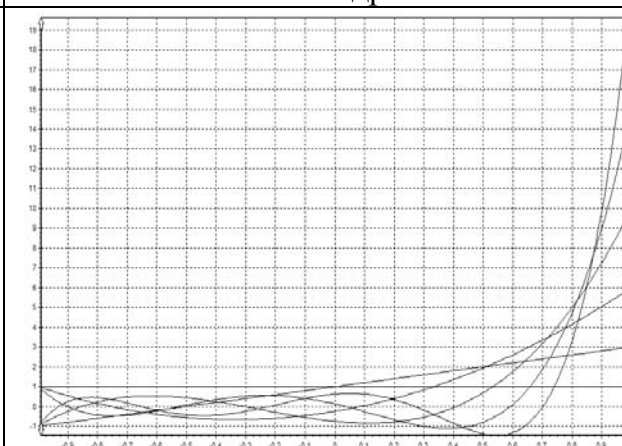
Сонина-Лагерра (2)



Лежандра

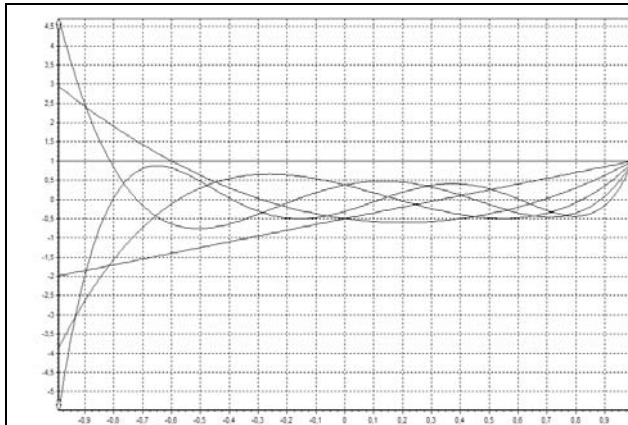


Якоби (1, 0)

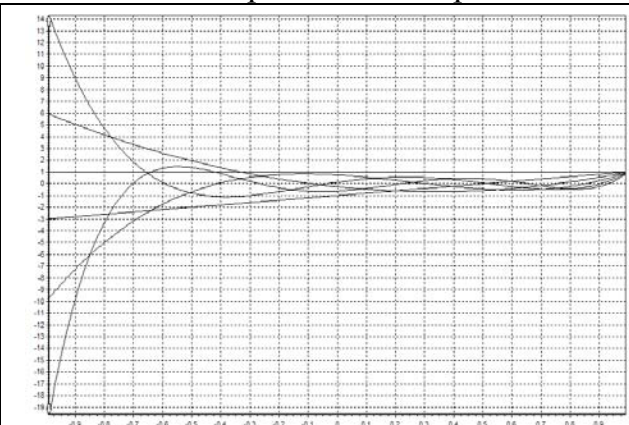


Якоби (2, 0)

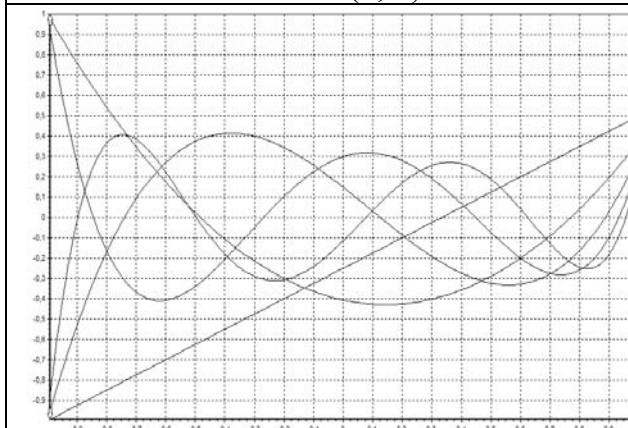




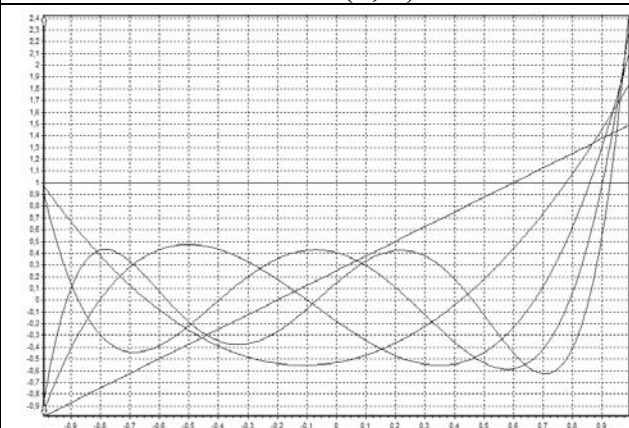
Якоби (0, 1)



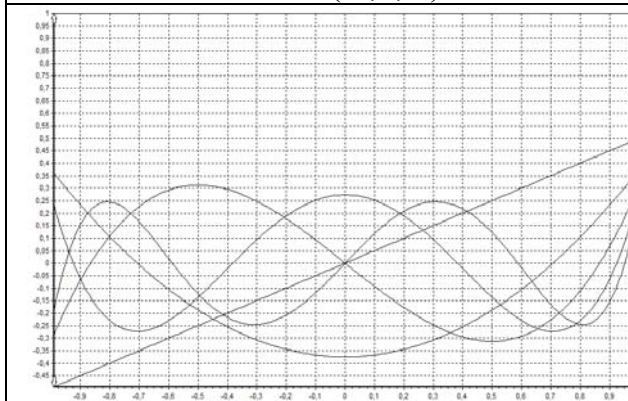
Якоби (0, 2)



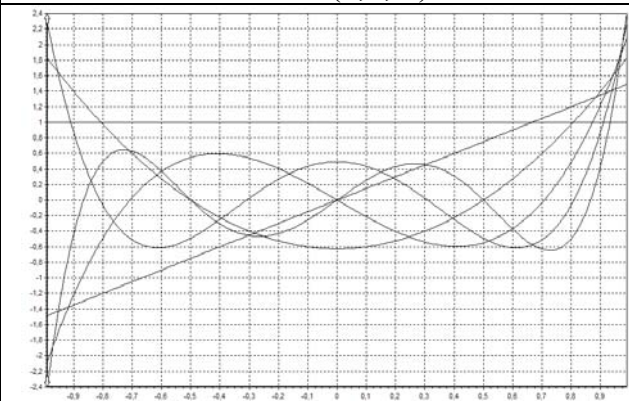
Якоби (-0,5, 0)



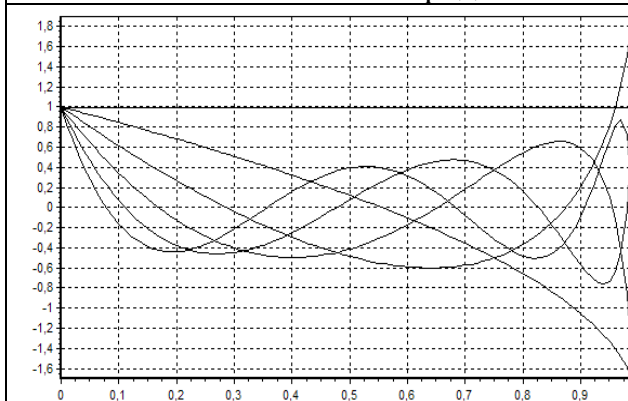
Якоби (0,5, 0)



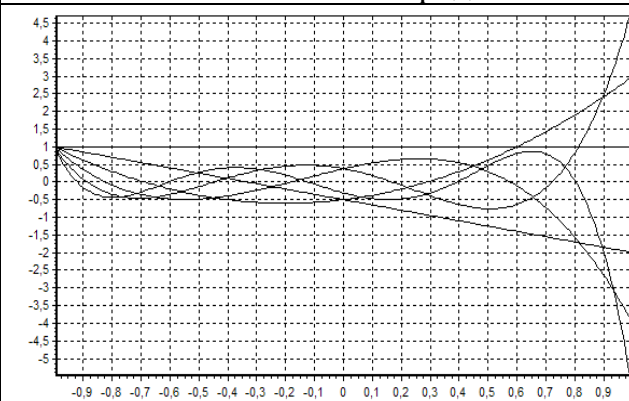
Чебышева 1-ого рода



Чебышева 2-ого рода



Дирихле 1



Дирихле 2

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 1. «ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ»

**Цель работы:** изучение основных свойств классических ортогональных полиномов, приобретение навыков работы с ними.

1. Представление ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка

1.1. Представить ортогональные полиномы в форме Родрига и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

$$P_1(k, x) := \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \\ \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} \cdot \frac{1}{(1-x)} \left[ \frac{d^k}{dx^k} \left[ (1-x)^{k+1} \cdot (1+x)^k \right] \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P_1(0, x) \text{ simplify} \rightarrow 1$$

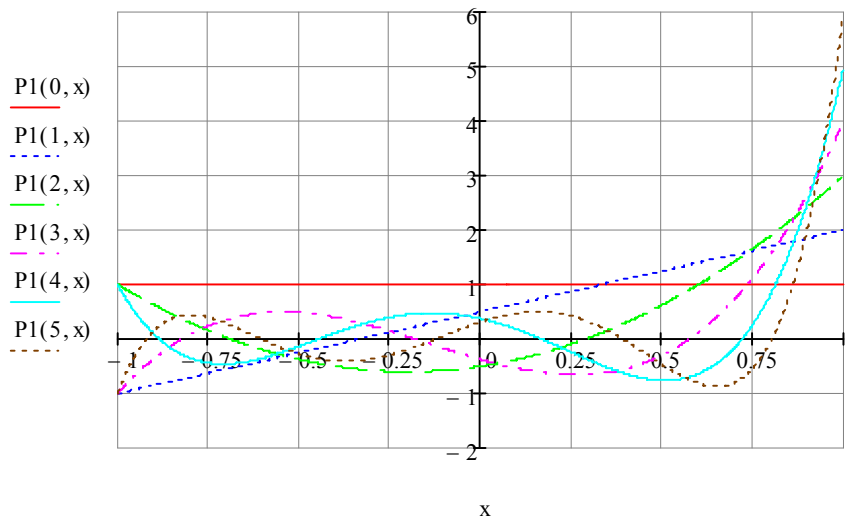
$$P_1(1, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$P_1(2, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{5 \cdot x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$$

$$P_1(3, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{35 \cdot x^3}{8} + \frac{15 \cdot x^2}{8} - \frac{15 \cdot x}{8} - \frac{3}{8}$$

$$P_1(4, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{63 \cdot x^4}{8} + \frac{7 \cdot x^3}{2} - \frac{21 \cdot x^2}{4} - \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{3}{8}$$

$$P_1(5, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{231 \cdot x^5}{16} + \frac{105 \cdot x^4}{16} - \frac{105 \cdot x^3}{8} - \frac{35 \cdot x^2}{8} + \frac{35 \cdot x}{16} + \frac{5}{16}$$



1.2. Представить ортогональные полиномы в виде конечного ряда и получить аналитические выражения и графики для первых шести порядков.

$$P(k, x) := \sum_{s=0}^k \left[ \frac{k!}{s! \cdot (k-s)!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot \left( \frac{x-1}{2} \right)^s \right]$$

$$P(0, x) \text{ simplify} \rightarrow 1$$

$$P(1, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{1}{2}$$

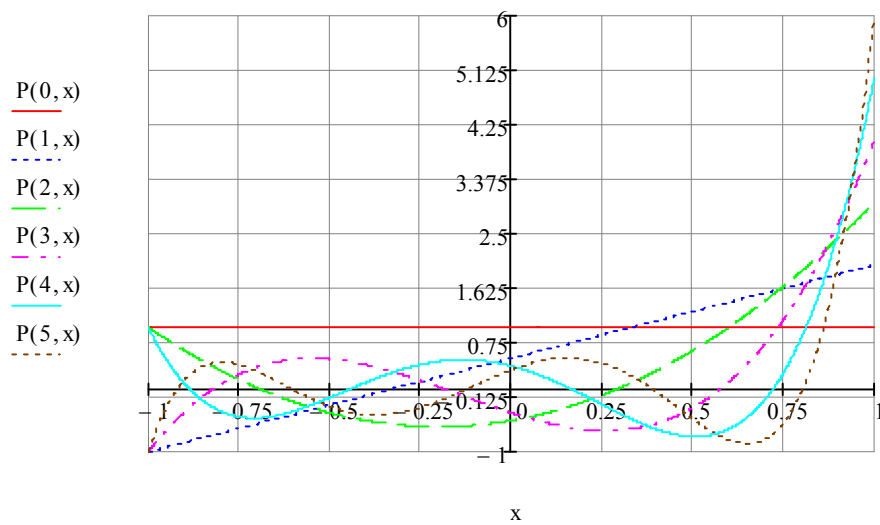
$$P(2, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{5 \cdot x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$$

$$P(3, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{35 \cdot x^3}{8} + \frac{15 \cdot x^2}{8} - \frac{15 \cdot x}{8} - \frac{3}{8}$$

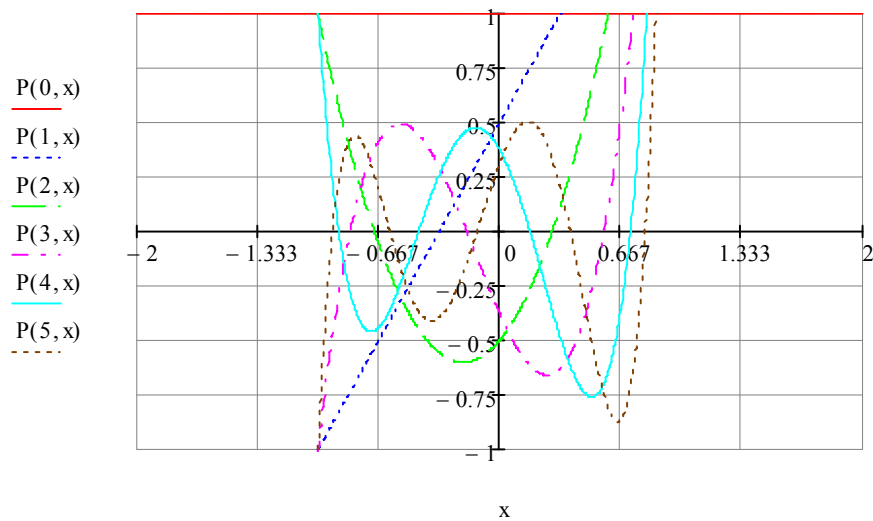
$$P(4, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{63 \cdot x^4}{8} + \frac{7 \cdot x^3}{2} - \frac{21 \cdot x^2}{4} - \frac{3 \cdot x}{2} + \frac{3}{8}$$

$$P(5, x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{231 \cdot x^5}{16} + \frac{105 \cdot x^4}{16} - \frac{105 \cdot x^3}{8} - \frac{35 \cdot x^2}{8} + \frac{35 \cdot x}{16} + \frac{5}{16}$$





2. Определить интервал ортогональности  $[a, b]$ . Рассчитать ортогональные полиномы  $k$ -ого порядка на концах интервала ортогональности.



$a := -1$                        $k := 0..5$   
 $b := 1$                        $P(k, -1) :$                        $P(k, 1) =$

1
-1
1
-1
1
-1

1
2
3
4
5
6

### 3. Определение нормы ортогональных полиномов.

3.1. Определить значения нормы ортогональных полиномов из выражения (1. 7).

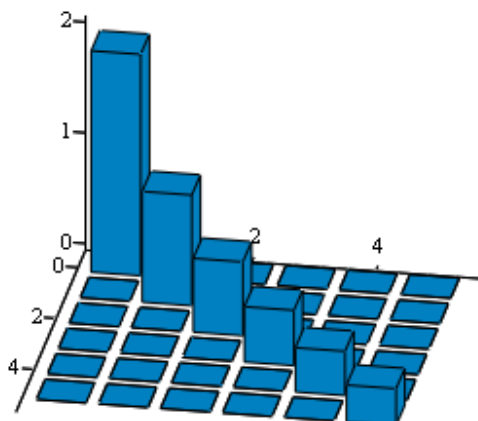
Результат - в виде матрицы значений с разрядностью (k, m), привести графическую интерпретацию.

$k := 6$                        $\mu(x) := 1 - x$   
 $i := 0..k - 1$   
 $\underline{m} := k$   
 $j := 0..m - 1$

$$\text{NormP}(i, j) := \int_a^b P(i, x) \cdot P(j, x) \cdot \mu(x) dx$$

$\text{NormMP} := \text{matrix}(k, m, \text{NormP})$

$$\text{NormMP} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0.667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0 \\ 0 & -0 & 0 & -0 & -0 & 0.333 \end{pmatrix}$$



NormMP

3.2. Определить значение нормы ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка, используя выражение, приведенное в таблице 1.2. Результат представить в виде вектора значений.

$$\text{NormPT}_i := \frac{2}{i+1}$$

NormPT<sub>i</sub> =

2
1
0.667
0.5
0.4
0.333

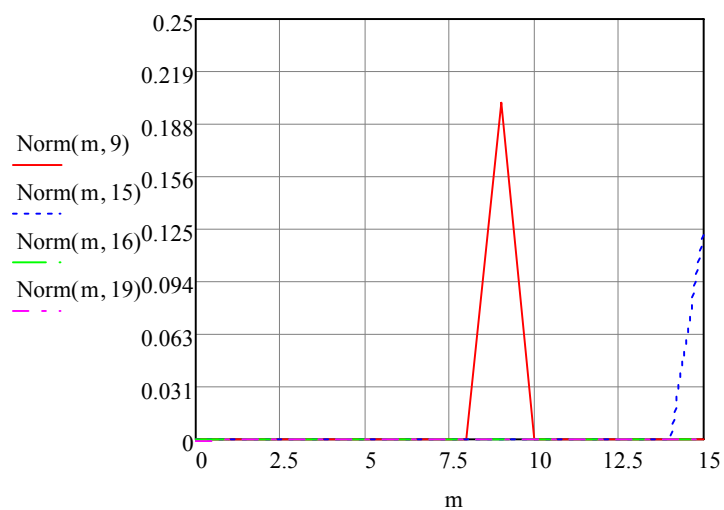
4. Проверить выполняемость 1-ого условия ортогональности.

m := 0..15

$$\text{Norm}(m, n) := \int_a^b P(m, x) \cdot P(n, x) \cdot \mu(x) dx$$

Norm(m, 16) =

1.768·10 <sup>-6</sup>
-1.285·10 <sup>-6</sup>
6.731·10 <sup>-7</sup>
5.008·10 <sup>-8</sup>
3.222·10 <sup>-7</sup>
-1.308·10 <sup>-7</sup>
-4.025·10 <sup>-7</sup>
7.898·10 <sup>-7</sup>
-9.839·10 <sup>-7</sup>
9.833·10 <sup>-7</sup>
-8.235·10 <sup>-7</sup>
5.652·10 <sup>-7</sup>
-2.808·10 <sup>-7</sup>
3.314·10 <sup>-8</sup>
-1.771·10 <sup>-7</sup>
2.112·10 <sup>-7</sup>



1 - ое условие ортогональности выполнено

5. Проверить выполнимость 2 - ого условия ортогональности.

x := 0

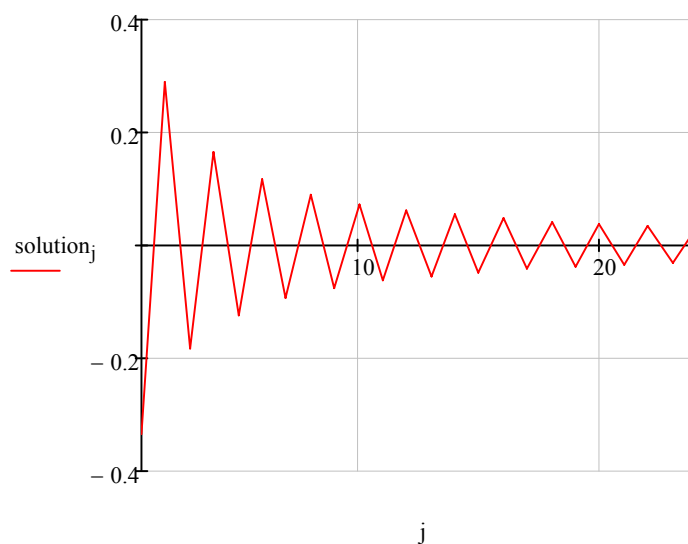
j := 1..25

f(j, x) := P(j, x)

solution<sub>j</sub> := root(f(j, x), x)

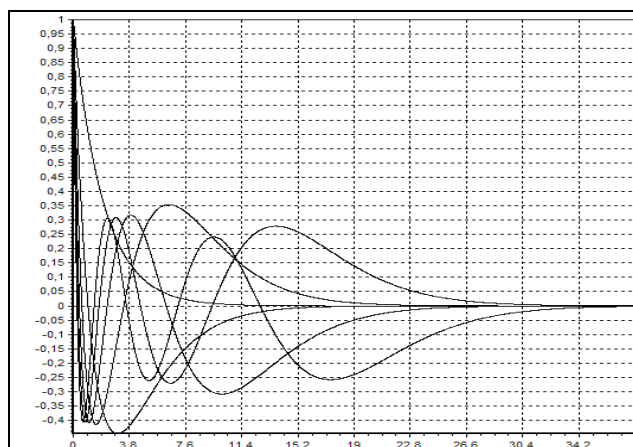
solution<sub>j</sub> =

-0.333
0.29
-0.181
0.167
-0.124
0.117
-0.094
0.09
-0.076
0.073
-0.064
0.062
-0.055
0.053
-0.048
...

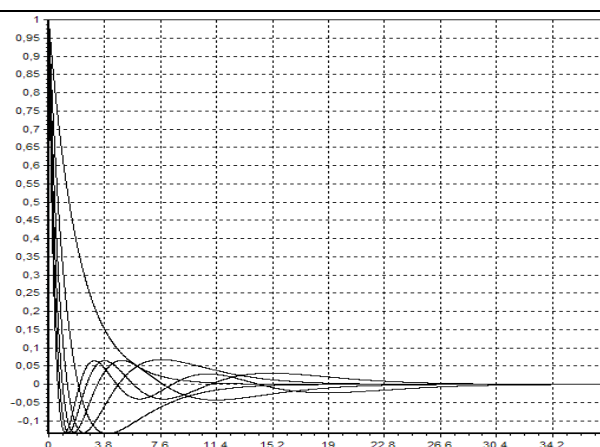


2 - ое условие ортогональности выполнено

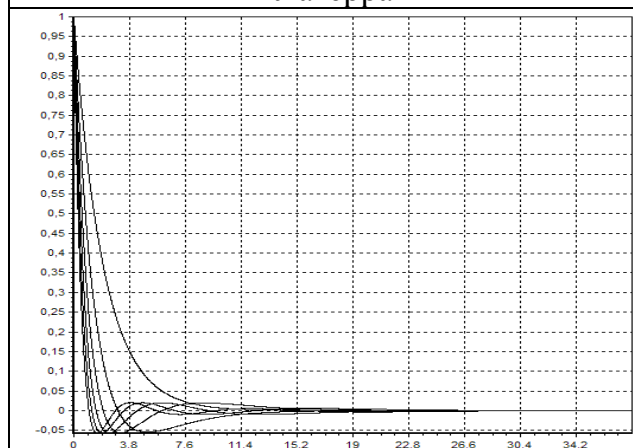
# ВИД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ 0 – 5 ПОРЯДКОВ



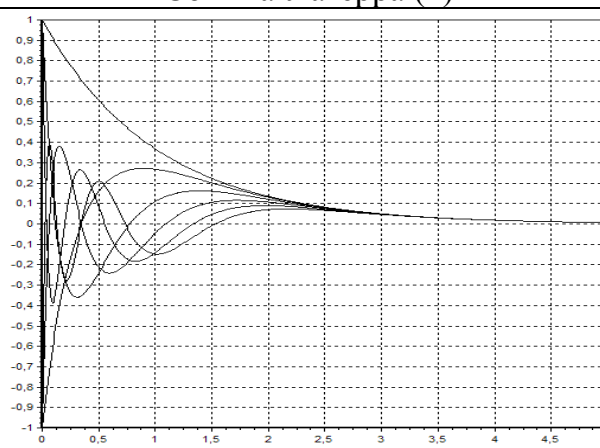
Лагерра



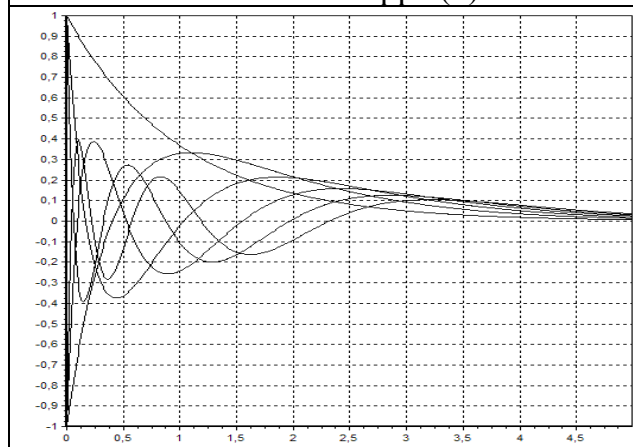
Сонина-Лагерра (1)



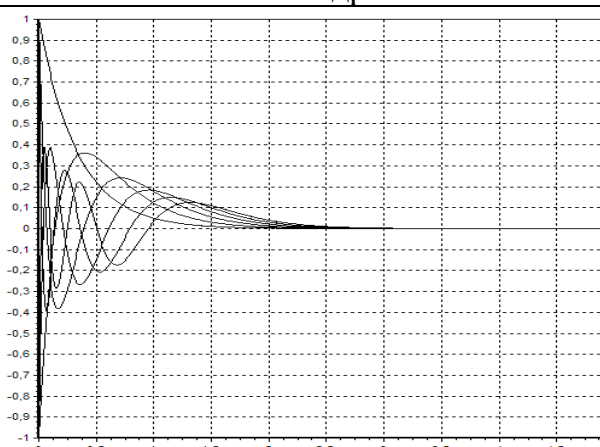
Сонина-Лагерра (2)



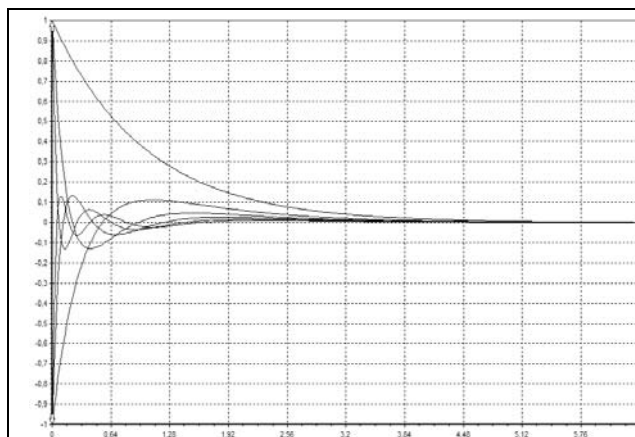
Лежандра



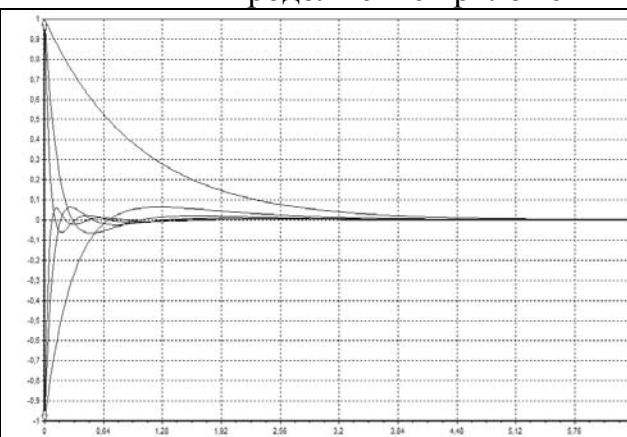
Якоби (1, 0)



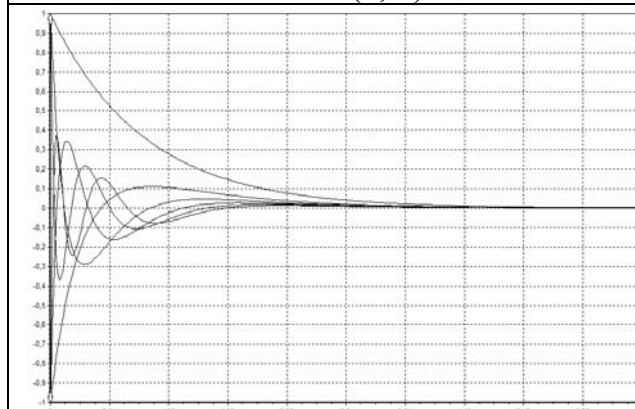
Якоби (2, 0)



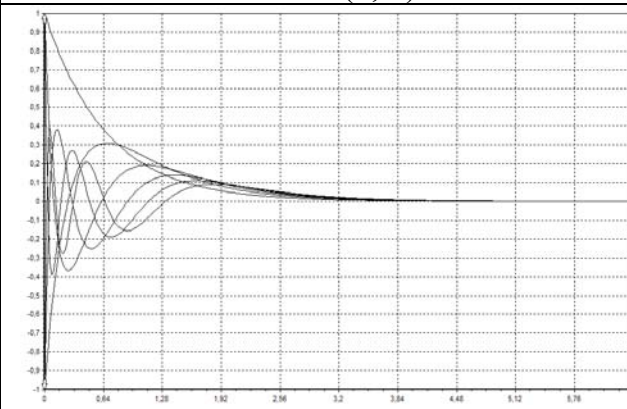
Якоби (0, 1)



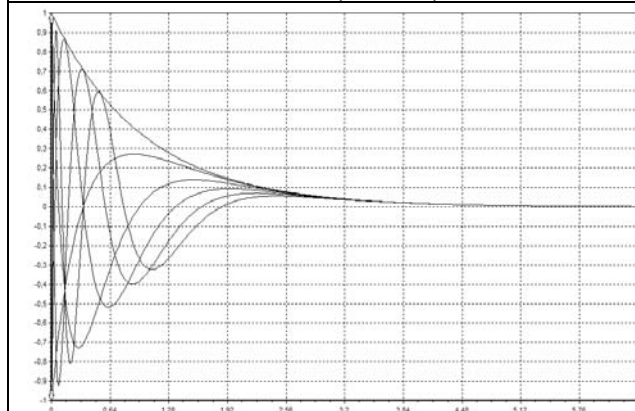
Якоби (0, 2)



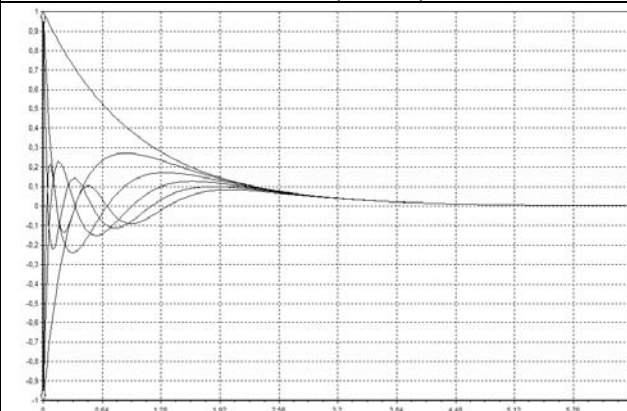
Якоби (-0,5, 0)



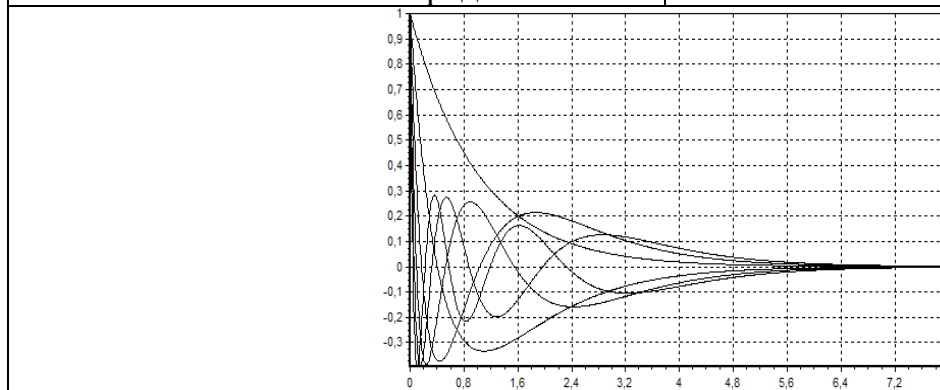
Якоби (0,5, 0)



Чебышева 1-ого рода



Чебышева 2-ого рода



Дирихле

# ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ НАД КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЧИСЕЛ

## Правила действий над коэффициентами

Таблица П 4.1

Правило 1 (снятия коэффициента)
$\underset{w}{Coef} A(w)w^{-k-l} = \underset{w}{Coef} B(w)w^{-k-l}, k = 0, 1, \dots,$ <p>тогда и только тогда, когда</p> $A(w) = B(w)$
Правило 2 (линейности)
$\alpha \cdot \underset{w}{Coef} A(w)w^{-k-l} + \beta \cdot \underset{w}{Coef} B(w)w^{-k-l} = \underset{w}{Coef} (\alpha \cdot A(w) + \beta \cdot B(w))w^{-k-l}$
Правило 3 (замены переменных)
<p>Если <math>z \in R</math>, то</p> $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \underset{w}{Coef} A(w)w^{-k-l} = A(z)$ <p>Соотношение остается справедливым и в случае, когда <math>A(w)</math> - полином, а <math>z = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k w^k, a_m \neq 0</math>, где <math>m</math> - натуральное число.</p>
Правило 4 (обращения)
<p>Если <math>f(w) \in R_0</math>, то</p> $\sum_{k=0}^{\infty} z^k \underset{w}{Coef} A(w)f^k(w)w^{-k-l} = \left[ A(w)(f(w)h'(w))^{-l} \right] \Big _{w=g(z)},$ <p>где <math>h(w) = wf^{-l}(w)</math>, а <math>g(z) \in R</math> - обратный элемент в кольце <math>R</math> к ряду <math>z = h(w) \in R</math>.</p>
Правило 5 (замены переменных под знаком $Coef$ )
<p>Если <math>f(z) \in R_0</math>, то</p> $\underset{w}{Coef} (A(w)f^k(w)w^{-k-l}) = \underset{z}{Coef} \left[ A(w)(f(w)h'(w))^{-l} \right] \Big _{w=g(z)} z^{-k-l}, k = 0, 1, \dots,$ <p>где <math>h(w) = wf^{-l}(w)</math>, а <math>g(z) \in R</math> - обратный элемент в кольце <math>R</math> к ряду <math>z = h(w) \in R</math>.</p>
Правило 6 (разложения в ряд Бюрмана-Лагранжа)
<p>Если <math>g(w) \in R, h(z) = zf^{-l}(z) \in R</math> - обратный элемент в кольце <math>R</math> к ряду <math>g(w)</math>, то</p> $B(z) \Big _{z=g(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k \underset{w}{Coef} B(w)h'(w)f^{k+l}(w)w^{-k-l}$
Правило 7 (дифференцирования)
$k \underset{w}{Coef} A(w)w^{-k-l} = \underset{w}{Coef} A'(w)w^{-k}, k = 0, 1, \dots$

## Правило 8 (интегрирования)

$$\frac{1}{k+1} \underset{w}{\text{Coef}} A(w) w^{-k-1} = \underset{w}{\text{Coef}} \left( \int_0^w A(w) dw \right) w^{-k-2}, k = 0, 1, \dots$$

## Таблица М интегральных представлений чисел

Таблица П 4.2

## 1. Биномиальный коэффициент

Определение и интегральное представление -  $M_1 = M_1(w)$

$$\bullet \quad C_{\alpha}^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, & n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

$$C_{\alpha}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1+w)^{\alpha} w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} (1+w)^{\alpha} w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < 1$$

$$\bullet \quad C_m^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{m!}{n!(m-n)!}, & n = 1, 2, 3, \dots, m \\ 0, & n = -1, -2, -3, \dots, n > m \end{cases}$$

$$C_m^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1+w)^m w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} (1+w)^m w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty$$

Зная, что  $C_m^n = C_m^{m-n}$  используют представление вида

$$C_m^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1+w)^m w^{-m+n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} (1+w)^m w^{-m+n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty$$

$$\bullet \quad C_{-m}^n = (-1)^n C_{m+n-1}^n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$C_{m+n-1}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1-w)^m w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} (1-w)^m w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < 1$$

Зная, что  $C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}$  используют представление вида

$$C_{m+n-1}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1-w)^{-n-1} w^{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} (1-w)^{-n-1} w^{-m} dw \quad 0 < \rho < 1$$

$$\bullet \quad C_{-1/2}^n = 4^{-n} C_{2n}^n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$C_{2n}^n = \underset{w}{\text{Coef}} (1-4w)^{-1/2} w^{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\rho} (1-4w)^{-1/2} w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < 1$$



2. Коэффициенты разложения логарифмической функции - $\ln(1-w)$	
<p>Определение и интегральное представление - <math>M_2 = M_2(w)</math></p> $\left. \begin{array}{l} 0, \quad n=0, \\ \frac{1}{n}, \quad n=1,2,3,\dots \end{array} \right\} = \underset{w}{\text{Coef}}(-\ln(1-w))w^{-n-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} \ln(1-w)w^{-n-1}dw \quad 0 < \rho < 1$	
3. Коэффициенты разложения экспоненциальной функции - $e^{\alpha w}$	
<p>Определение и интегральное представление - <math>M_3 = M_3(w)</math></p> $\frac{\alpha^n}{n!} = \underset{w}{\text{Coef}}(e^{\alpha w} w^{-n-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} e^{\alpha w} w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty, \quad n=0,1,2,\dots$	
4. Числа Эйлера - $E_n$ (обычные), $n=0,1,2,\dots$	
<p>Определение и интегральное представление - <math>M_4 = M_4(w)</math></p> $E_n = n! \underset{w}{\text{Coef}} ch^{-1}(w)w^{-n-1} = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} ch^{-1}(w)w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n=0,1,2,\dots$	
5. Числа Бернулли - $B_n$ , $n=0,1,2,\dots$	
<p>Определение и интегральное представление - <math>M_5 = M_5(w)</math></p> $B_n = n! \underset{w}{\text{Coef}}(e^w - 1)^{-1} w^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (e^w - 1)^{-1} w^{-n} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n=0,1,2,\dots$	
6. Числа Стирлинга 1-ого рода - $s_1(m,n)$ , $n=0,1,2,\dots$	
<p>Определение и интегральное представление - <math>M_6 = M_6(w)</math></p> $(w)_m = \sum_{n=0}^{\infty} s_1(m,n)w^n, \quad s_1(0,0)=1$ $s_1(m,n) = \underset{w}{\text{Coef}}(w)_m w^{-n-1} = \frac{m!}{n!} \underset{w}{\text{Coef}}(\ln(1+w))^n w^{-m-1} = \frac{m!}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (\ln(1+w))^n w^{-m-1} dw \quad 0 < \rho < 1$	
7. Числа Стирлинга 2-ого рода - $s_2(m,n)$ , $n=0,1,2,\dots$	
<p>Определение и интегральное представление - <math>M_7 = M_7(w)</math></p> $w^m = \sum_{n=0}^{\infty} s_2(m,n)(w)_n, \quad s_2(0,0)=1$ $s_2(m,n) = \frac{m!}{n!} \underset{w}{\text{Coef}}(e^w - 1)^n w^{-m-1} = \frac{m!}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (e^w - 1)^n w^{-m-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad m=0,1,2,\dots$	
8. Гамма – функция - $\Gamma(z)$	
<p>Определение и интегральное представление - <math>M_8 = M_8(s)</math></p> $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{z-1} ds, \quad \text{Re } z > 0$ <p>Частный случай</p> $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds \quad n=0,1,2,\dots$	

9. Бета – функция - $B(u, v)$	
Определение и интегральное представление - $M_8 = M_9 = M_9(t)$	
$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt, \quad \operatorname{Re} u > 0, \operatorname{Re} v > 0$	
Частный случай	
$\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = B(n+1, m+1) = \int_0^1 t^n (1-t)^m dt \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$	
10. Обобщенные числа Стирлинга 2-ого рода - $s_2^{(\alpha)}(m, n, k)$ , $n = 0, 1, 2, \dots, k$	
Определение и интегральное представление - $M_{10} = M_{10}(w)$	
$s_2^{(\alpha)}(m, n, k) = \frac{m!}{n!} \operatorname{Coef}_w e^{\alpha w} \frac{(e^{kw} - 1)^n}{w^{m+1}} = \frac{m!}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} e^{\alpha w} (e^{kw} - 1)^n w^{-m-1} dw \quad 0 < \rho < \infty$	
11. Обобщенные числа Бернулли - $B_n^{(m)}$ , $n = 0, 1, 2, \dots$	
Определение и интегральное представление - $M_{11} = M_{11}(w)$	
$B_n^{(m)} = n! \operatorname{Coef}_w (e^w - 1)^{-m} w^{-n+m-1} = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (e^w - 1)^{-m} w^{-n+m-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n = 0, 1, 2, \dots$	
12. Числа Эйлера - $E_n^{(m)}$ $m$ – ого порядка, $n = 0, 1, 2, \dots$	
Определение и интегральное представление - $M_{12} = M_{12}(w)$	
$E_n^{(m)} = n! \operatorname{Coef}_w (chw)^{-m} w^{-n-1} = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{ w =\rho} (chw)^{-m} w^{-n-1} dw \quad 0 < \rho < \infty \quad n = 0, 1, 2, \dots$	
13. Обобщенные числа Эйлера - $A(n, k)$ , $n = 0, 1, 2, \dots$	
Определение и интегральное представление - $M_{13} = M_{13}(w, z)$	
$A(n, k) = n! \operatorname{Coef}_{w, z} \frac{(z-1)^{n+1} dw \wedge dz}{(ze^{-w} - 1)w^{n+1} z^{k+1}} \quad 0 < \rho_1 < \infty, 0 < \rho_2 < 1 \quad n, k = 0, 1, 2, \dots$	

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 2. «ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»

**Цель работы:** исследование свойств ортогональных функций и определение их основных характеристик.

1. Получение ортогональных функций  $k$ -ого порядка:

1.1. Получить ортогональные функции из ортогональных полиномов  $k$ -ого порядка путем введения соответствующей замены. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков:

$$P1(k, x) := \sum_{s=0}^k \left[ \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot \left( \frac{x-1}{2} \right)^s \right] \quad \mu(x) := 1 - x$$

$$x(\tau, \gamma) := 1 - 2e^{-\gamma \cdot \tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau, \gamma) \rightarrow 2 \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma \cdot \tau} \quad \mu(\tau, \gamma) := 1 - x(\tau, \gamma)$$

$$P1(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot \left( \frac{x(\tau, \gamma) - 1}{2} \right)^s \cdot \sqrt{\frac{\frac{d}{d\tau} x(\tau, \gamma)}{2\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{\mu(\tau, \gamma)}{2}} \right]$$

$$\gamma := 1$$

$$P1(0, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow e^{-\tau}$$

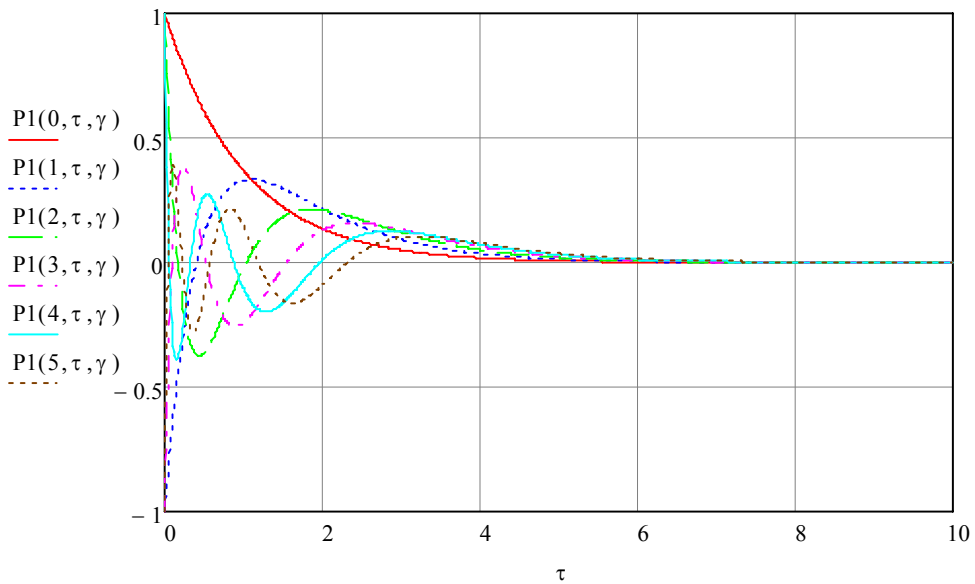
$$P1(1, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 2 \cdot e^{-\tau} - 3 \cdot e^{-2 \cdot \tau}$$

$$P1(2, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 3 \cdot e^{-\tau} - 12 \cdot e^{-2 \cdot \tau} + 10 \cdot e^{-3 \cdot \tau}$$

$$P1(3, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 4 \cdot e^{-\tau} - 30 \cdot e^{-2 \cdot \tau} + 60 \cdot e^{-3 \cdot \tau} - 35 \cdot e^{-4 \cdot \tau}$$

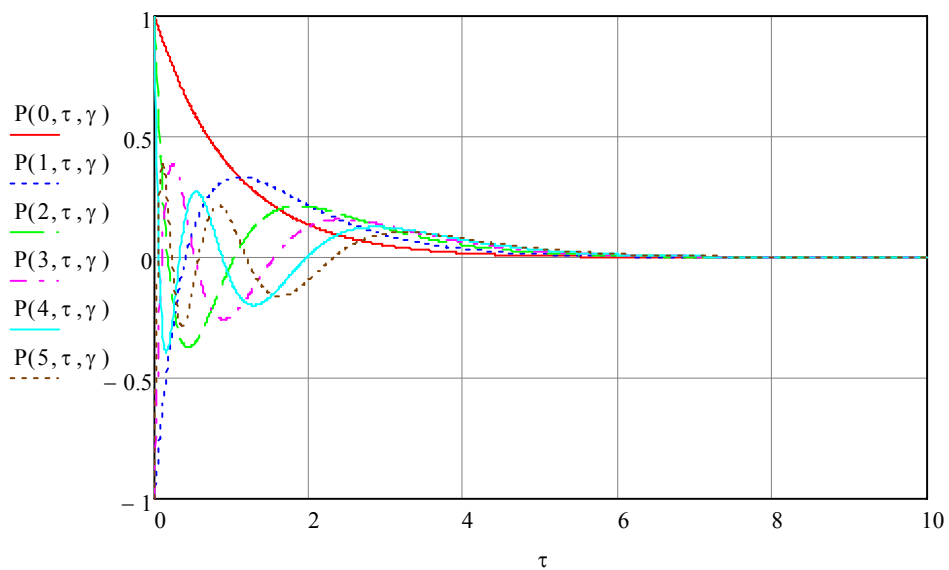
$$P_1(4, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 5 \cdot e^{-\tau} - 60 \cdot e^{-2 \cdot \tau} + 210 \cdot e^{-3 \cdot \tau} - 280 \cdot e^{-4 \cdot \tau} + 126 \cdot e^{-5 \cdot \tau}$$

$$P_1(5, \tau, \gamma) \text{ simplify } \rightarrow 6 \cdot e^{-\tau} - 105 \cdot e^{-2 \cdot \tau} + 560 \cdot e^{-3 \cdot \tau} - 1260 \cdot e^{-4 \cdot \tau} + 1260 \cdot e^{-5 \cdot \tau} - 462 \cdot e^{-6 \cdot \tau}$$



1.2. Получить ортогональные функции, используя представление, приведенное в таблице. Найти аналитические выражения и графики для первых шести порядков:

$$P(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \gamma \cdot \tau} \right]$$



2. Рассчитать значения ортогональных функций k-ого порядка в "нуле".

k := 0.. 5

P(k, 0, γ)

1
-1
1
-1
1
-1

3. Определение нормы ортогональных функций:

3.1. Определить значение нормы ортогональных функций из выражения (2.3) (см. содержание лабораторной работы). Результат представить в виде матрицы значений с разрядностью (k,m), Привести графическую интерпретацию.

k := 6

i := 0.. k - 1

m := k

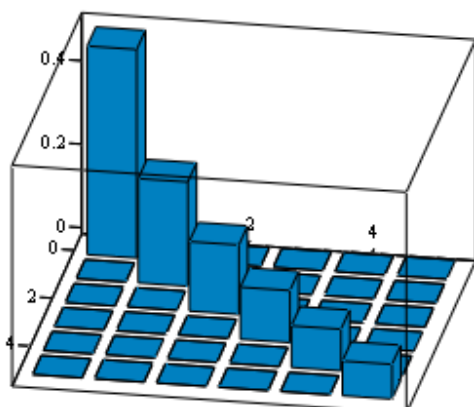
μ(τ, γ) := 1

j := 0.. m - 1

$$\text{NormP}(i, j) := \int_0^{\infty} P(i, \tau, \gamma) P(j, \tau, \gamma) \cdot \mu(\tau, \gamma) d\tau$$

NormMP := matrix(k, m, NormP)

$$\text{NormMP} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 \\ -0 & 0.25 & -0 & -0 & -0 & -0 \\ -0 & -0 & 0.167 & -0 & -0 & -0 \\ -0 & -0 & -0 & 0.125 & -0 & -0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 & 0.1 & -0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & 0.083 \end{pmatrix}$$



NormMP

3.2. Определить значения нормы ортогональных функций  $k$ -ого порядка, используя выражение, приведенное в таблице 2.1 (см. содержание лабораторной работы). Результат представить в виде вектора значений.

$$\text{NormPT}_i := \frac{1}{2\gamma(i+1)}$$

NormPT<sub>1</sub> =

0.5
0.25
0.167
0.125
0.1
0.083

4. Рассчитать длительность, используя выражения (2.5) и (2.6) (см. содержание лабораторной работы). Построить графическую зависимость длительности ортогональной функции  $k$ -ого порядка от параметра масштаба.

$$k := 0..5$$

$$\text{tau2}(k,\gamma) := \int_0^\infty P(k,\tau,\gamma) \, d\tau$$

$$\text{tau4}(k,\gamma) := \int_0^\infty P(k,\tau,\gamma)^2 \, d\tau$$

$$\text{tau2}(k,\gamma) =$$

1
0.5
0.333
0.25
0.2
0.167

$$\text{tau4}(k,\gamma) =$$

0.5
0.25
0.167
0.125
0.1
0.083

$$\gamma1 := 0.1, 0.1 + 0.1..2$$

$$i := 0..20$$

$$\text{tau2V0}_i := \text{tau2}(0, i \cdot 0.1 + 0.1)$$

$$\text{tau2V2}_i := \text{tau2}(2, i \cdot 0.1 + 0.1)$$

$$\text{tau2V4}_i := \text{tau2}(4, i \cdot 0.1 + 0.1)$$

$$\text{tau2V1}_i := \text{tau2}(1, i \cdot 0.1 + 0.1)$$

$$\text{tau2V3}_i := \text{tau2}(3, i \cdot 0.1 + 0.1)$$

$$\text{tau2V5}_i := \text{tau2}(5, i \cdot 0.1 + 0.1)$$

$$\text{tau2M}^{\langle 0 \rangle} := \text{tau2V0}$$

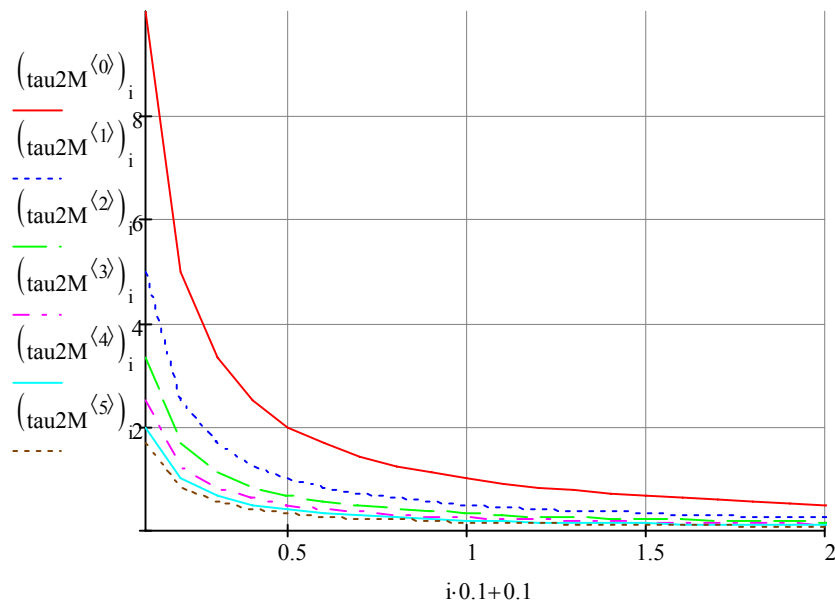
$$\text{tau2M}^{\langle 2 \rangle} := \text{tau2V2}$$

$$\text{tau2M}^{\langle 4 \rangle} := \text{tau2V4}$$

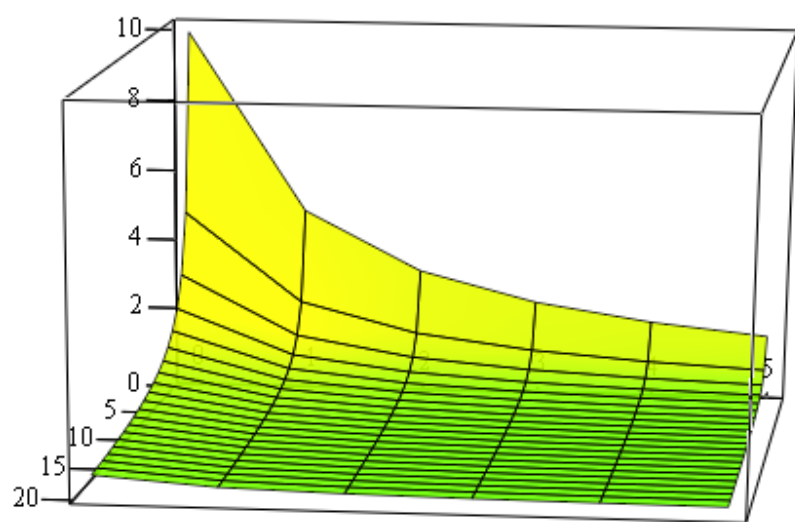
$$\text{tau2M}^{\langle 1 \rangle} := \text{tau2V1}$$

$$\text{tau2M}^{\langle 3 \rangle} := \text{tau2V3}$$

$$\text{tau2M}^{\langle 5 \rangle} := \text{tau2V5}$$



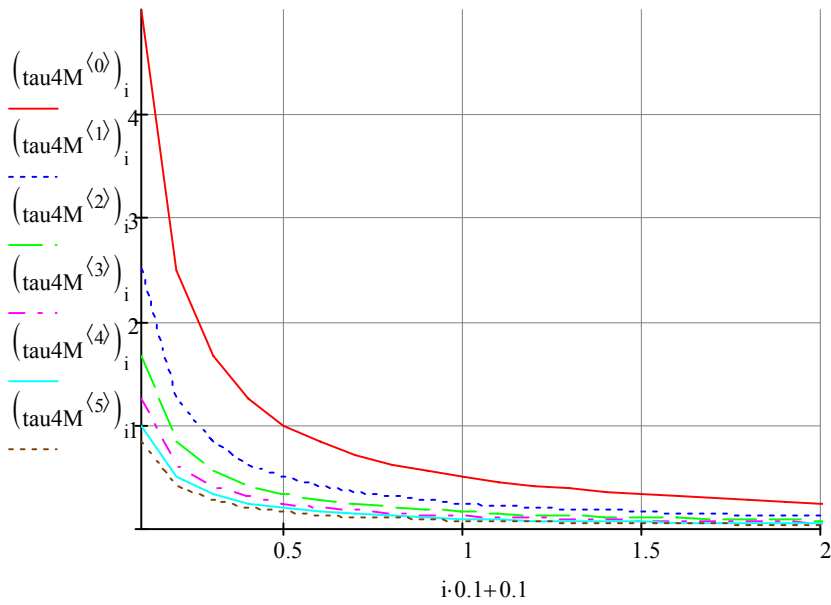
	0	1	2	3	4	5
0	10	5	3.333	2.5	2	1.667
1	5	2.5	1.667	1.25	1	0.833
2	3.333	1.667	1.111	0.833	0.667	0.556
3	2.5	1.25	0.833	0.625	0.5	0.417
4	2	1	0.667	0.5	0.4	0.333
5	1.667	0.833	0.556	0.417	0.333	0.278
6	1.429	0.714	0.476	0.357	0.286	0.238
tau2M = 7	1.25	0.625	0.417	0.313	0.25	0.208
8	1.111	0.556	0.37	0.278	0.222	0.185
9	1	0.5	0.333	0.25	0.2	0.167
10	0.909	0.455	0.303	0.227	0.182	0.152
11	0.833	0.417	0.278	0.208	0.167	0.139
12	0.769	0.385	0.256	0.192	0.154	0.128
13	0.714	0.357	0.238	0.179	0.143	0.119
14	0.667	0.333	0.222	0.167	0.133	0.111
15	0.625	0.312	0.208	0.156	0.125	...



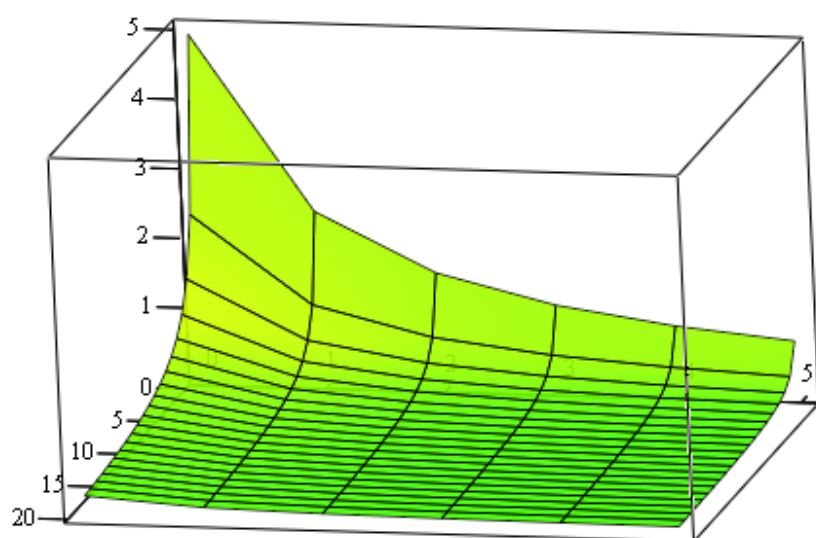
tau2M



$\text{tau4V0}_1 := \text{tau4}(0, i \cdot 0.1 + 0.1)$        $\text{tau4V2}_1 := \text{tau4}(2, i \cdot 0.1 + 0.1)$        $\text{tau4V4}_1 := \text{tau4}(4, i \cdot 0.1 + 0.1)$   
 $\text{tau4V1}_1 := \text{tau4}(1, i \cdot 0.1 + 0.1)$        $\text{tau4V3}_1 := \text{tau4}(3, i \cdot 0.1 + 0.1)$        $\text{tau4V5}_1 := \text{tau4}(5, i \cdot 0.1 + 0.1)$   
 $\text{tau4M}^{\langle 0 \rangle} := \text{tau4V0}$        $\text{tau4M}^{\langle 2 \rangle} := \text{tau4V2}$        $\text{tau4M}^{\langle 4 \rangle} := \text{tau4V4}$   
 $\text{tau4M}^{\langle 1 \rangle} := \text{tau4V1}$        $\text{tau4M}^{\langle 3 \rangle} := \text{tau4V3}$        $\text{tau4M}^{\langle 5 \rangle} := \text{tau4V5}$



	0	1	2	3	4	5
0	5	2.5	1.667	1.25	1	0.833
1	2.5	1.25	0.833	0.625	0.5	0.417
2	1.667	0.833	0.556	0.417	0.333	0.278
3	1.25	0.625	0.417	0.313	0.25	0.208
4	1	0.5	0.333	0.25	0.2	0.167
5	0.833	0.417	0.278	0.208	0.167	0.139
6	0.714	0.357	0.238	0.179	0.143	0.119
7	0.625	0.313	0.208	0.156	0.125	0.104
8	0.556	0.278	0.185	0.139	0.111	0.093
9	0.5	0.25	0.167	0.125	0.1	0.083
10	0.455	0.227	0.152	0.114	0.091	0.076
11	0.417	0.208	0.139	0.104	0.083	0.069
12	0.385	0.192	0.128	0.096	0.077	0.064
13	0.357	0.179	0.119	0.089	0.071	0.06
14	0.333	0.167	0.111	0.083	0.067	0.056
15	0.312	0.156	0.104	0.078	0.063	...



tau4M

# **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 3. «ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ И ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»**

**Цель работы:** изучение методов и приобретение навыков в определении максимальной длительности и интервала дискретизации ортогональных функций.

1. Задать вид ортогональных функций.

$$P(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)! \cdot s!} \cdot \frac{(k+s+1)!}{k! \cdot (s+1)!} \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \gamma \cdot \tau}$$

2. Задать порядок ортогональных функций.

k :=

3. Задать значение параметра масштаба.

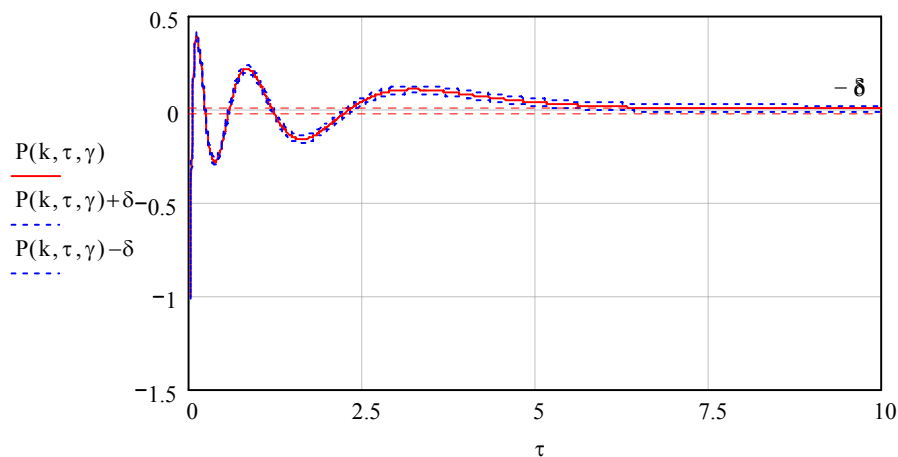
$\gamma := 1$

4. Задать погрешность приближения.

$\delta n :=$

$$\delta := \begin{cases} 0.02 & \text{if } \delta n = 1 \\ 0.05 & \text{if } \delta n = 2 \\ 0.1 & \text{if } \delta n = 3 \end{cases}$$

5. Построить график ортогональной функции.



6. Определить максимальный интервал корреляции на основании графика.

$$\tau_1 := 10$$

Given

$$P(k, \tau_1, \gamma) = \delta$$

$$\text{Find}(\tau_1) = 5.641$$

7. Получить на основании общей формулы частные формулы ортогональной функции, ее первой, второй и третьей производной.

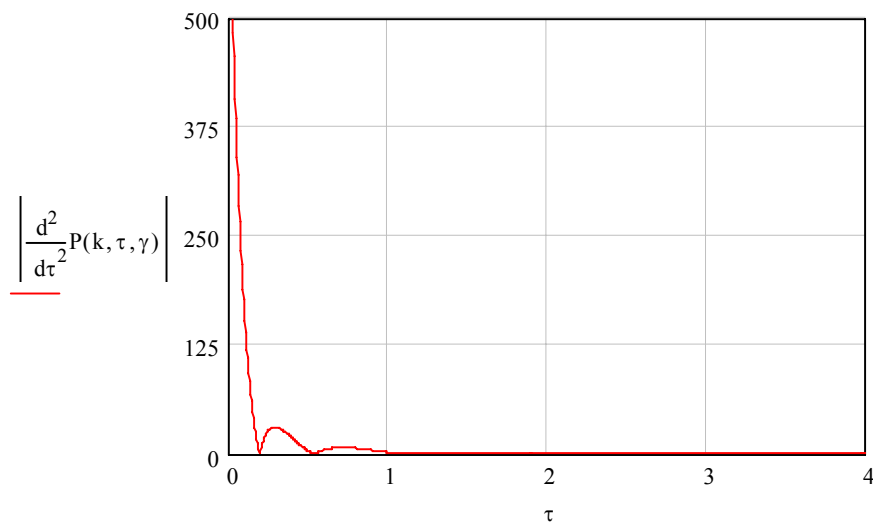
$$P(k, \tau, \gamma) \rightarrow 6 \cdot \exp(-\tau) - 105 \exp(-2 \cdot \tau) + 560 \exp(-3 \cdot \tau) - 1260 \exp(-4 \cdot \tau) + 1260 \exp(-5 \cdot \tau) - 462 \exp(-6 \cdot \tau)$$

$$\frac{d}{d\tau} P(k, \tau, \gamma) \rightarrow -6 \cdot \exp(-\tau) + 210 \exp(-2 \cdot \tau) - 1680 \exp(-3 \cdot \tau) + 5040 \exp(-4 \cdot \tau) - 6300 \exp(-5 \cdot \tau) + 2772 \exp(-6 \cdot \tau)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} P(k, \tau, \gamma) \rightarrow 6 \cdot \exp(-\tau) - 420 \exp(-2 \cdot \tau) + 5040 \exp(-3 \cdot \tau) - 20160 \exp(-4 \cdot \tau) + 31500 \exp(-5 \cdot \tau) - 16632 \exp(-6 \cdot \tau)$$

$$\frac{d^3}{d\tau^3} P(k, \tau, \gamma) \rightarrow -6 \cdot \exp(-\tau) + 840 \exp(-2 \cdot \tau) - 15120 \exp(-3 \cdot \tau) + 80640 \exp(-4 \cdot \tau) - 157500 \exp(-5 \cdot \tau) + 99792 \exp(-6 \cdot \tau)$$

8. Вычислить максимум второй производной.



$$fder(\tau) := \left| \frac{d^2}{d\tau^2} P(k, \tau, \gamma) \right|$$

$$\tau := 25$$

$$\text{Maximize}(fder, \tau) = 0$$

$$fder(\text{Maximize}(fder, \tau)) = 666$$

9. Вычислить интервал дискретизации для ортогональной функции.

$$\Delta t := \sqrt{\frac{8 \cdot \delta}{|fder(\text{Maximize}(fder, \tau))|}}$$

$$\Delta t = 0.015$$

10. Определить максимальную длительность ортогональной функции (см. п.6).

$$\tau_{\max} := 5.641$$

11. Вычислить количество интервалов дискретизации.

$$n := \text{trunc}\left(\frac{\tau_{\max}}{\Delta t} + 0.5\right)$$

$$n = 364$$

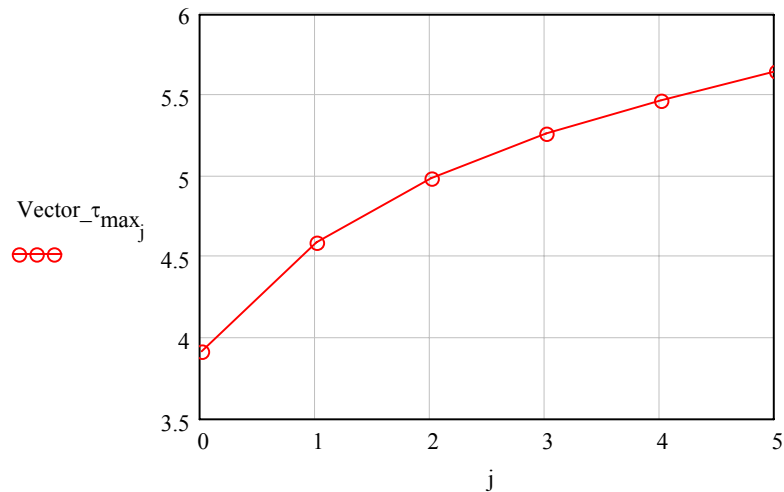
12. Занести полученные значения в таблицу (Microsoft Word, Microsoft Excel).

13 - 15. Выполнить аналогично 1-12.

16. Построить зависимость максимального интервала корреляции от порядка при заданном параметре масштаба.

При параметре масштаба  $\gamma = 1$ ,  $k = 0..5$ .

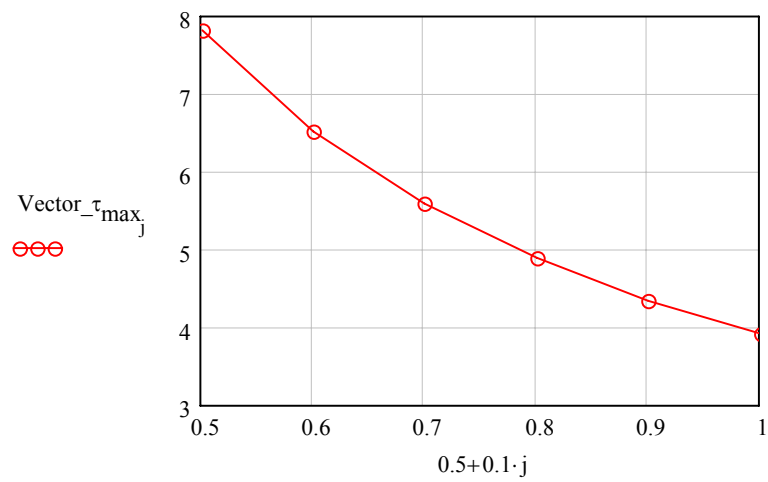
$$\text{Vector}_{\tau_{\max}} := \begin{pmatrix} 3.912 \\ 4.59 \\ 4.983 \\ 5.259 \\ 5.47 \\ 5.641 \end{pmatrix} \quad j := 0..5$$



17. Построить зависимость максимального интервала корреляции от параметра масштаба при заданном порядке ортогональной функции.

При заданном порядке  $k = 0$ ,  $\gamma = 0.5, 0.5+0.1..1$ .

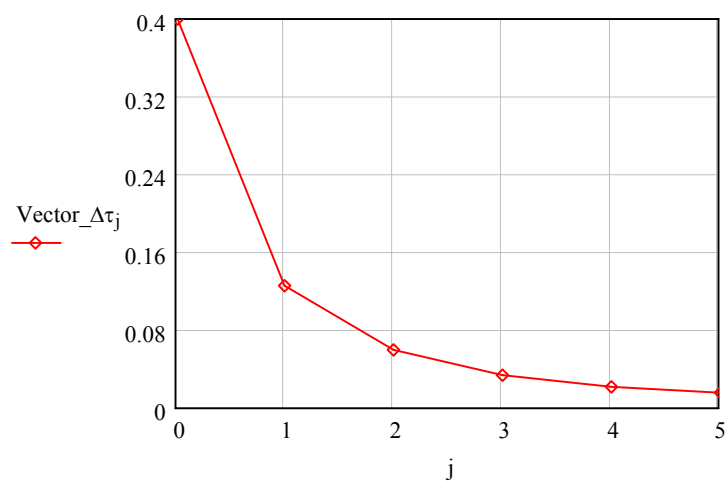
$$\text{Vector}_{\tau_{\max}} := \begin{pmatrix} 7.824 \\ 6.52 \\ 5.589 \\ 4.89 \\ 4.347 \\ 3.912 \end{pmatrix} \quad \varepsilon := 0.5, 0.5 + 0.1..1$$



18. Построить зависимость интервала дискретизации от порядка функции при заданном параметре масштаба.

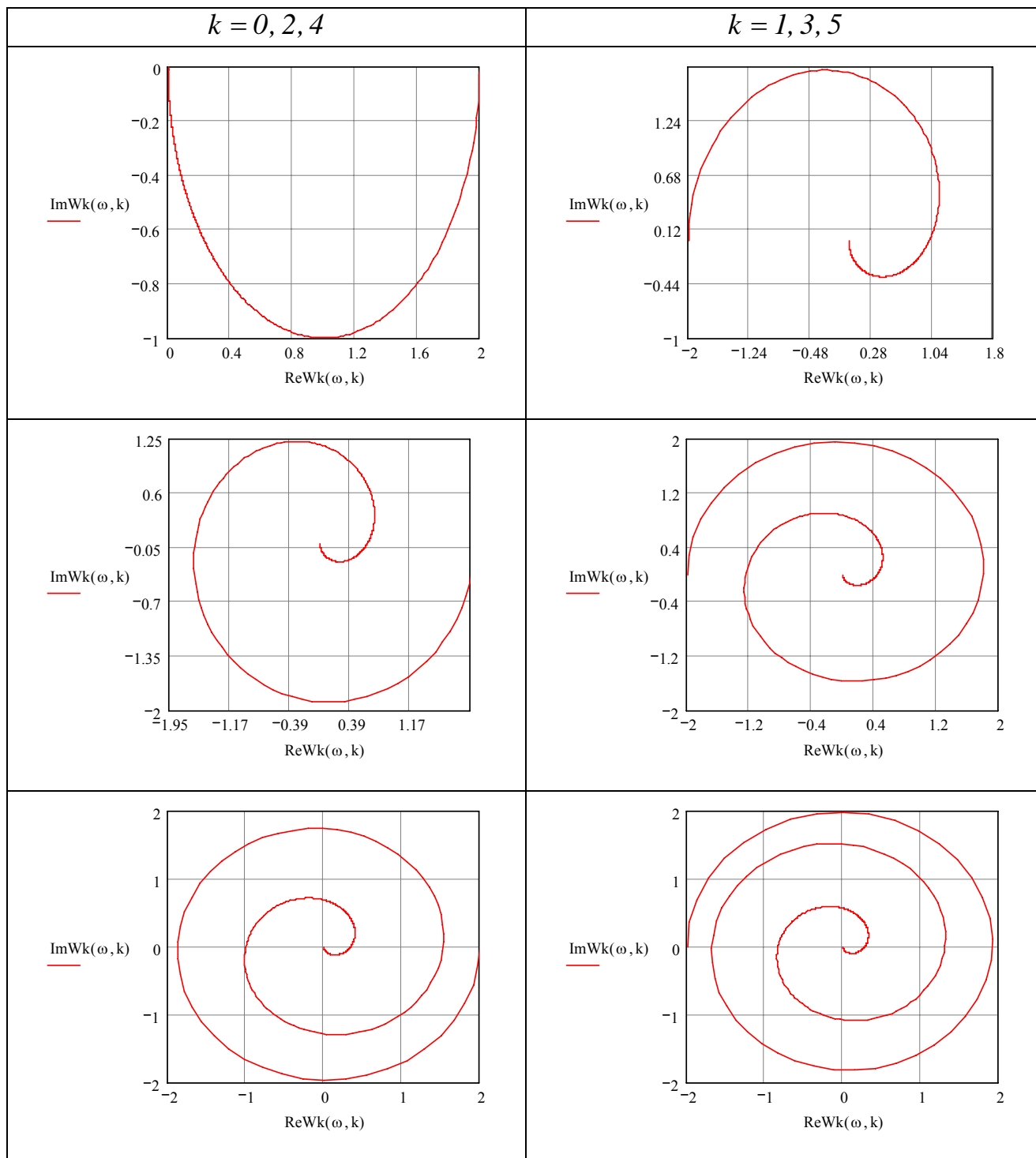
При параметре масштаба  $\gamma = 1$ ,  $k = 0.5$ .

$$\text{Vector}_{\Delta\tau} := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.126 \\ 0.06 \\ 0.034 \\ 0.022 \\ 0.015 \end{pmatrix}$$



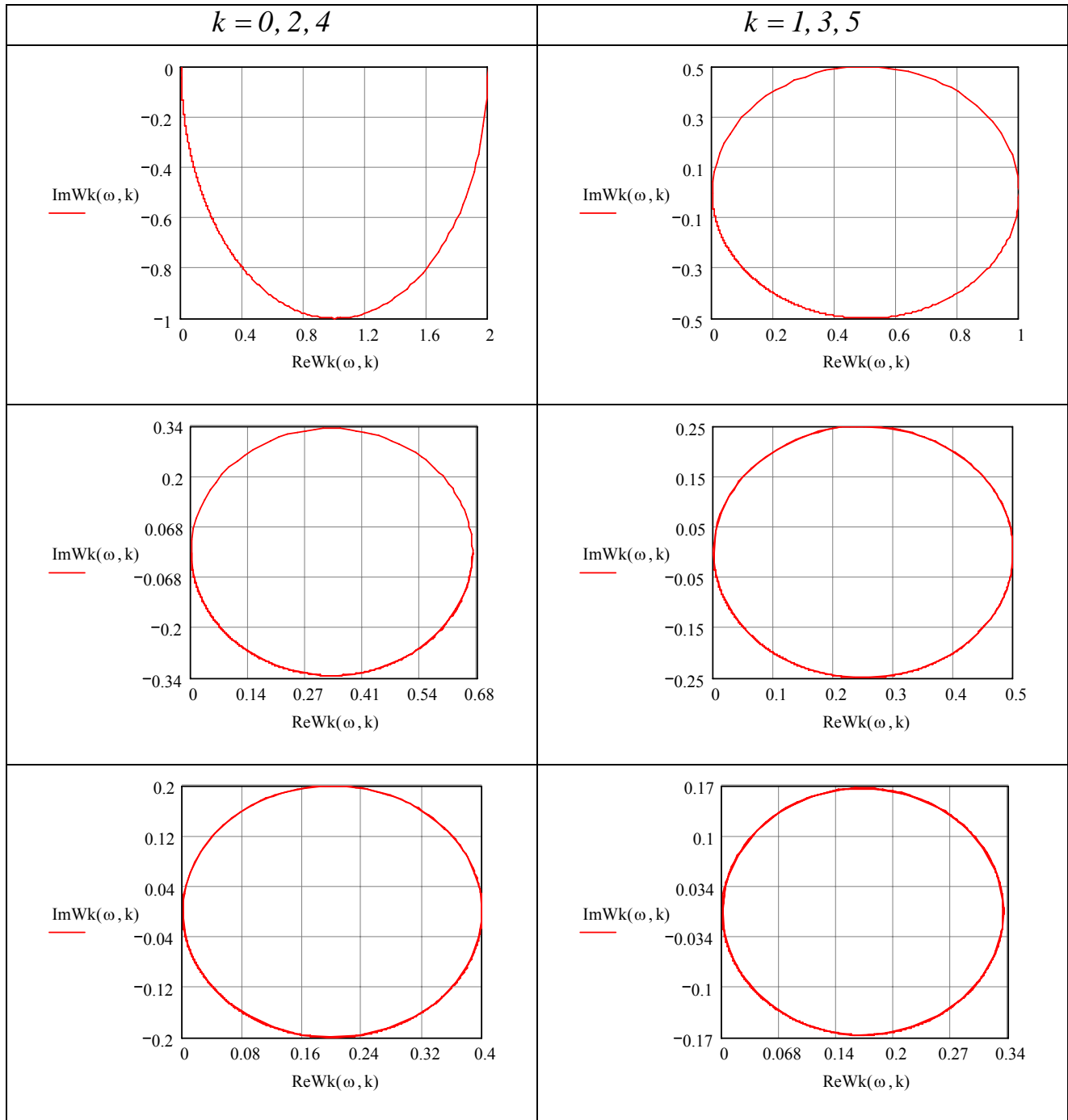
# ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Частотные характеристики ортогональных функций Лагерра

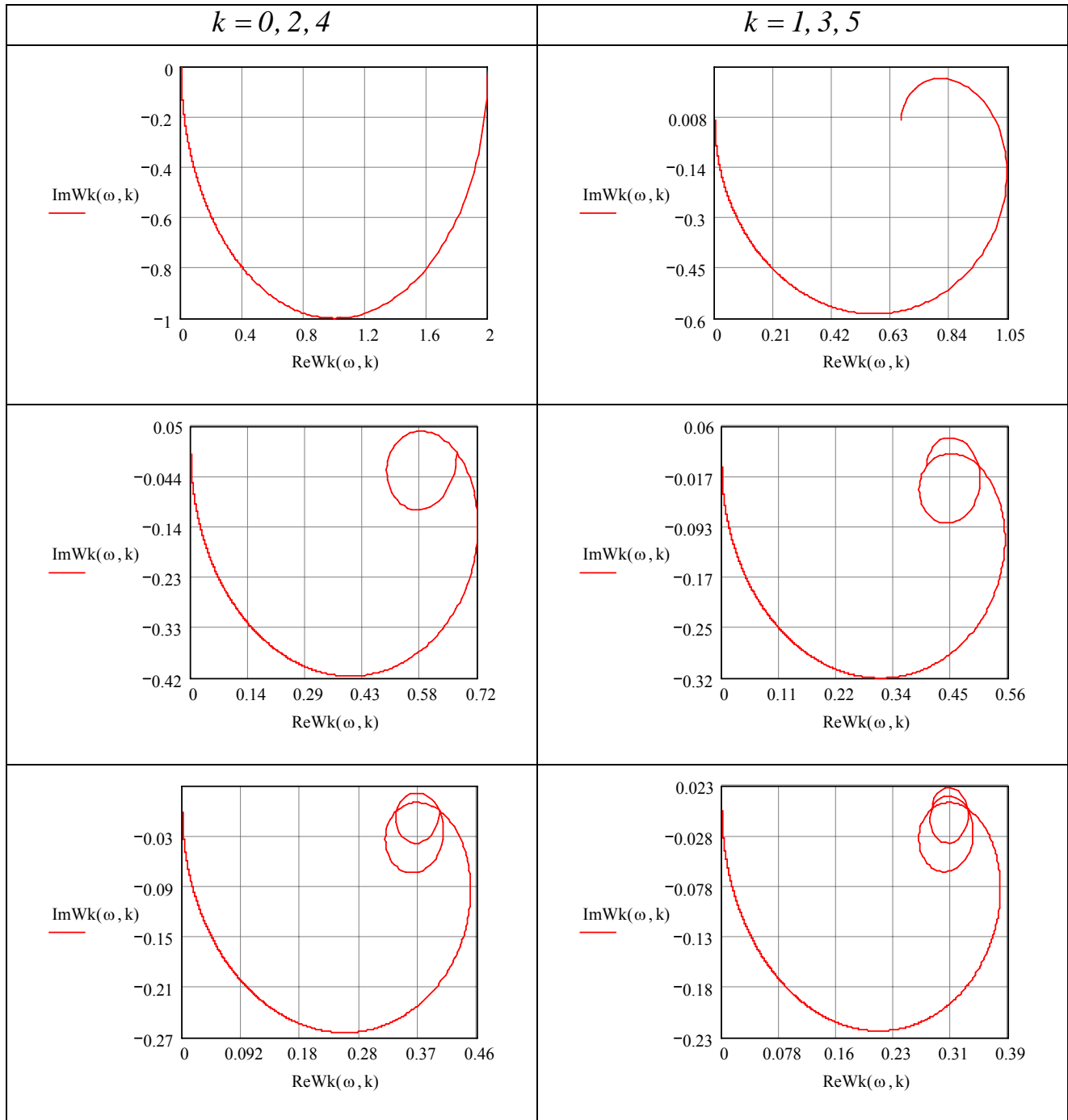




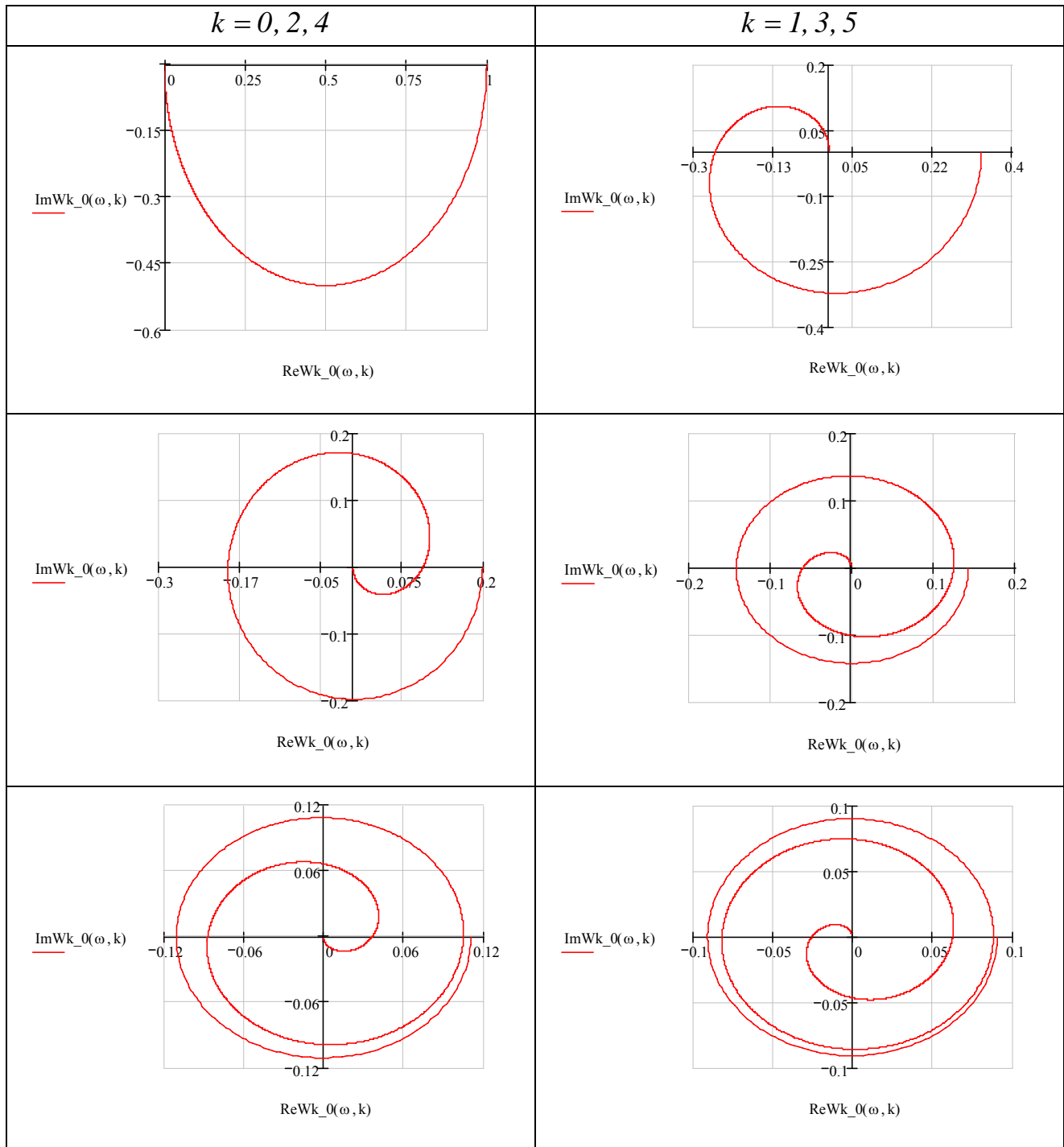
Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра ( $\alpha = 1$ )



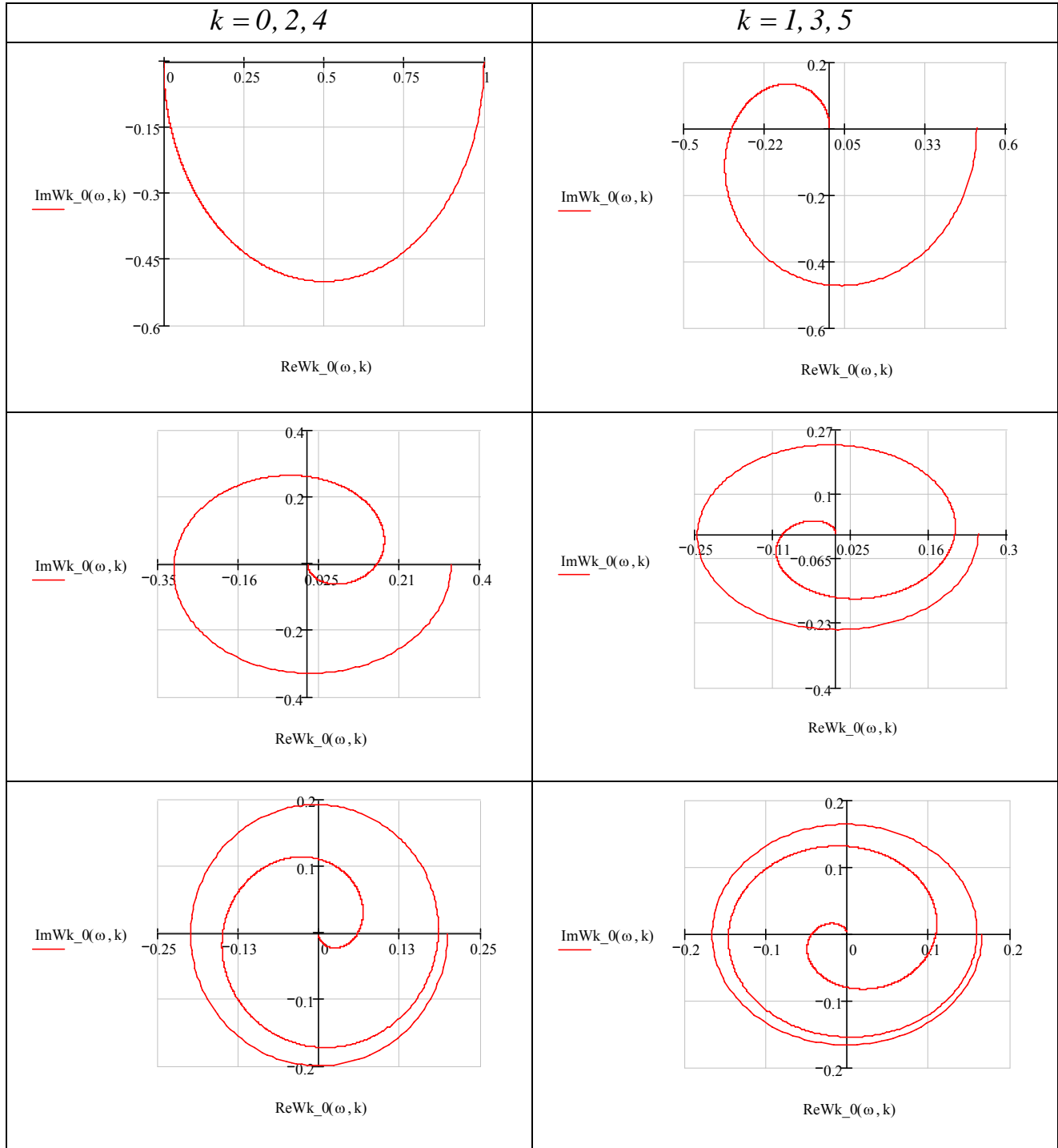
Частотные характеристики ортогональных функций Сонина-Лагерра ( $\alpha = 2$ )



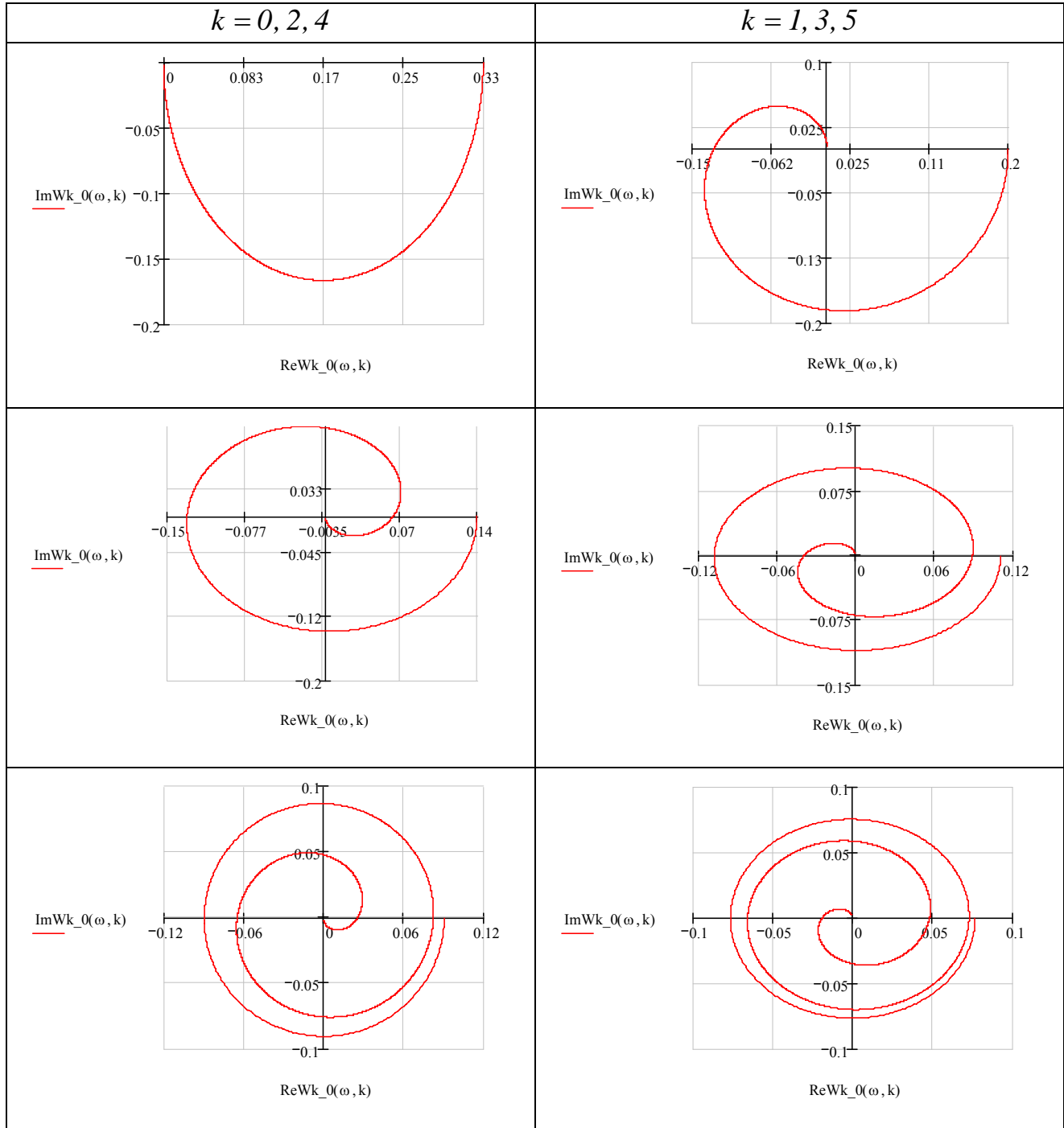
Частотные характеристики ортогональных функций Лежандра



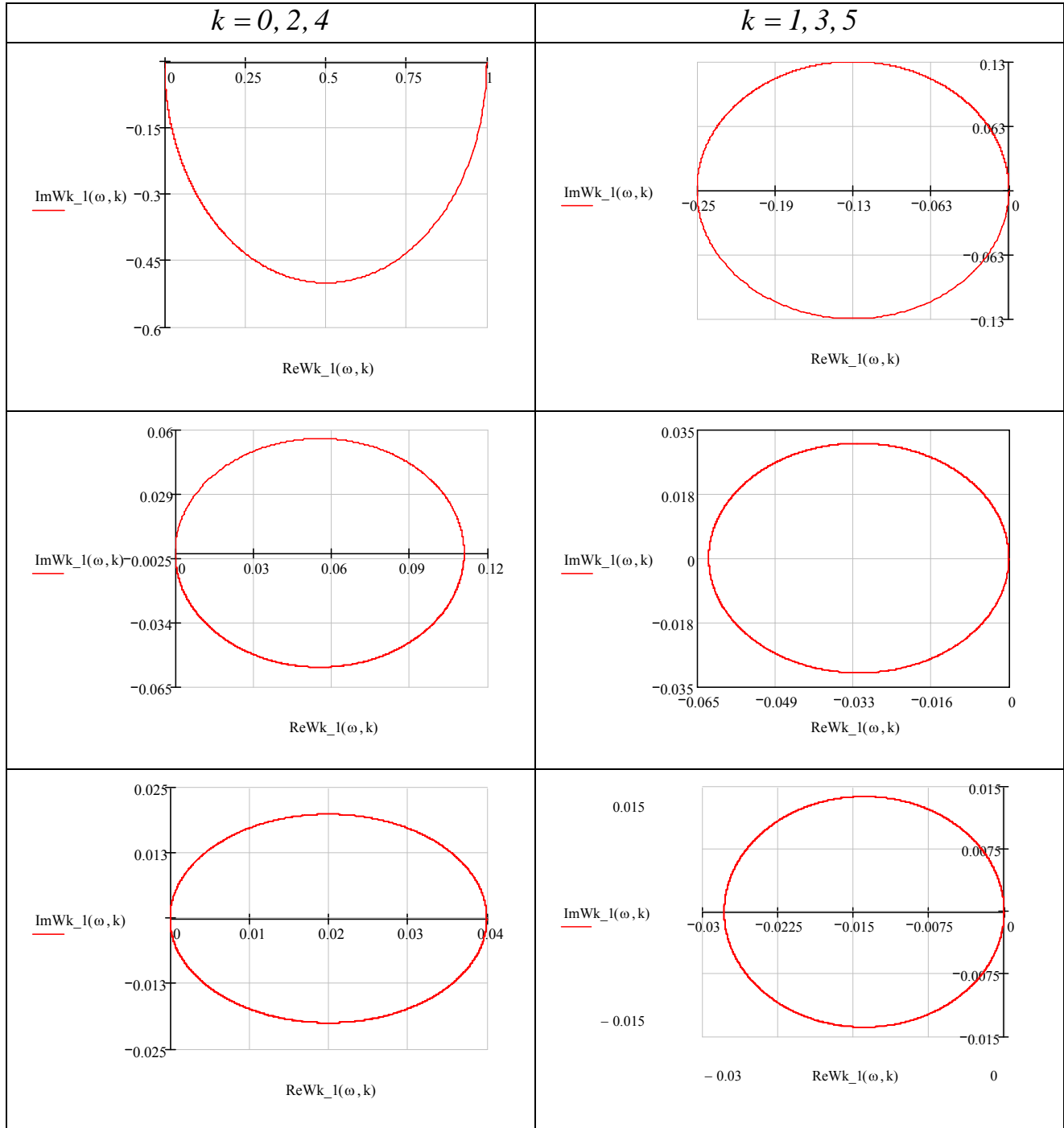
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )



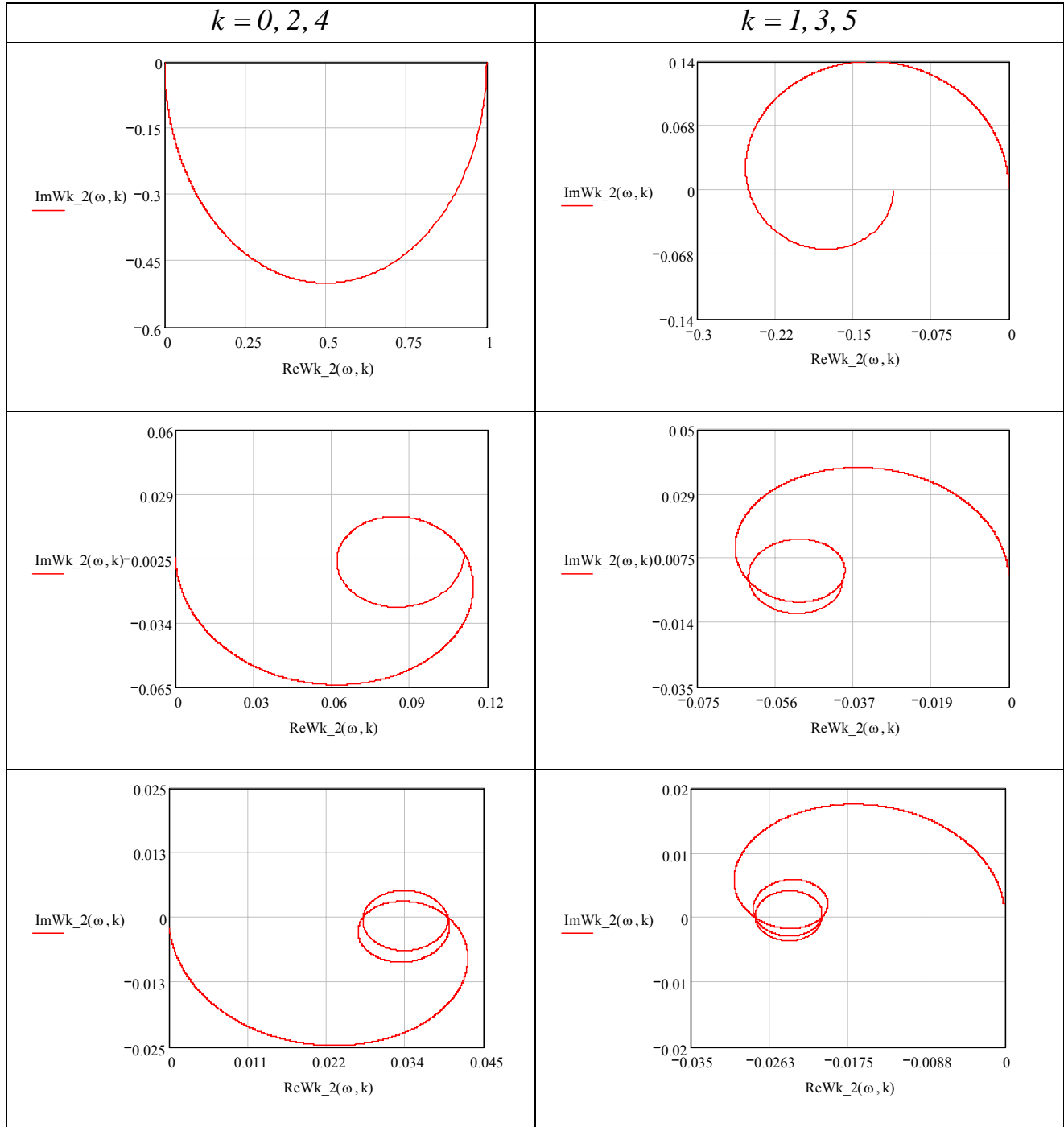
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 2, \beta = 0$ )



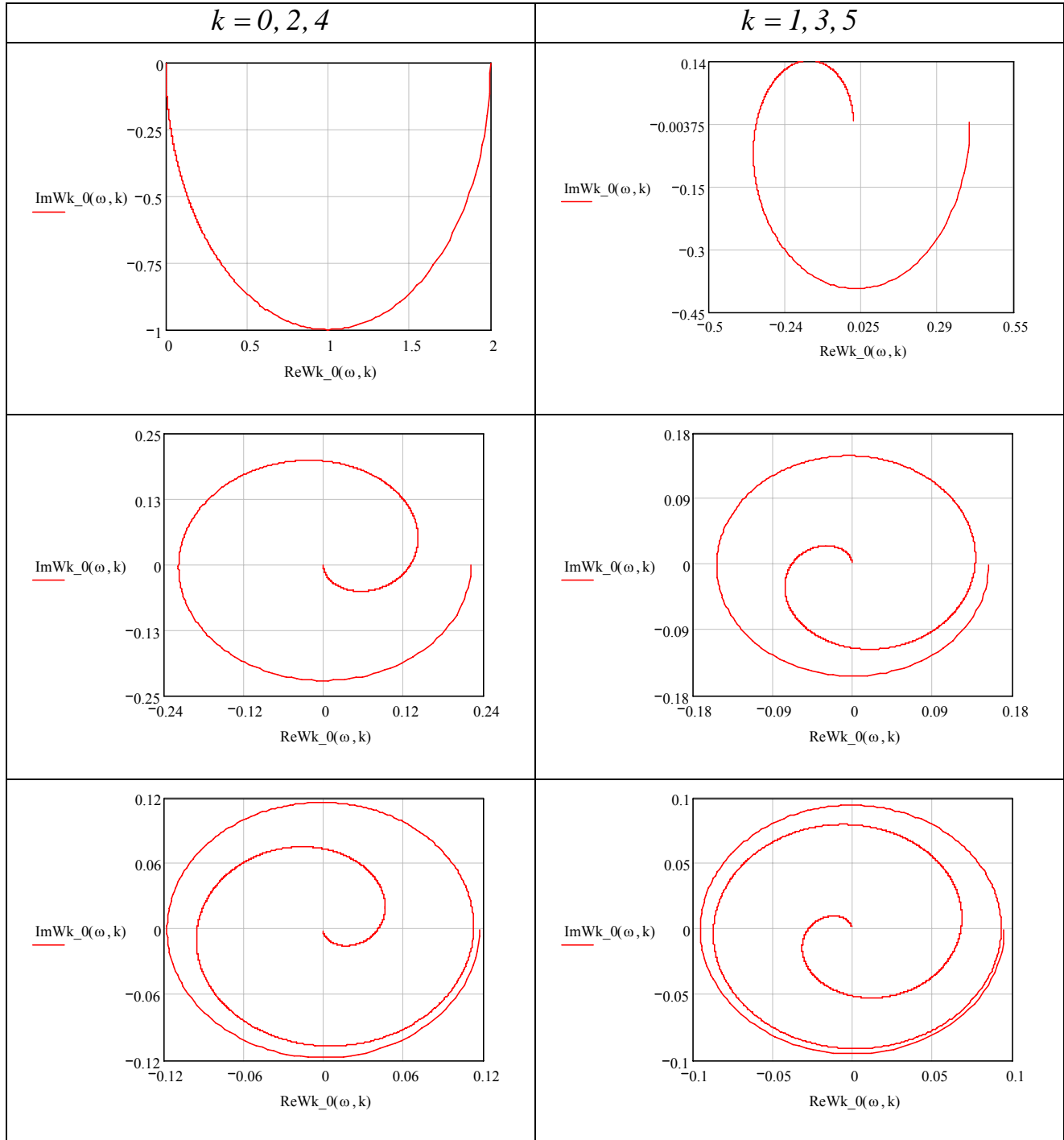
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 1$ )



Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 2$ )

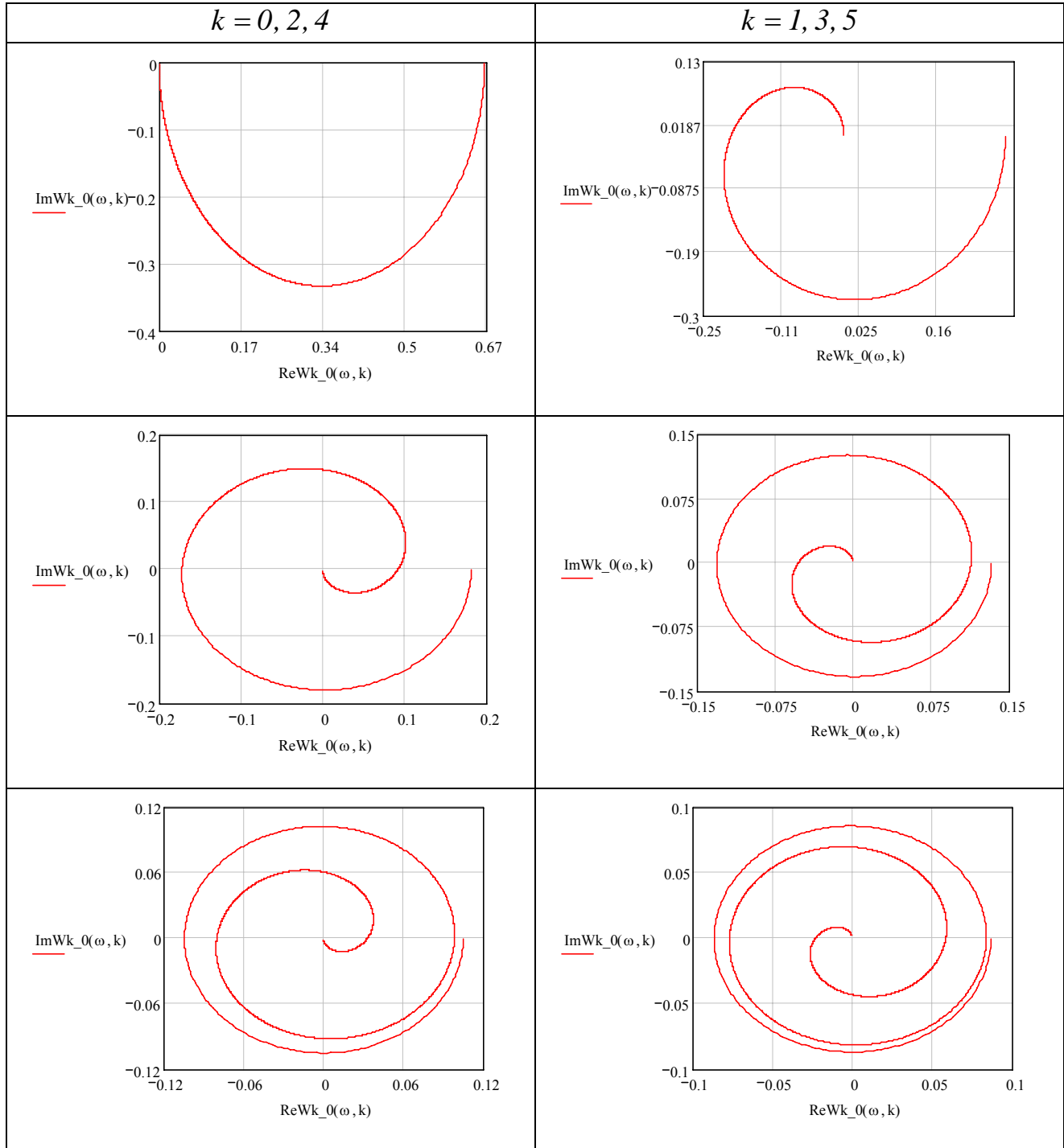


Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = -0,5, \beta = 0$ )

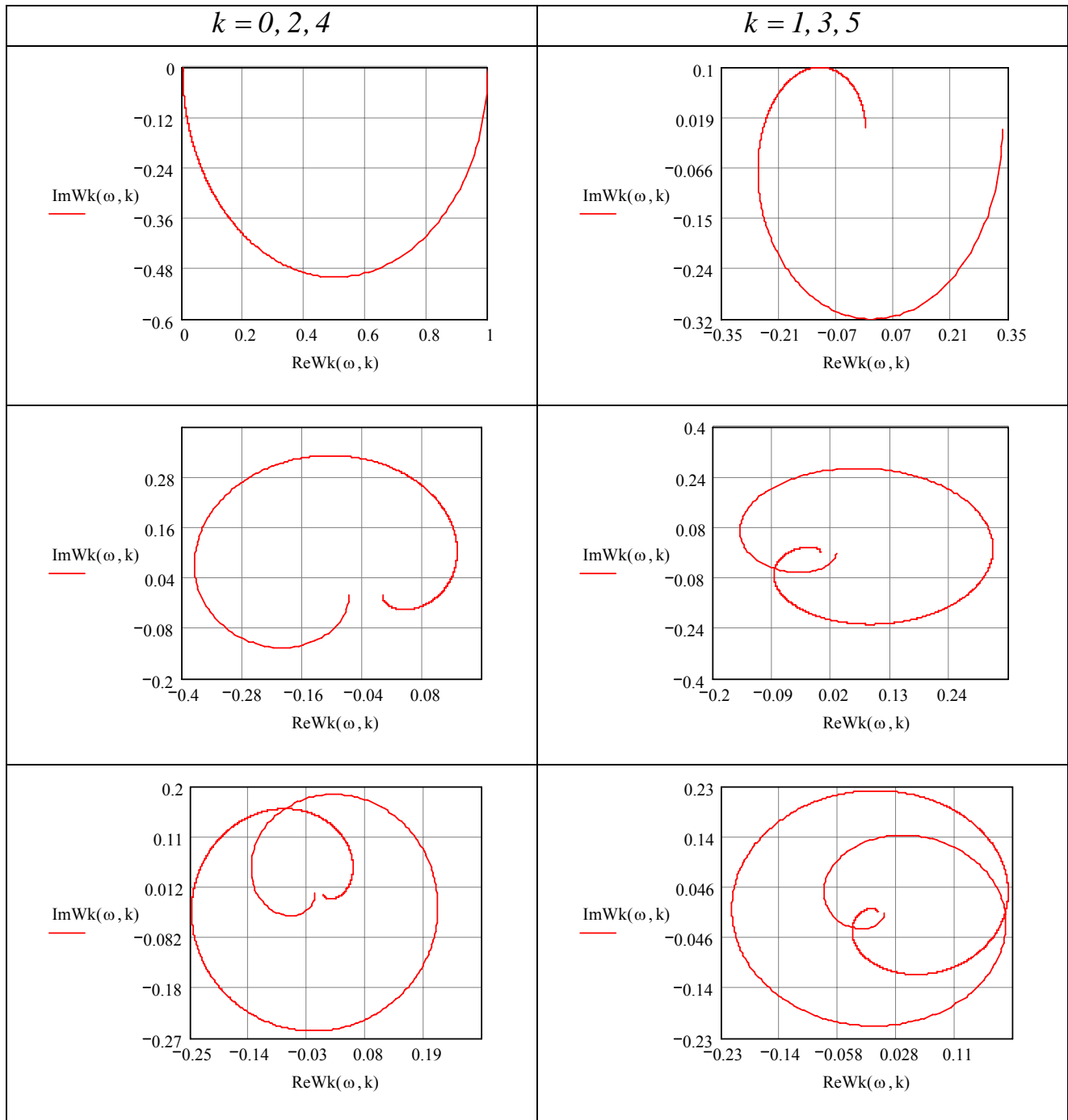




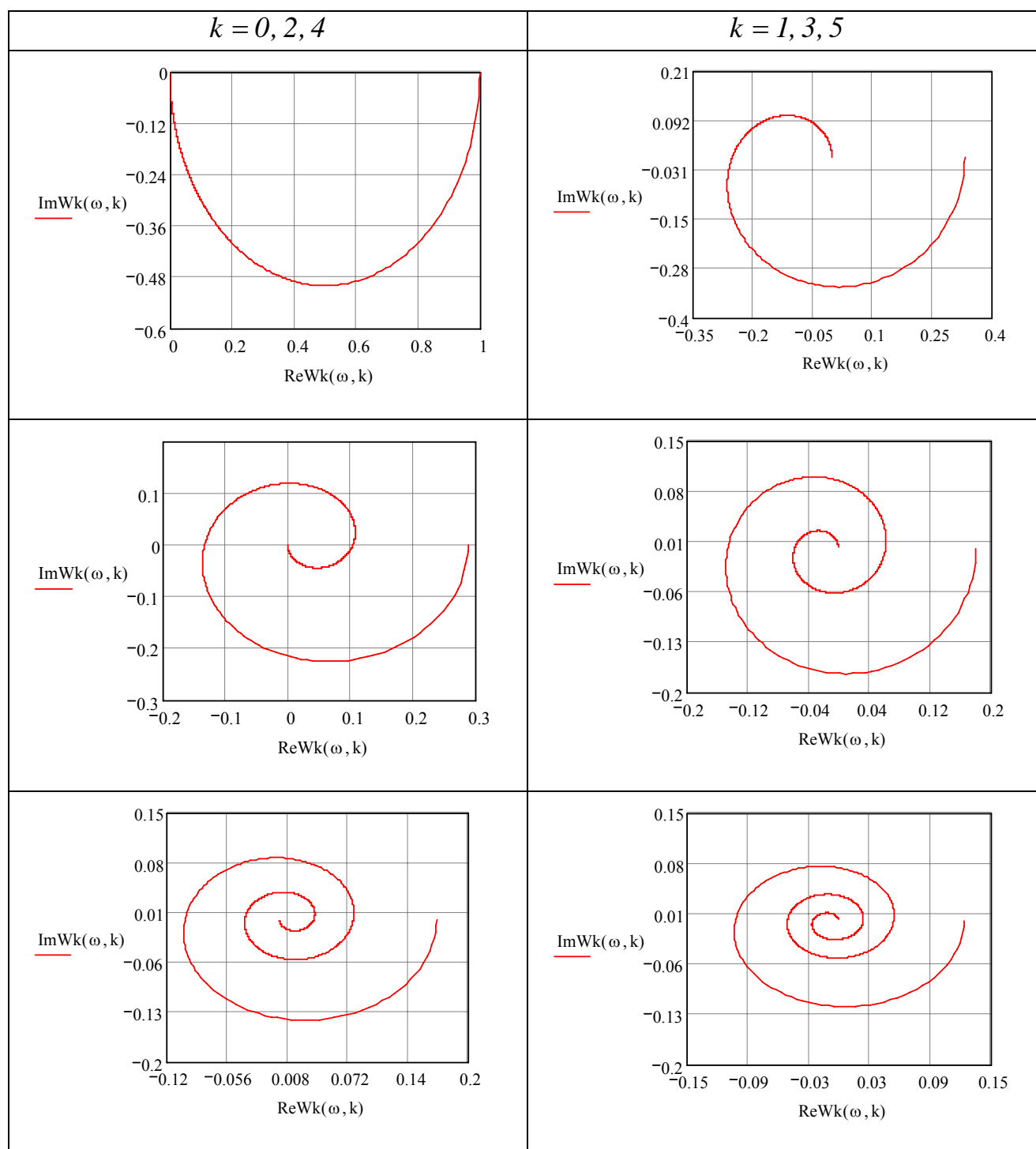
Частотные характеристики ортогональных функций Якоби ( $\alpha = 0,5, \beta = 0$ )



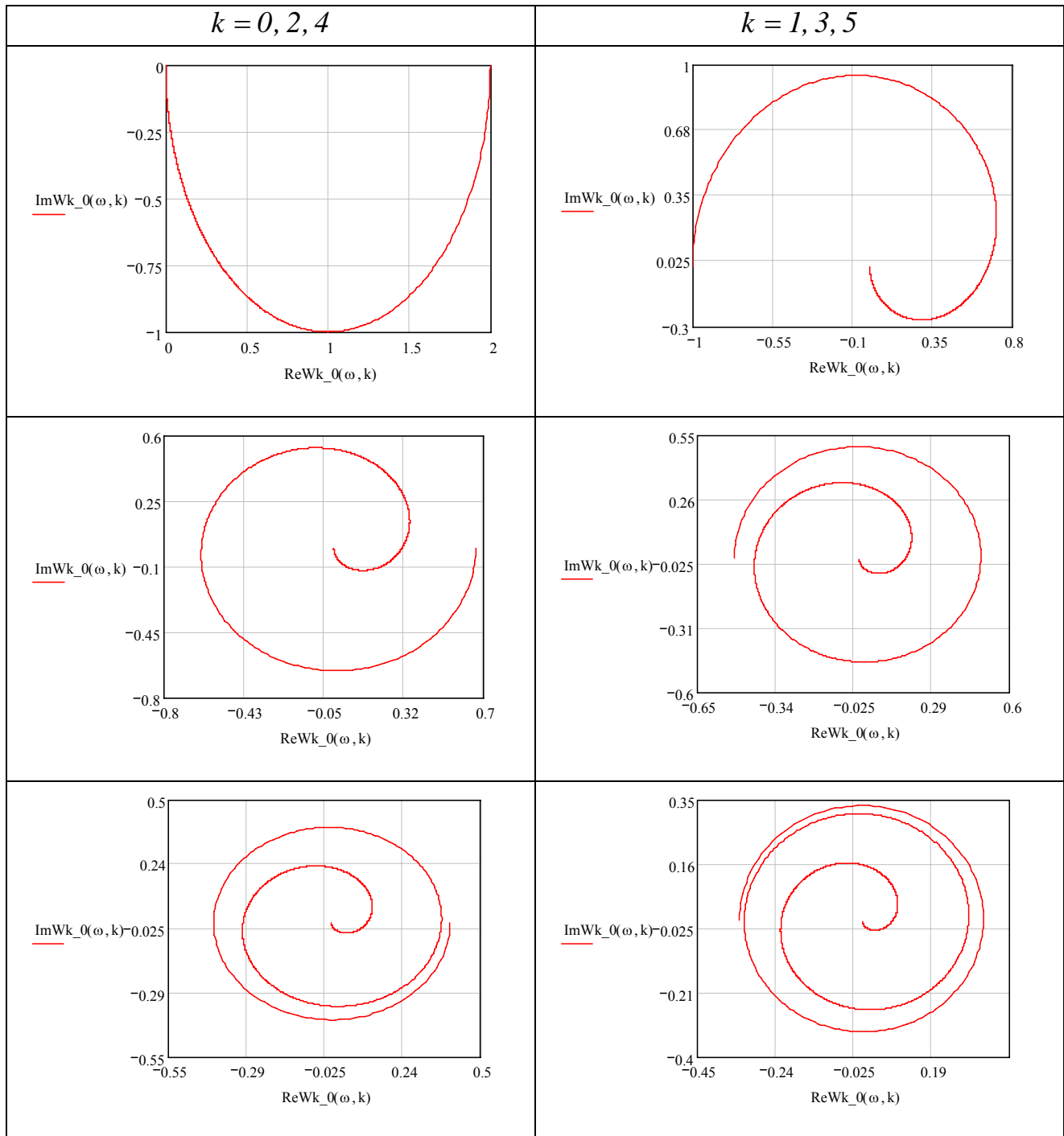
Частотные характеристики ортогональных функций Чебышева 1-ого рода



Частотные характеристики ортогональных функций Чебышева 2-ого рода

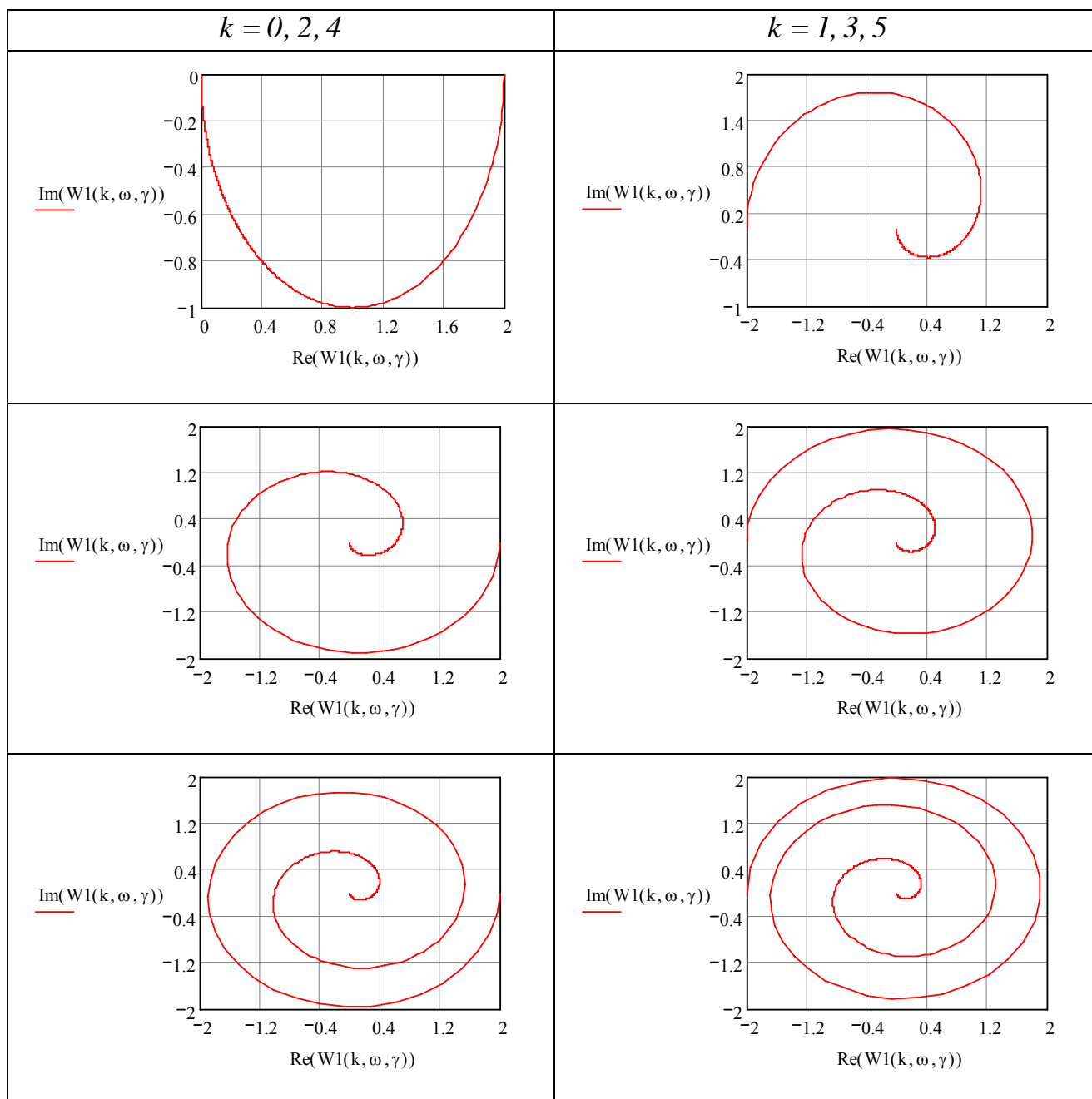


Частотные характеристики ортогональных функций Дирихле

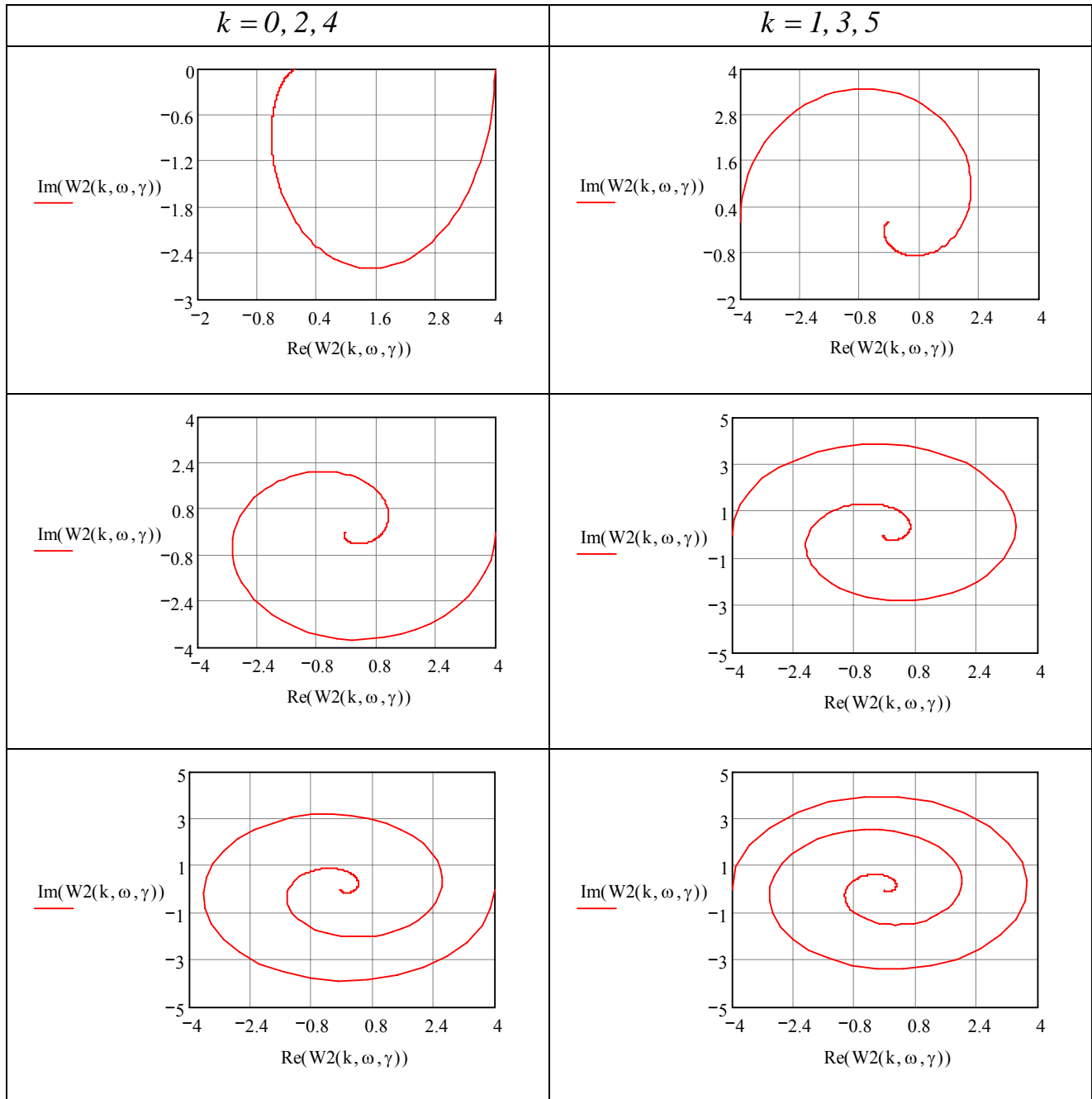


# ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ

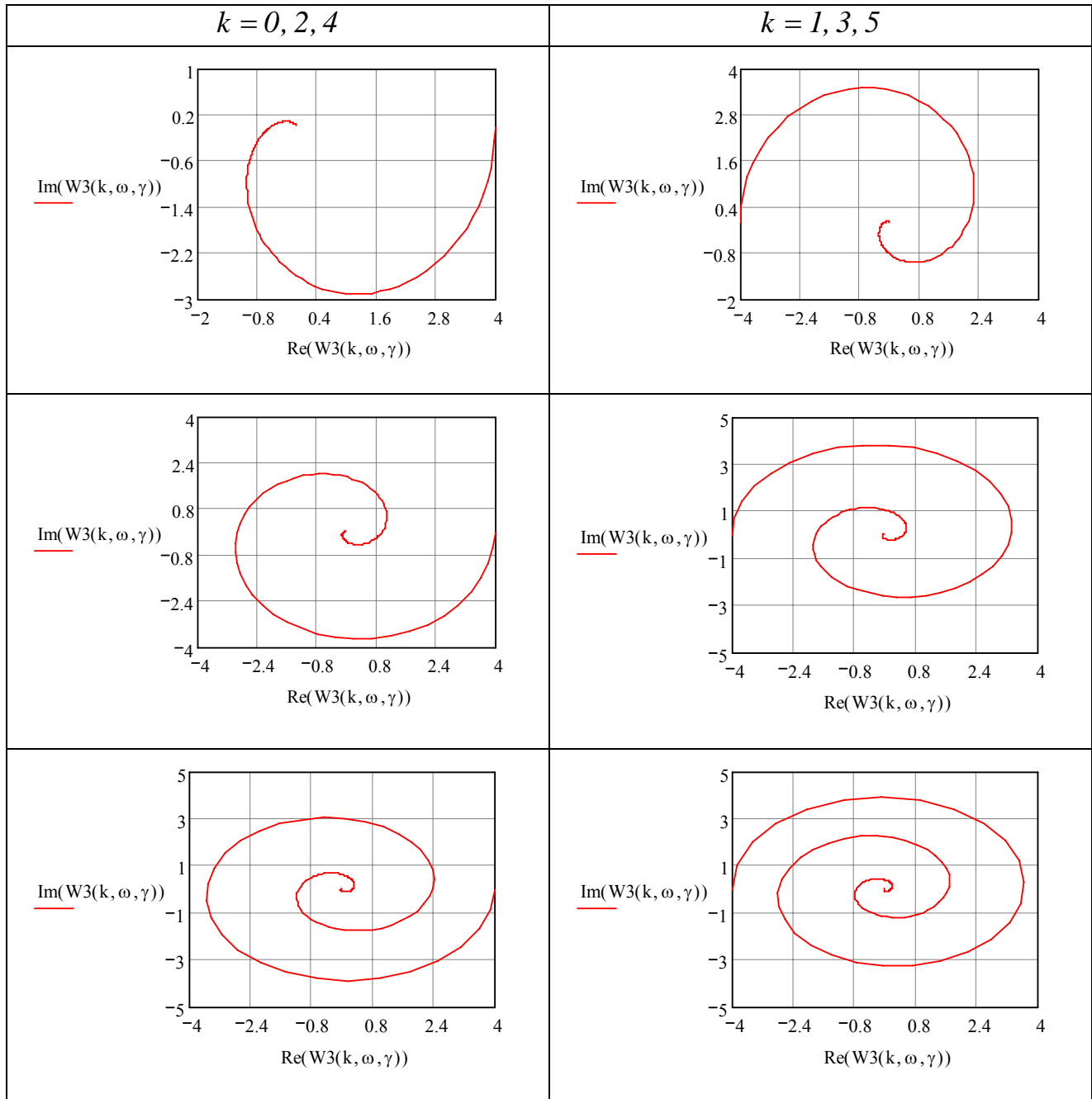
Частотные характеристики ортогональных фильтров Лагерра



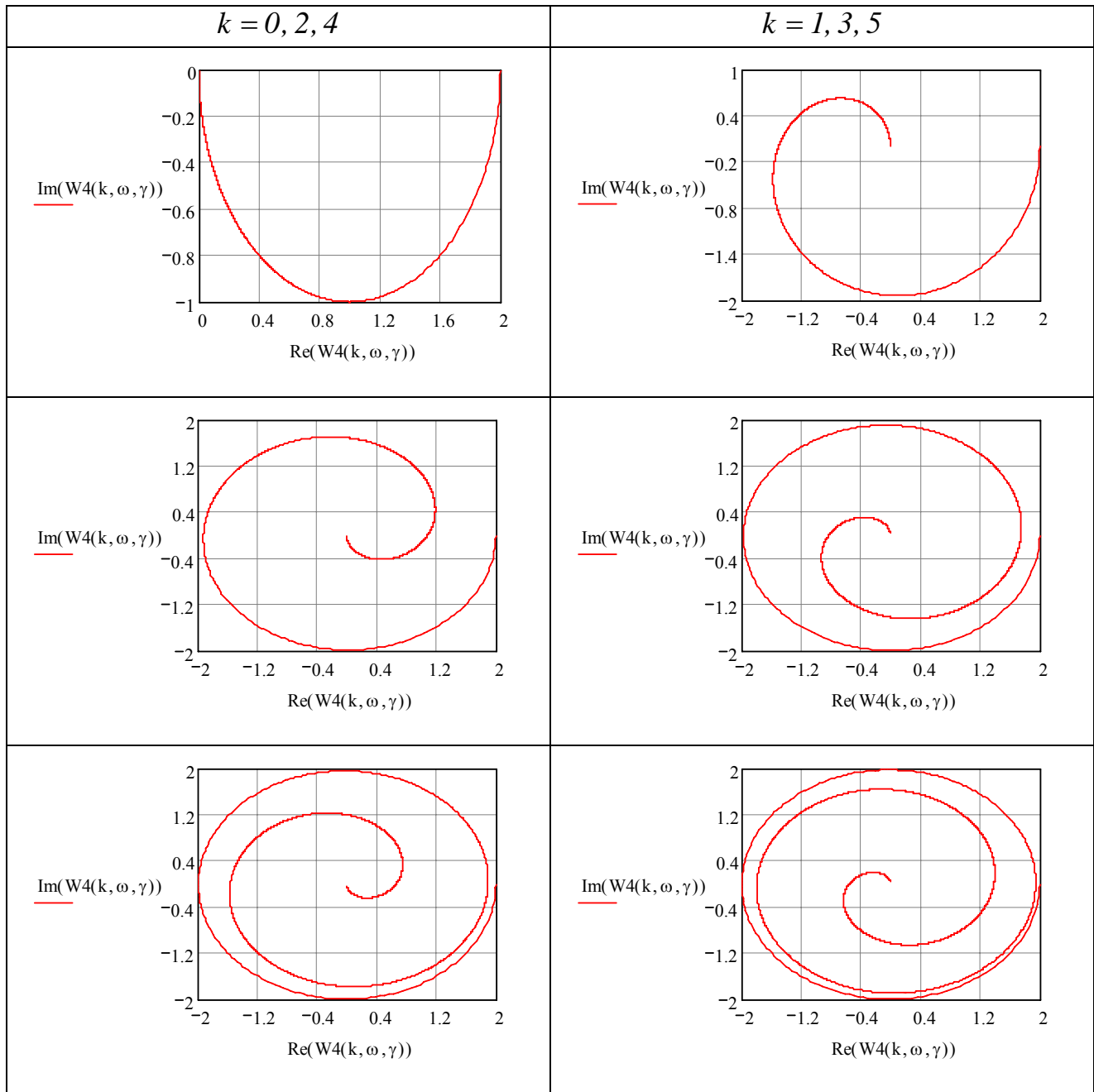
Частотные характеристики ортогональных фильтров Сонина-Лагерра ( $\alpha = 1$ )



Частотные характеристики ортогональных фильтров Сонина-Лагерра ( $\alpha = 2$ )

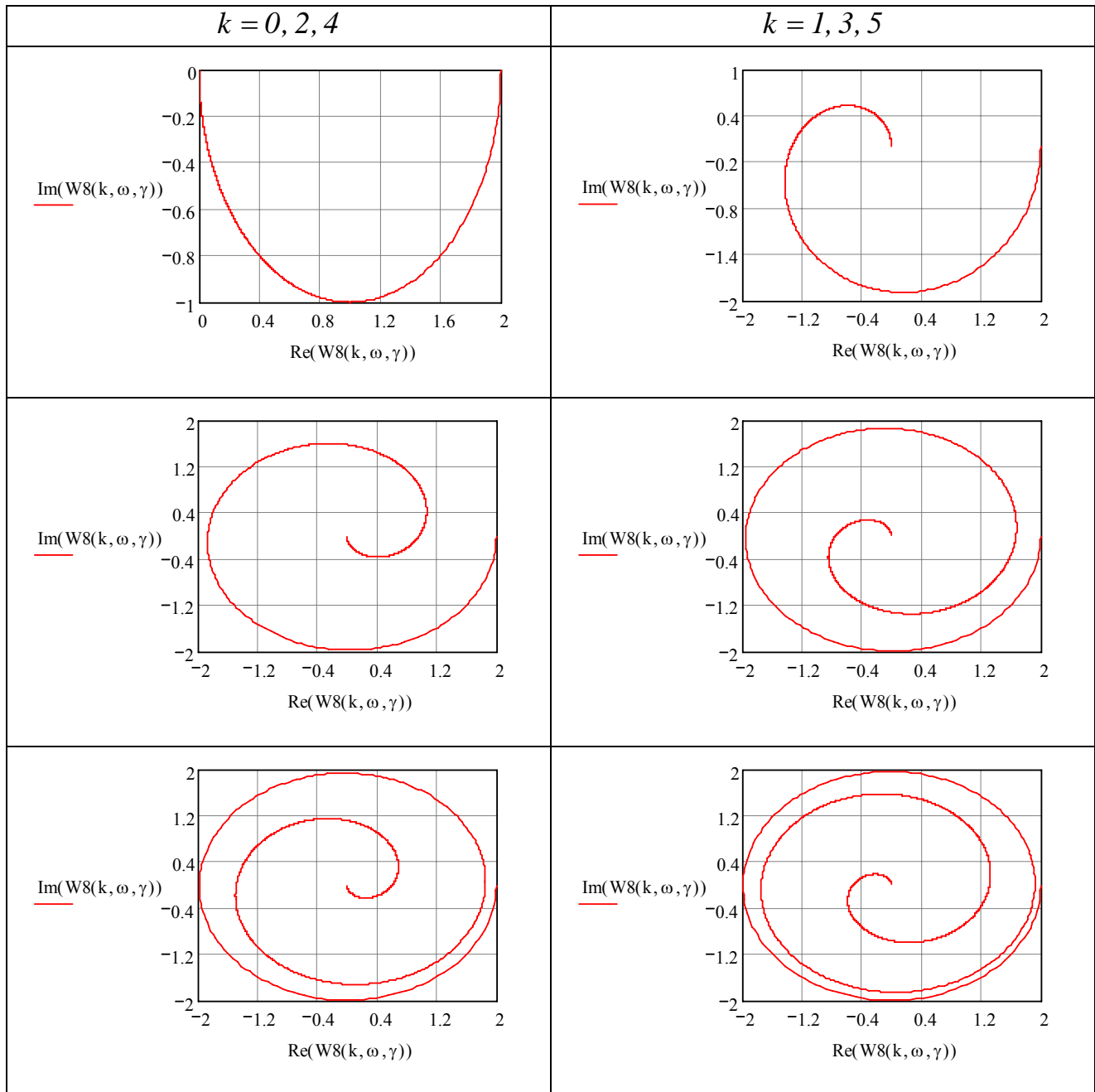


Частотные характеристики ортогональных фильтров Лежандра

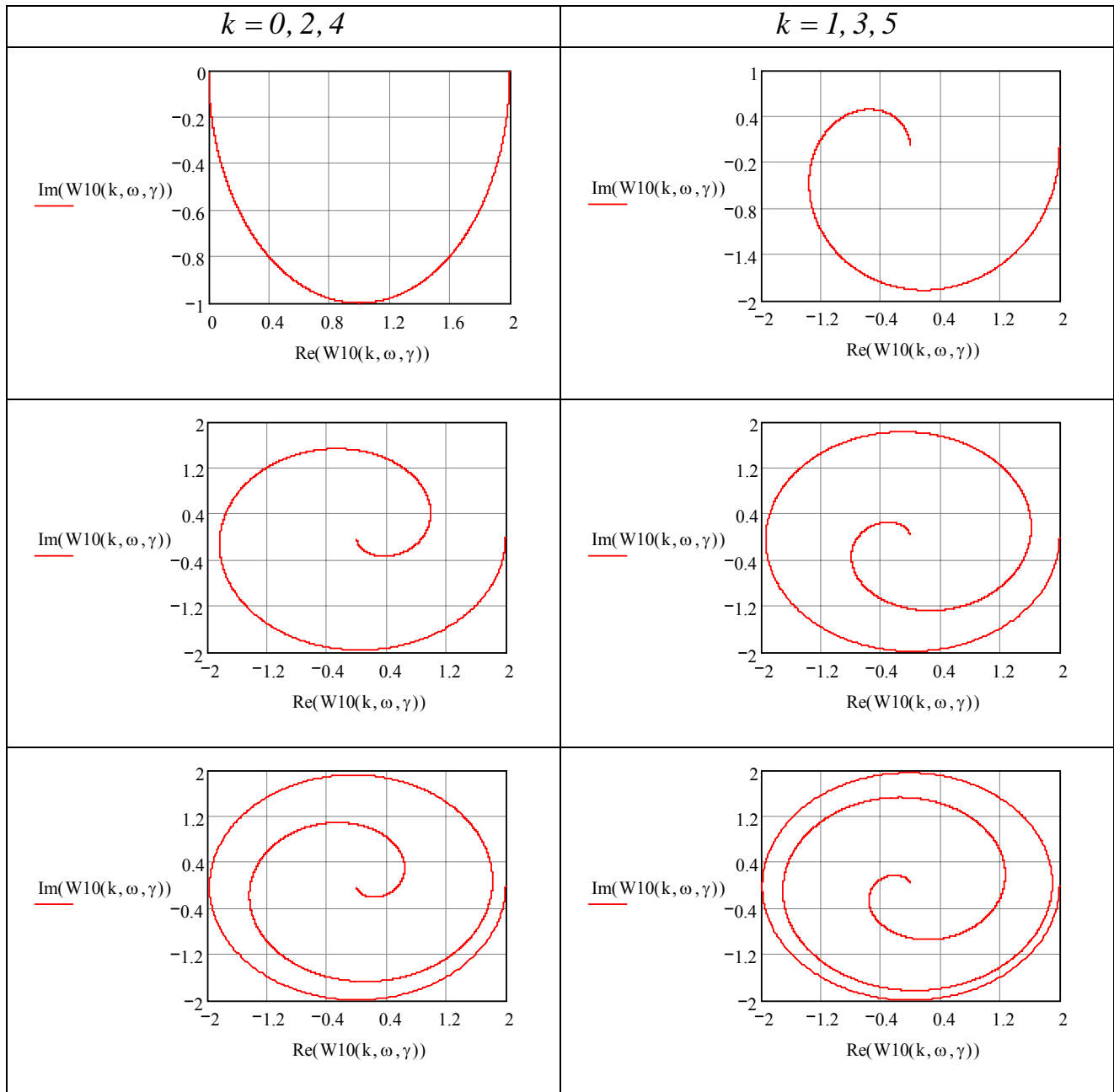




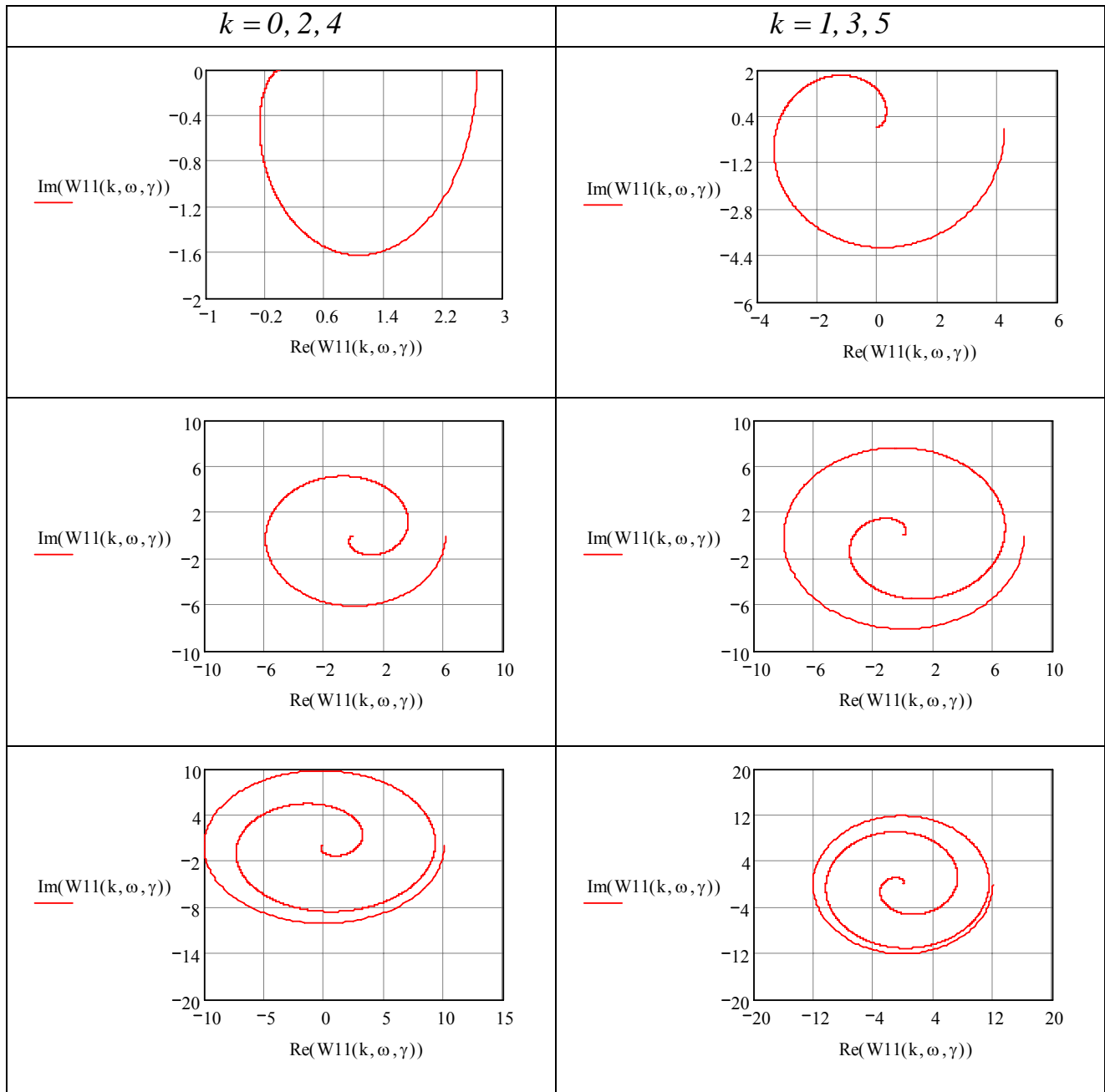
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )



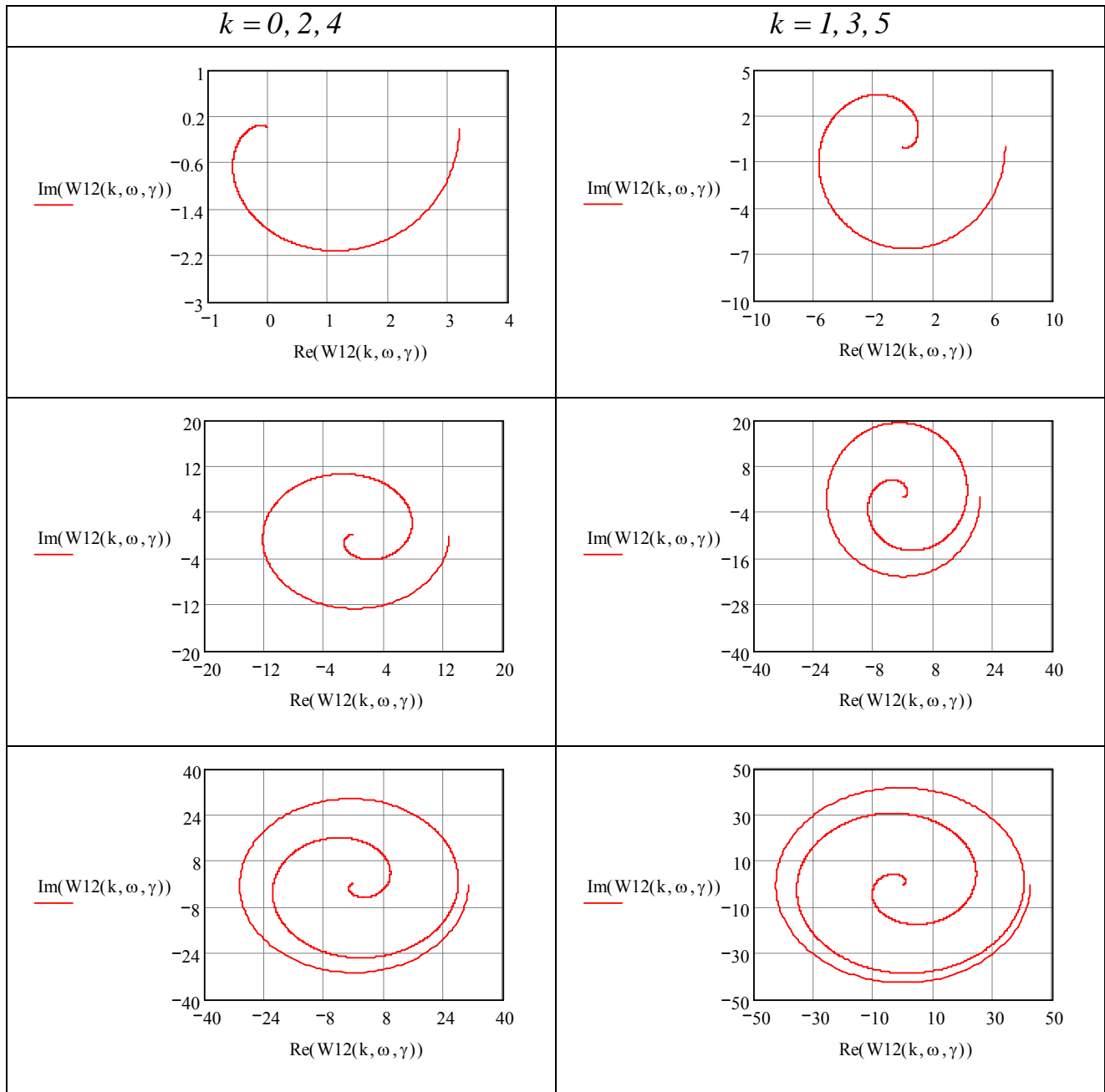
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 2, \beta = 0$ )



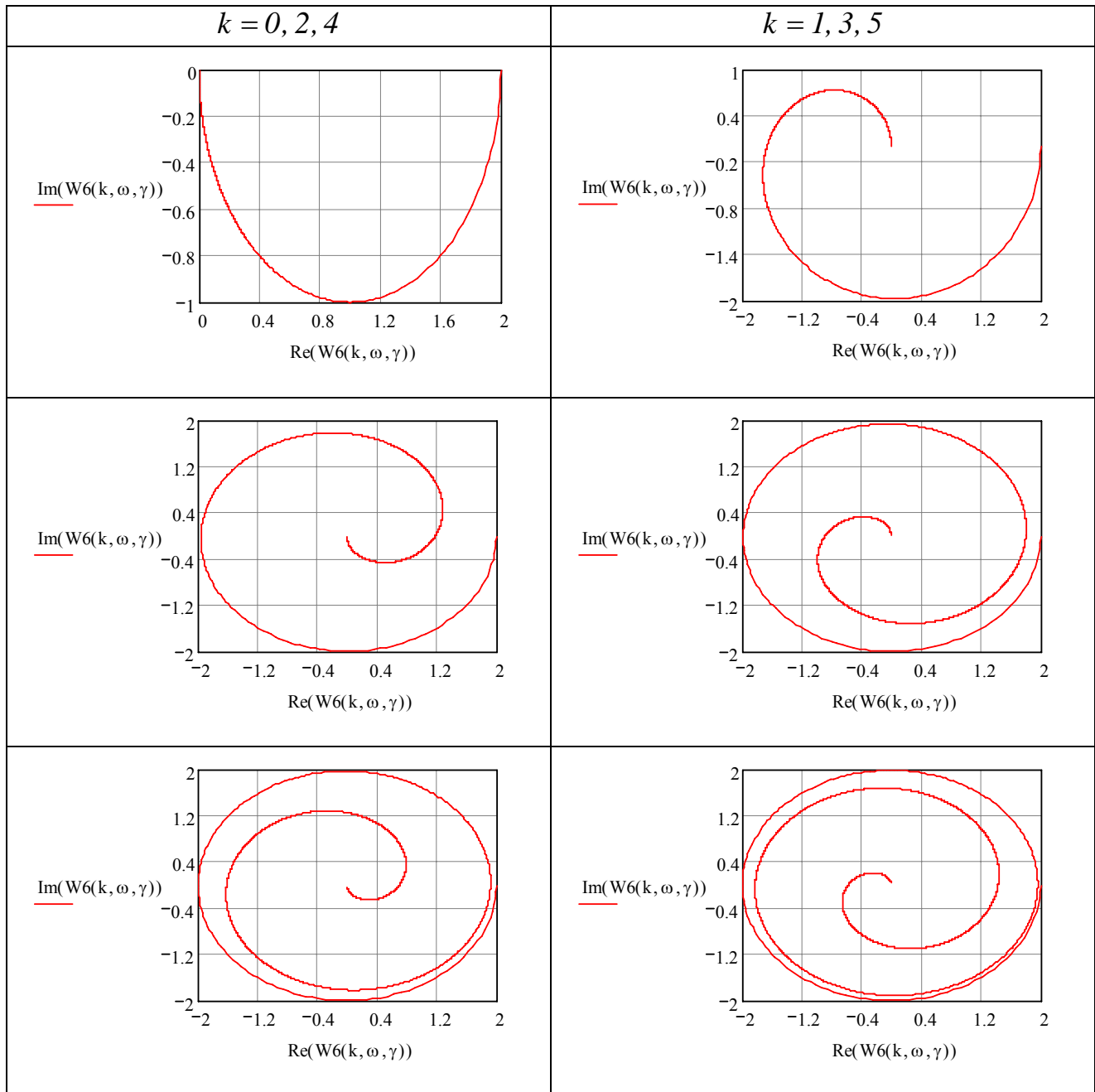
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 1$ )



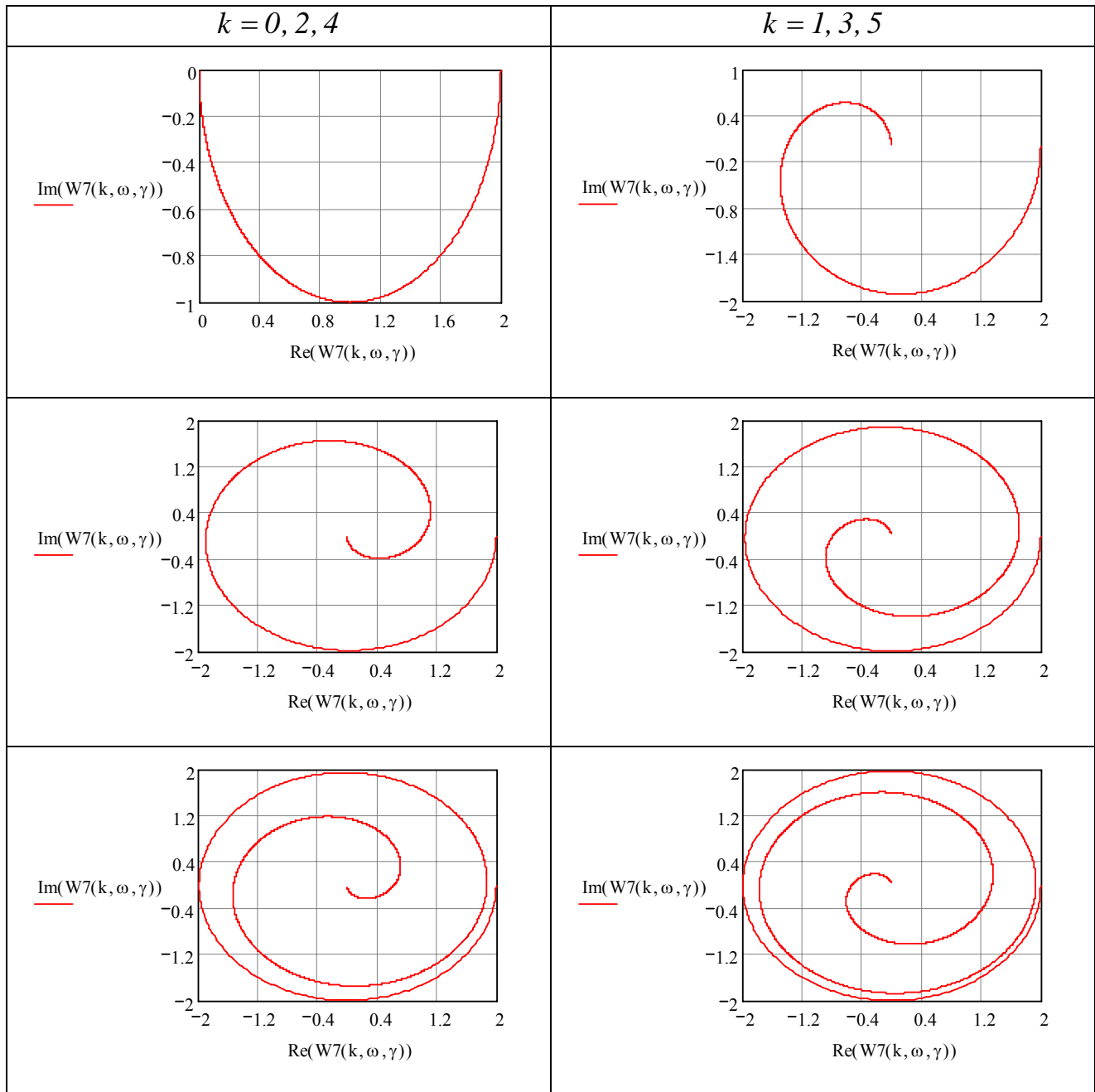
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 0, \beta = 2$ )



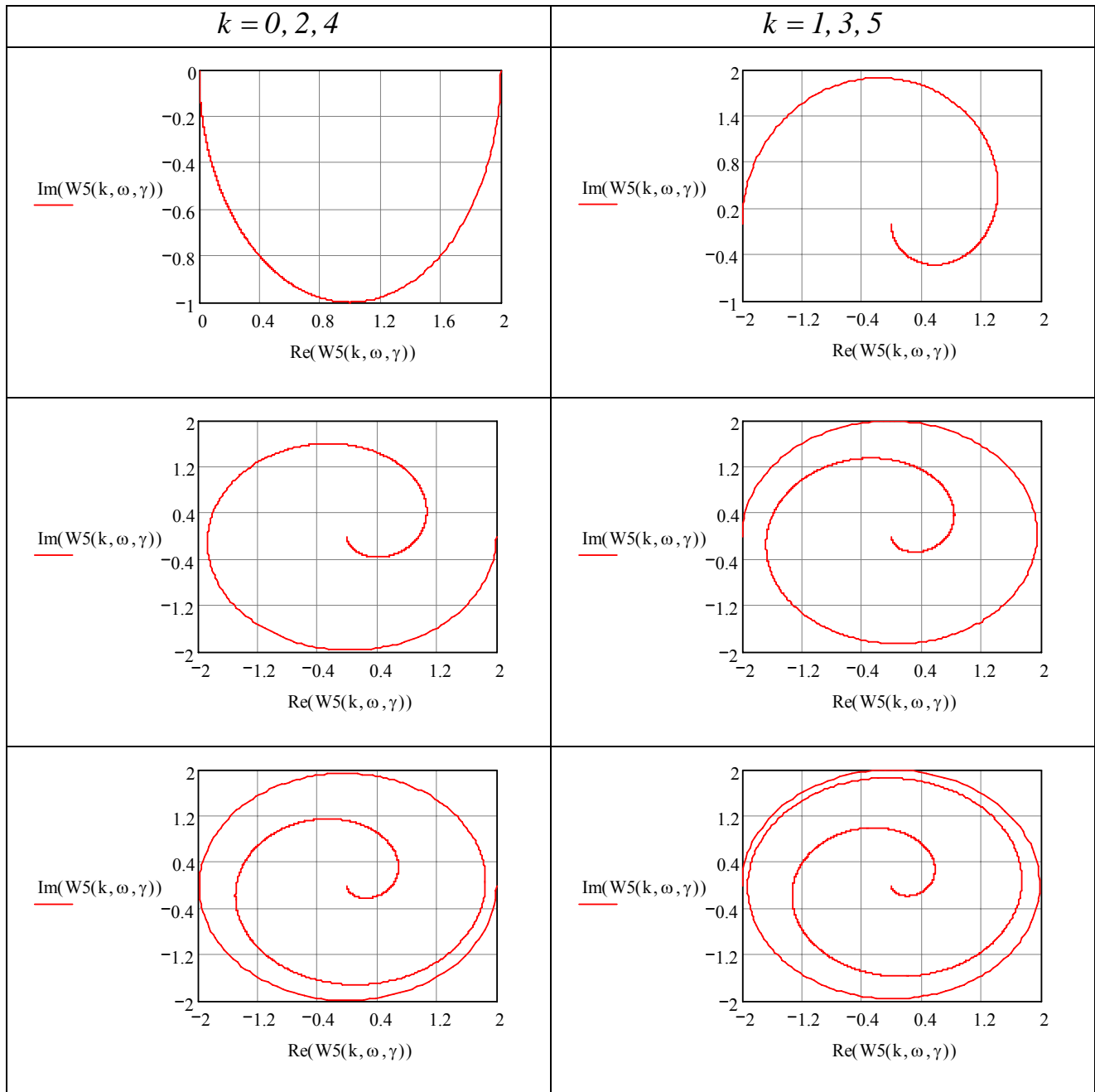
Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = -0,5, \beta = 0$ )



Частотные характеристики ортогональных фильтров Якоби ( $\alpha = 0,5, \beta = 0$ )



Частотные характеристики ортогональных фильтров Дирихле



# **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 4. «ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»**

**Цель работы:** исследование частотных характеристик ортогональных функций.

1. Построить частотные характеристики, соответствующие выражениям (4.6) - (4.9);  $m = 0 - 4$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

$$m := 0..4$$

$$\gamma := 0.87\%$$

$$\omega := 0,0 + 0.01..50$$

$$\phi(k, \omega) := \text{atan}\left[\frac{\omega}{\gamma \cdot (k + 1)}\right]$$

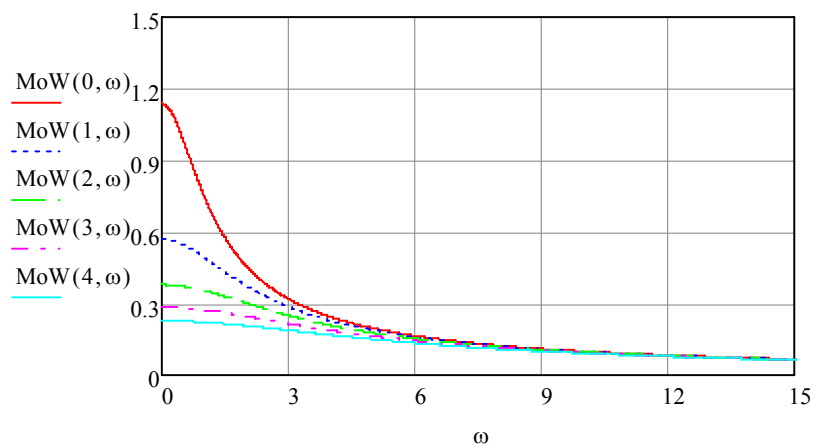
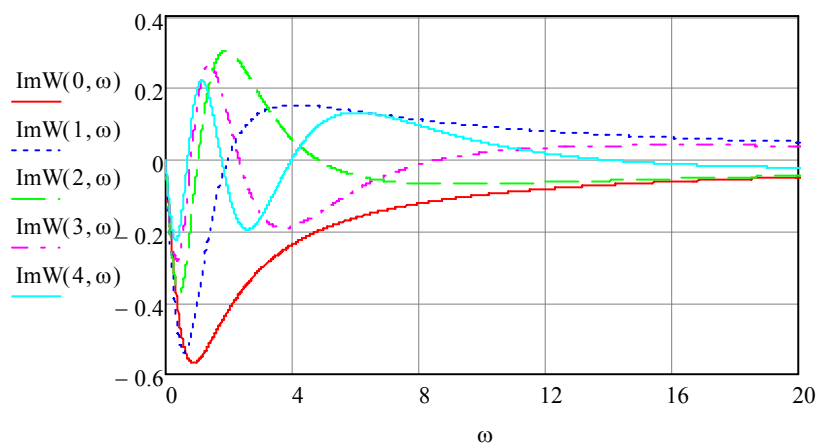
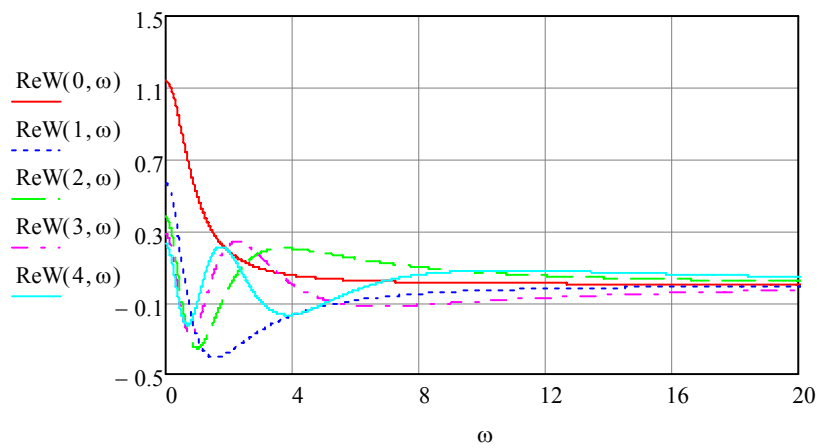
$$\text{Re}W(m, \omega) := \frac{1}{\gamma \cdot (m + 1)} \cdot \cos(\phi(m, \omega)) \cdot \cos\left[\phi(m, \omega) + \left[ \begin{array}{l} 0 \text{ if } m = 0 \\ 2 \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega) \text{ otherwise} \end{array} \right]\right]$$

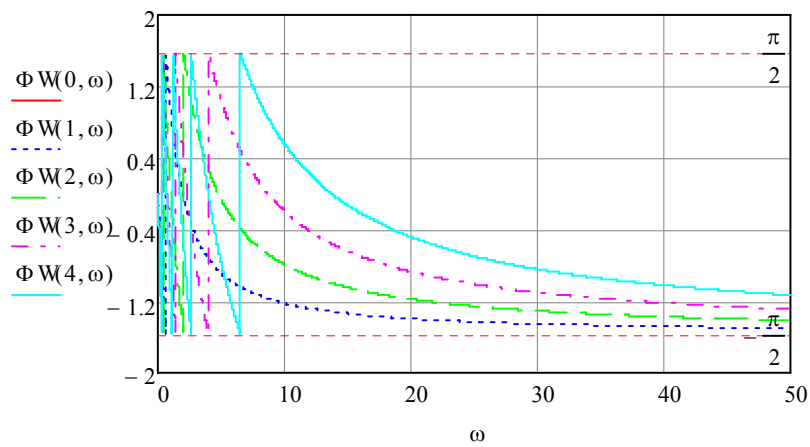
$$\text{Im}W(m, \omega) := -\frac{1}{\gamma \cdot (m + 1)} \cdot \cos(\phi(m, \omega)) \cdot \sin\left[\phi(m, \omega) + \left[ \begin{array}{l} 0 \text{ if } m = 0 \\ 2 \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega) \text{ otherwise} \end{array} \right]\right]$$

$$\text{Mo}W(m, \omega) := \frac{\cos(\phi(m, \omega))}{\gamma \cdot (m + 1)}$$

$$\Phi W(m, \omega) := -\left(\phi(m, \omega) + 2 \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega)\right) + \text{trunc}\left[\frac{\left(\phi(m, \omega) + 2 \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \phi(s, \omega)\right)}{\pi} + 0.5\right] \cdot \pi$$

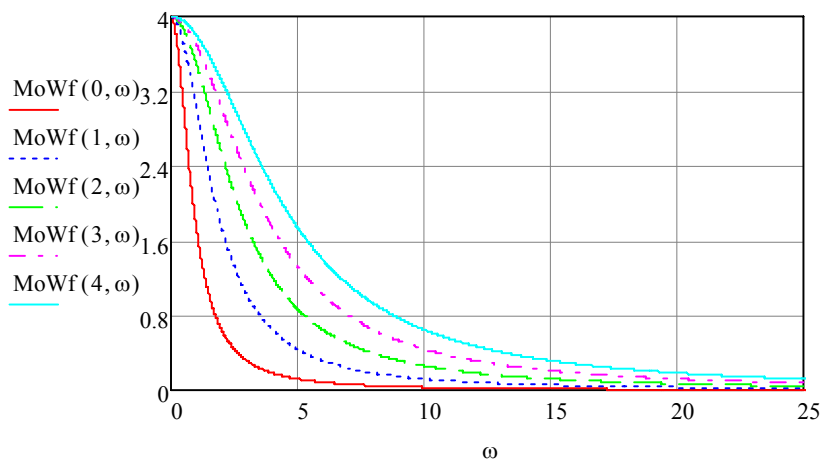






2. Построить зависимость квадрата модуля частотной характеристики ортогонального фильтра от порядка  $m$ ;  $m = 0 - 4$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

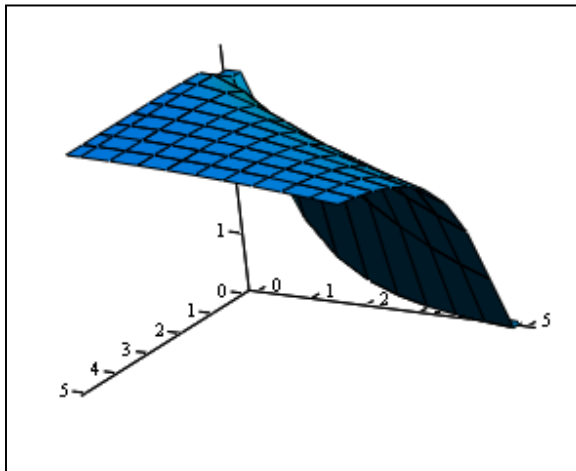
$$\text{MoWf}(m, \omega) := \frac{4(m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$$



3. Построить зависимость квадрата модуля частотной характеристики ортогонального фильтра от параметра  $\gamma$ ;  $m = \text{const}$ .

$$m := 3$$

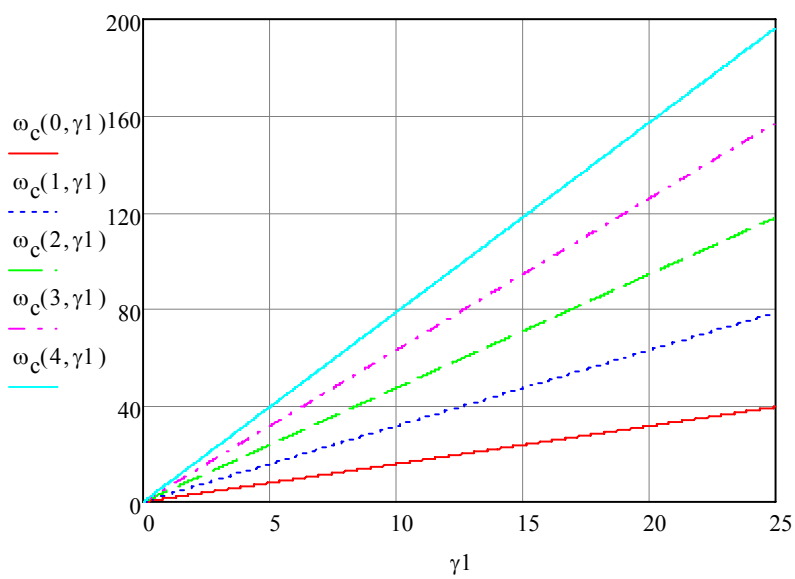
$$\text{MoWf}(\gamma, \omega) := \frac{4(m+1)^2 \cdot \gamma^2}{(m+1)^2 \cdot \gamma^2 + \omega^2}$$



CreateMesh (MoWf)

4. Построить зависимость полосы пропускания ортогонального фильтра  $m$ -ого порядка от параметра  $\gamma$ ;  $m = 0 - 4$ .

$$\omega_c(m, \gamma) := \frac{\pi \cdot \gamma \cdot (m + 1)}{2}$$



АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ  
КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$

Таблица П 10.1

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))}$
$P_k^{(l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma(2s+1))}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma(s+1))}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{1}{(\lambda + \gamma(2s+3))}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{(\lambda + \gamma/2)^{s+1}}$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+2}}$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+3}}$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau|)$

Таблица П 10.2

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma((4s+1)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma((4s+3)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma(2s+1)}{(\lambda + \gamma(2s+1))^2}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma(s+1)}{(\lambda + \gamma(s+1))^2}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{2\lambda + \gamma(2s+3)}{(\lambda + \gamma(2s+3))^2}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{(\lambda + \gamma/2)^{s+2}} (\lambda(s+2) + \gamma/2)$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+3}} (\lambda(s+3) + \gamma/2)$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+4}} (\lambda(s+4) + \gamma/2)$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 - \lambda|\tau|)$

Таблица П 10.3

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+1)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+3)/2)}{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{(\lambda + \gamma(2s+1))^2}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{\gamma(s+1)}{(\lambda + \gamma(s+1))^2}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{\gamma(2s+3)}{(\lambda + \gamma(2s+3))^2}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{(\lambda + \gamma/2)^{s+2}} (\gamma/2 - \lambda s)$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+3}} (\gamma/2 - \lambda(s+1))$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{(\lambda + \gamma/2)^{s+4}} (\gamma/2 - \lambda(s+2))$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} (1 + \lambda|\tau| + \lambda^2 \tau^2 / 3)$

Таблица П 10.4

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-  2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma((4s+1)/2) + 3\gamma^2((4s+1)/2)^2]}{3(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^3}$
$P_k^{(  2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma((4s+3)/2) + 3\gamma^2((4s+3)/2)^2]}{3(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^3}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma(2s+1) + 3\gamma^2(2s+1)^2]}{3(\lambda + \gamma(2s+1))^3}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma(s+1) + 3\gamma^2(s+1)^2]}{3(\lambda + \gamma(s+1))^3}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{[8\lambda^2 + 9\lambda\gamma(2s+3) + 3\gamma^2(2s+3)^2]}{3(\lambda + \gamma(2s+3))^3}$
$L_k(\tau, \gamma)$	$\gamma \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{(-\gamma)^s}{3(\lambda + \gamma/2)^{s+3}} [3(\lambda(s+2) + \gamma/2)(\lambda + \gamma/2) + \lambda^3(s+1)(s+2)]$
$L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	$\gamma^2 \sum_{s=0}^k C_{k+1}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)}{3(\lambda + \gamma/2)^{s+4}} [3(\lambda(s+3) + \gamma/2)(\lambda + \gamma/2) + \lambda^3(s+2)(s+3)]$
$L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	$\frac{\gamma^3}{2} \sum_{s=0}^k C_{k+2}^{k-s} \frac{(-\gamma)^s (s+1)(s+2)}{3(\lambda + \gamma/2)^{s+5}} [3(\lambda(s+4) + \gamma/2)(\lambda + \gamma/2) + \lambda^3(s+3)(s+4)]$

Модель  $\rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \cos \omega_0 \tau$

Таблица П 10.5

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma((4s+1)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma((4s+3)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma(2s+1))}{[(\lambda + \gamma(2s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma(s+1))}{[(\lambda + \gamma(s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{(\lambda + \gamma(2s+3))}{[(\lambda + \gamma(2s+3))^2 + \omega_0^2]}$



$$\text{Модель } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

Таблица П 10.6

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma((4s+1)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma((4s+3)/2))}{[(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma(2s+1))}{[(\lambda + \gamma(2s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma(s+1))}{[(\lambda + \gamma(s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{(2\lambda + \gamma(2s+3))}{[(\lambda + \gamma(2s+3))^2 + \omega_0^2]}$

$$\text{Модель } \rho_x(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right)$$

Таблица П 10.7

$\psi_k(\tau, \gamma / \alpha)$	$\beta_k$
$P_k^{(-l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s-1/2}^{s-1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+1)/2)}{[(\lambda + \gamma((4s+1)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(l/2,0)}(\tau, \gamma)$	$\gamma(4k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1/2}^{s+1/2} (-1)^s \frac{\gamma((4s+3)/2)}{[(\lambda + \gamma((4s+3)/2))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(0,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s}^s (-1)^s \frac{\gamma(2s+1)}{[(\lambda + \gamma(2s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(1,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(k+1) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+1}^{s+1} (-1)^s \frac{\gamma(s+1)}{[(\lambda + \gamma(s+1))^2 + \omega_0^2]}$
$P_k^{(2,0)}(\tau, \gamma)$	$2\gamma(2k+3) \sum_{s=0}^k C_k^s C_{k+s+2}^{s+2} (-1)^s \frac{\gamma(2s+3)}{[(\lambda + \gamma(2s+3))^2 + \omega_0^2]}$

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 5. «ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ»

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями.

1. Определить коэффициенты разложения . Построить графические зависимости от порядка ; m,

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$\gamma := 0.30615$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\phi_1(k) := \operatorname{atan}\left[\frac{\omega}{(k+1)\cdot\gamma + \lambda}\right]$$

$$\phi_2(k) := \operatorname{atan}\left[\frac{\omega}{(k+1)\gamma - \lambda}\right]$$

$$A_1(k) := \frac{\gamma \cdot (k+1)}{(k+1)\cdot\gamma + \lambda}$$

$$A_2(k) := \frac{\gamma \cdot (k+1)}{(k+1)\cdot\gamma - \lambda}$$

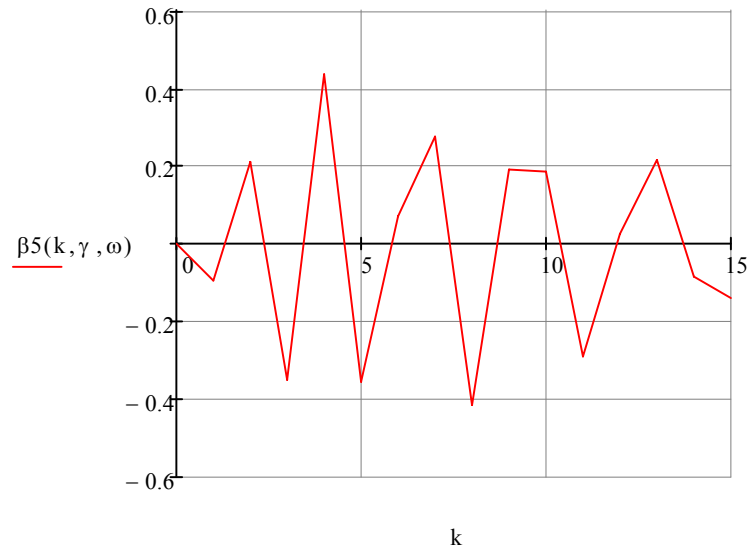
$$B(k) := \frac{A_1(k) \cdot \cos(\phi_1(k))}{A_2(k) \cdot \cos(\phi_2(k))}$$

$$\beta_5(k, \gamma, \omega) := 2 \cdot A_1(k) \cdot \cos(\phi_1(k)) \cdot \left[ \cos\left[\phi_1(k) + \left[ \begin{array}{l} 0 \text{ if } k = 0 \\ \sum_{s=0}^{k-1} (\phi_1(s) + \phi_2(s)) \text{ otherwise} \end{array} \right] \right] \cdot \prod_{s=0}^{k-1} B(s) \right]$$

$$\beta_5(k, \gamma, \omega) =$$

0
-0.09485
0.21058
-0.35094
0.43418
-0.35344
0.07198
0.27425
-0.41313
0.1892
0.18679
-0.29204
0.02293
0.21325
-0.08428
-0.13962

$$\beta_5(0, \gamma, \omega) \rightarrow 0.0292564929643983908:$$



2. Построить графические зависимости от числа членов разложения  $m$ ;  $m = 0 - 5$

$$\tau_4(\omega) := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega^2)}$$

$$\chi := \gamma$$

$$P_7(k, \tau, \chi) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, k) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \chi \cdot \tau} \right]$$

$$\beta_{5i}(k, \chi, \omega) := 2\chi \cdot (k + 1) \cdot \int_0^\infty P_7(k, \tau, \chi) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\delta l(\chi, m, \omega) := \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot \chi \cdot \tau_4(\omega)} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(\beta_{5i}(k, \chi, \omega))^2}{k + 1}}$$

$m1 := 0..15$

$\delta1V0_{m1} := \delta1(\chi, m1, 0)$

$\delta1V2_{m1} := \delta1(\chi, m1, 2)$

$\delta1V4_{m1} := \delta1(\chi, m1, 4)$

$\delta1V1_{m1} := \delta1(\chi, m1, 1)$

$\delta1V3_{m1} := \delta1(\chi, m1, 3)$

$\delta1V5_{m1} := \delta1(\chi, m1, 5)$

$\delta1M^{(0)} := \delta1V0$

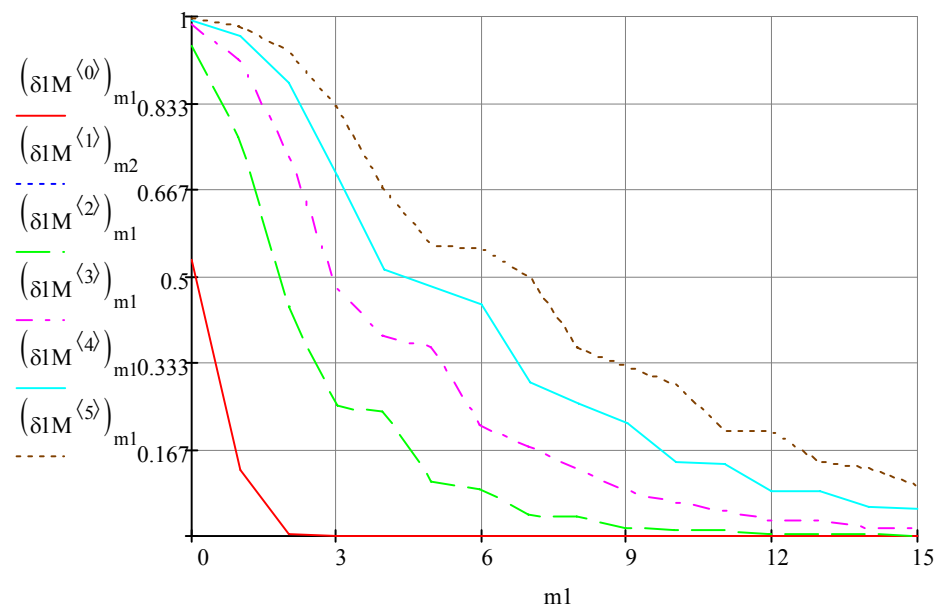
$\delta1M^{(2)} := \delta1V2$

$\delta1M^{(4)} := \delta1V4$

$\delta1M^{(1)} := \delta1V1$

$\delta1M^{(3)} := \delta1V3$

$\delta1M^{(5)} := \delta1V5$



3. Построить графические зависимости от параметра ;  $= 0 - 5$   $m = 2 - 6$   
 Определить количество локальных экстремумов, значения параметра  $\text{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.

$i := 0..100$

$\delta2V0_1 := \delta1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 0)$

$\delta2V2_1 := \delta1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 2)$

$\delta2V4_1 := \delta1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 4)$

$\delta2V1_1 := \delta1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 1)$

$\delta2V3_1 := \delta1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 3)$

$\delta2V5_1 := \delta1(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 5)$

$$\delta 2 M^{\langle 0 \rangle} := \delta 2 V 0$$

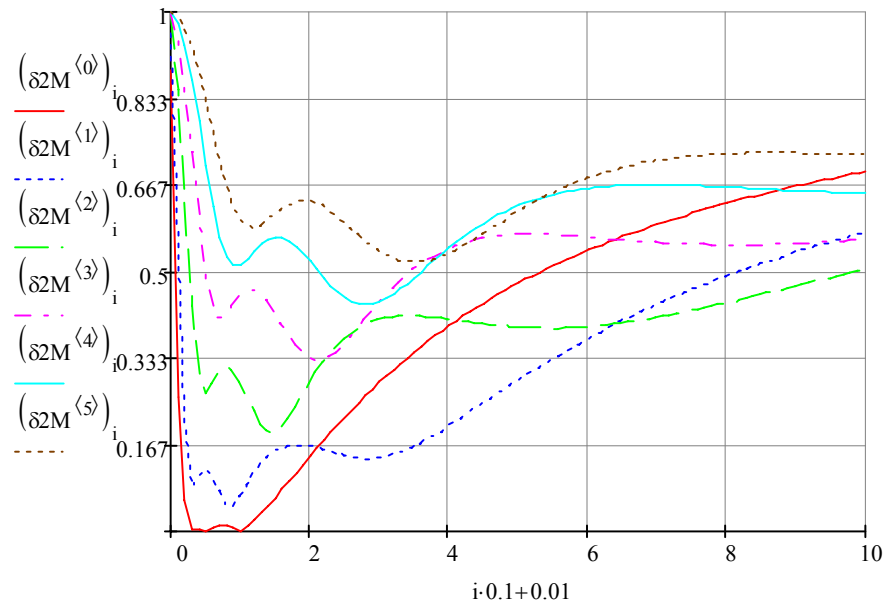
$$\delta 2 M^{\langle 2 \rangle} := \delta 2 V 2$$

$$\delta 2 M^{\langle 4 \rangle} := \delta 2 V 4$$

$$\delta 2 M^{\langle 1 \rangle} := \delta 2 V 1$$

$$\delta 2 M^{\langle 3 \rangle} := \delta 2 V 3$$

$$\delta 2 M^{\langle 5 \rangle} := \delta 2 V 5$$



$$\delta 3 V 0_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 5)$$

$$\delta 3 V 2_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 4, 5)$$

$$\delta 3 V 4_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 6, 5)$$

$$\delta 3 V 1_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 3, 5)$$

$$\delta 3 V 3_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 5, 5)$$

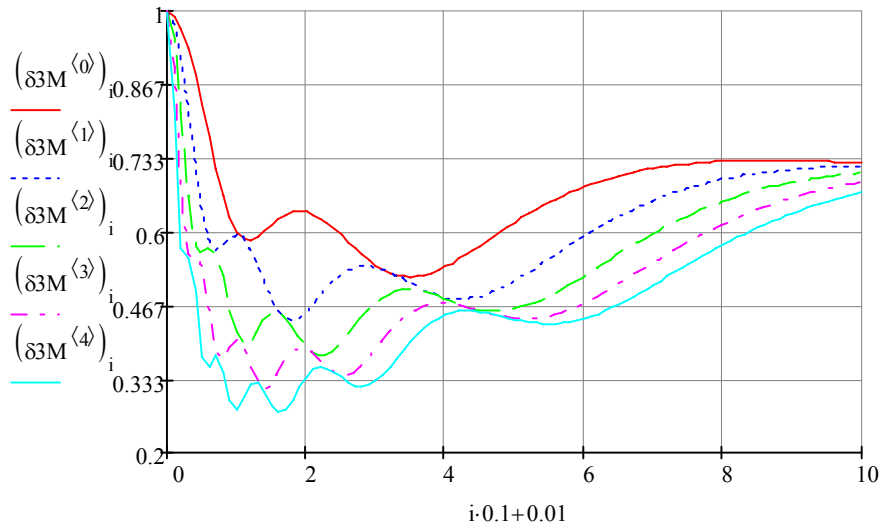
$$\delta 3 M^{\langle 0 \rangle} := \delta 3 V 0$$

$$\delta 3 M^{\langle 2 \rangle} := \delta 3 V 2$$

$$\delta 3 M^{\langle 4 \rangle} := \delta 3 V 4$$

$$\delta 3 M^{\langle 1 \rangle} := \delta 3 V 1$$

$$\delta 3 M^{\langle 3 \rangle} := \delta 3 V 3$$



$$\min(\delta 3M^{\langle 0 \rangle}) = 0.519$$

$$\text{match}(\min(\delta 3M^{\langle 0 \rangle}), \delta 3M^{\langle 0 \rangle})_{0.1 + 0.01} = \begin{pmatrix} 3.41 \\ 3.51 \\ 3.61 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\min M_0} := \text{match}(\min(\delta 3M^{\langle 0 \rangle}), \delta 3M^{\langle 0 \rangle})_{1 \cdot 0.1 + 0.01}$$

$$\min(\delta 3M^{\langle 1 \rangle}) = 0.439$$

$$\text{match}(\min(\delta 3M^{\langle 1 \rangle}), \delta 3M^{\langle 1 \rangle})_{0.1 + 0.01} = (1.81)$$

$$\chi_{\min M_1} := \text{match}(\min(\delta 3M^{\langle 1 \rangle}), \delta 3M^{\langle 1 \rangle})_{0 \cdot 0.1 + 0.01}$$

$$\min(\delta 3M^{\langle 2 \rangle}) = 0.375$$

$$\text{match}(\min(\delta 3M^{\langle 2 \rangle}), \delta 3M^{\langle 2 \rangle})_{0.1 + 0.01} = (2.21)$$

$$\chi_{\min M_2} := \text{match}(\min(\delta 3M^{\langle 2 \rangle}), \delta 3M^{\langle 2 \rangle})_{0 \cdot 0.1 + 0.01}$$

$$\min(\delta_3 M^{\langle 3 \rangle}) = 0.316$$

$$\text{match}(\min(\delta_3 M^{\langle 3 \rangle}), \delta_3 M^{\langle 3 \rangle}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.41)$$

$$\chi_{\min M_3} := \text{match}(\min(\delta_3 M^{\langle 3 \rangle}), \delta_3 M^{\langle 3 \rangle})_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$\min(\delta_3 M^{\langle 4 \rangle}) = 0.273$$

$$\text{match}(\min(\delta_3 M^{\langle 4 \rangle}), \delta_3 M^{\langle 4 \rangle}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.61)$$

$$\chi_{\min M_4} := \text{match}(\min(\delta_3 M^{\langle 4 \rangle}), \delta_3 M^{\langle 4 \rangle})_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$\chi_{\min M} = \begin{pmatrix} 3.51 \\ 1.81 \\ 2.21 \\ 1.41 \\ 1.61 \end{pmatrix}$$

$$j := 0..4$$

$$\min(\delta_3 M^{\langle j \rangle})$$

0.519
0.439
0.375
0.316
0.273

4. Построить графические зависимости от параметра , m; = 0 - 5 m = 2 - 6, opt.

$$\omega_1 := 0..5$$

$$\delta_4 V_0^{\omega_1} := \delta l(\chi_{\min M_0}, 2, \omega_1)$$

$$\delta_4 V_2^{\omega_1} := \delta l(\chi_{\min M_2}, 4, \omega_1)$$

$$\delta_4 V_4^{\omega_1} := \delta l(\chi, 6, \omega_1)$$

$$\delta_4 V_1^{\omega_1} := \delta l(\chi_{\min M_1}, 3, \omega_1)$$

$$\delta_4 V_3^{\omega_1} := \delta l(\chi_{\min M_3}, 5, \omega_1)$$



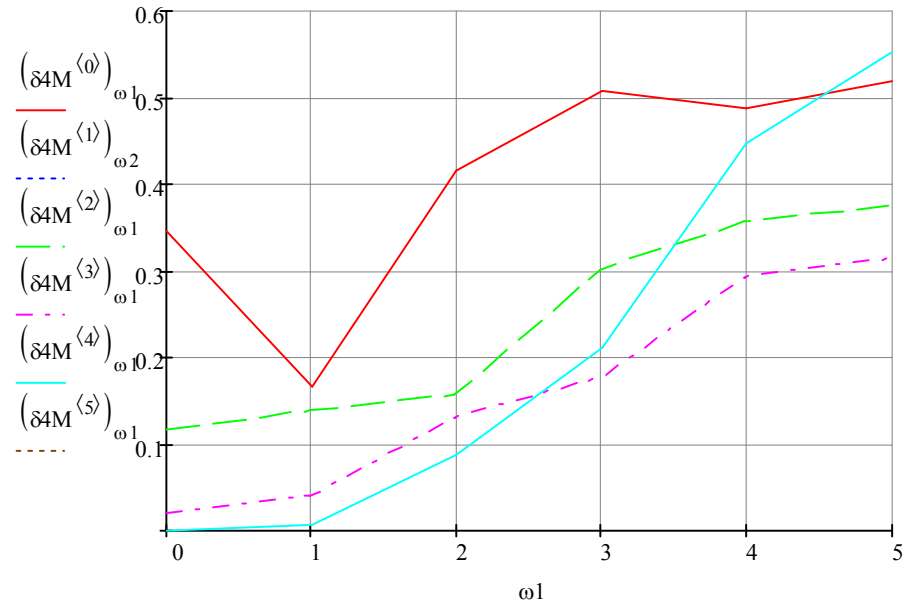
$$\delta 4 M^{\langle 0 \rangle} := \delta 4 V 0$$

$$\delta 4 M^{\langle 2 \rangle} := \delta 4 V 2$$

$$\delta 4 M^{\langle 4 \rangle} := \delta 4 V 4$$

$$\delta 4 M^{\langle 1 \rangle} := \delta 4 V 1$$

$$\delta 4 M^{\langle 3 \rangle} := \delta 4 V 3$$



$$m2 := 2..6$$

$$\delta 5 V 0_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 0})$$

$$\delta 5 V 2_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 2})$$

$$\delta 5 V 4_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 4})$$

$$\delta 5 V 1_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 1})$$

$$\delta 5 V 3_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 3})$$

$$\delta 5 V 5_{m2} := \delta l(\chi_{\min M_{m2-2}, m2, 5})$$

$$\delta 5 M^{\langle 0 \rangle} := \delta 5 V 0$$

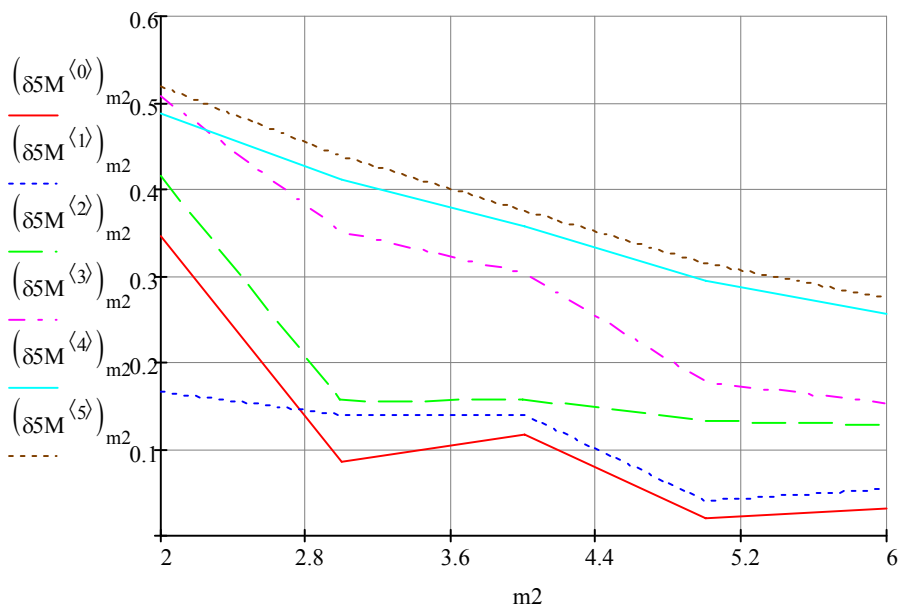
$$\delta 5 M^{\langle 2 \rangle} := \delta 5 V 2$$

$$\delta 5 M^{\langle 4 \rangle} := \delta 5 V 4$$

$$\delta 5 M^{\langle 1 \rangle} := \delta 5 V 1$$

$$\delta 5 M^{\langle 3 \rangle} := \delta 5 V 3$$

$$\delta 5 M^{\langle 5 \rangle} := \delta 5 V 5$$



5. Построить графические зависимости от параметра , m; = 0 - 5 m = 2 - 6, .

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\chi^1_{m2} := \frac{0.4}{(m2 + 1) \cdot \Delta_t}$$

$$\chi^1_{m2} =$$

1.633
1.225
0.98
0.816
0.7

$$\chi^{1c(mx)} := \frac{0.4}{(mx + 1) \cdot \Delta_t}$$

$$\delta V0_{\omega 1} := \delta l\left(\chi^1_{2,2},\omega 1\right)$$

$$\delta V2_{\omega 1} := \delta l\left(\chi^1_{4,4},\omega 1\right)$$

$$\delta V4_{\omega 1} := \delta l\left(\chi^1_{6,6},\omega 1\right)$$

$$\delta V1_{\omega 1} := \delta l\left(\chi^1_{3,3},\omega 1\right)$$

$$\delta V3_{\omega 1} := \delta l\left(\chi^1_{5,5},\omega 1\right)$$

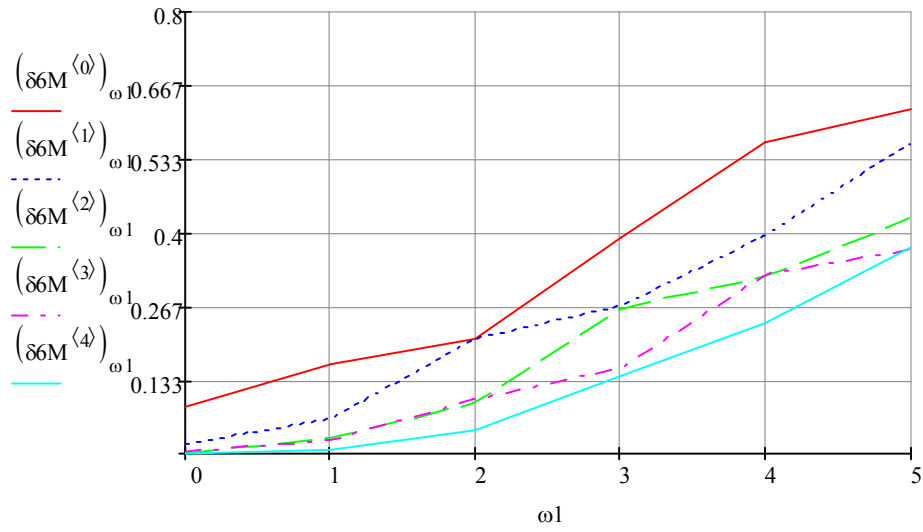
$$\delta M^{\langle 0 \rangle} := \delta V0$$

$$\delta M^{\langle 2 \rangle} := \delta V2$$

$$\delta M^{\langle 4 \rangle} := \delta V4$$

$$\delta M^{\langle 1 \rangle} := \delta V1$$

$$\delta M^{\langle 3 \rangle} := \delta V3$$



$$\delta 7 V 0_{m 2}:=\delta l\left(\chi_{m 2}^1, m 2, 0\right)$$

$$\delta 7 V 2_{m 2}:=\delta l\left(\chi_{m 2}^1, m 2, 2\right)$$

$$\delta 7 V 4_{m 2}:=\delta l\left(\chi_{m 2}^1, m 2, 4\right)$$

$$\delta 7 V 1_{m 2}:=\delta l\left(\chi_{m 2}^1, m 2, 1\right)$$

$$\delta 7 V 3_{m 2}:=\delta l\left(\chi_{m 2}^1, m 2, 3\right)$$

$$\delta 7 V 5_{m 2}:=\delta l\left(\chi_{m 2}^1, m 2, 5\right)$$

$$\delta 7 M^{<0>}:=\delta 7 V 0$$

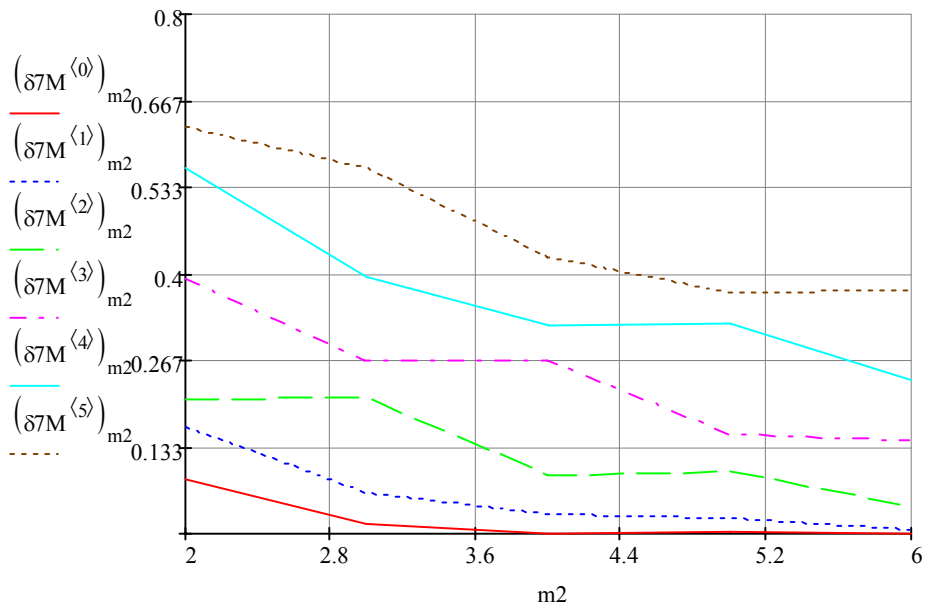
$$\delta 7 M^{<2>}:=\delta 7 V 2$$

$$\delta 7 M^{<4>}:=\delta 7 V 4$$

$$\delta 7 M^{<1>}:=\delta 7 V 1$$

$$\delta 7 M^{<3>}:=\delta 7 V 3$$

$$\delta 7 M^{<5>}:=\delta 7 V 5$$



$$\chi^2_{m2} := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(m2 + 1)}$$

$$\chi^2_{m2} =$$

1.7
1.275
1.02
0.85
0.728

$$\chi^{2c(mx)} := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(mx + 1)}$$

$$\delta \delta V^0_{\omega 1} := \delta l\big(\chi^2_2, 2, \omega 1\big)$$

$$\delta \delta V^2_{\omega 1} := \delta l\big(\chi^2_4, 4, \omega 1\big)$$

$$\delta \delta V^4_{\omega 1} := \delta l\big(\chi^2_6, 6, \omega 1\big)$$

$$\delta \delta V^1_{\omega 1} := \delta l\big(\chi^2_3, 3, \omega 1\big)$$

$$\delta \delta V^3_{\omega 1} := \delta l\big(\chi^2_5, 5, \omega 1\big)$$

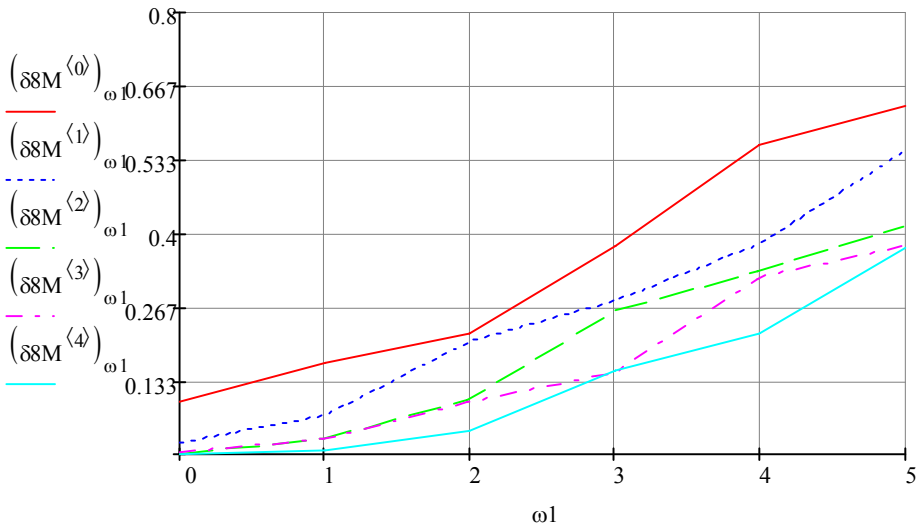
$$\delta \delta M^{\langle 0 \rangle} := \delta \delta V^0$$

$$\delta \delta M^{\langle 2 \rangle} := \delta \delta V^2$$

$$\delta \delta M^{\langle 4 \rangle} := \delta \delta V^4$$

$$\delta \delta M^{\langle 1 \rangle} := \delta \delta V^1$$

$$\delta \delta M^{\langle 3 \rangle} := \delta \delta V^3$$



$$\delta V_{m2}^{(0)} := \delta l(\chi_{m2}^2, m2, 0)$$

$$\delta V_{m2}^{(2)} := \delta l(\chi_{m2}^2, m2, 2)$$

$$\delta V_{m2}^{(4)} := \delta l(\chi_{m2}^2, m2, 4)$$

$$\delta V_{m2}^{(1)} := \delta l(\chi_{m2}^2, m2, 1)$$

$$\delta V_{m2}^{(3)} := \delta l(\chi_{m2}^2, m2, 3)$$

$$\delta V_{m2}^{(5)} := \delta l(\chi_{m2}^2, m2, 5)$$

$$\delta M^{(0)} := \delta V$$

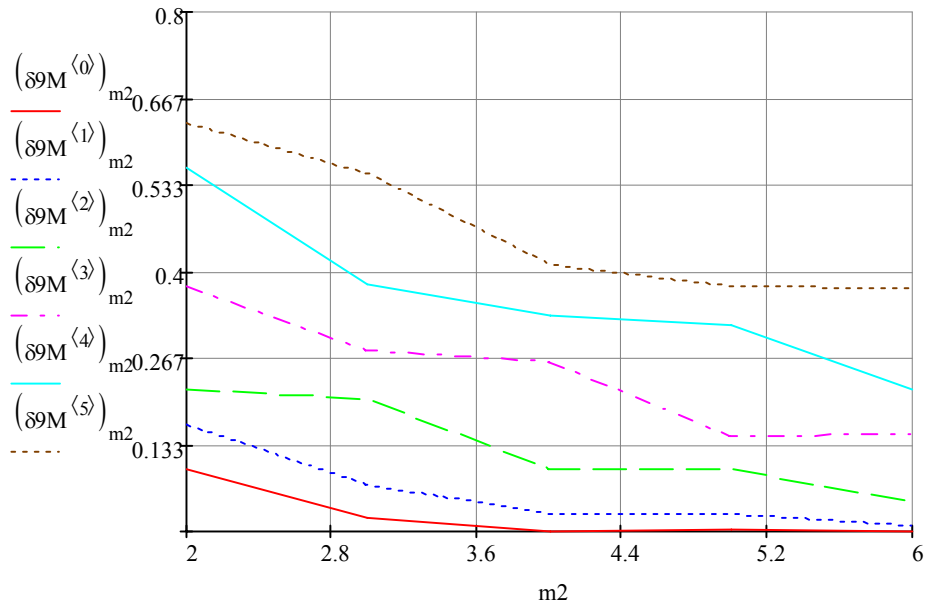
$$\delta M^{(2)} := \delta V_2$$

$$\delta M^{(4)} := \delta V_4$$

$$\delta M^{(1)} := \delta V_1$$

$$\delta M^{(3)} := \delta V_3$$

$$\delta M^{(5)} := \delta V_5$$



6. Построить модели корреляционной функции;  $\beta = 1$ ,  $\omega = 5$  m = 5/10, opt.

$$\rho(\tau, m, \chi) := \sum_{k=0}^m (\beta 5i(k, \chi, \omega) \cdot P7(k, \tau, \chi))$$

$$\Delta\tau := 0.081649' \quad Nx := 37$$

$$\tau := 0, 0 + \Delta\tau \dots (Nx - 1) \cdot \Delta\tau$$

$$\rho t(\tau) := e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$

$$m\_1 := 5$$

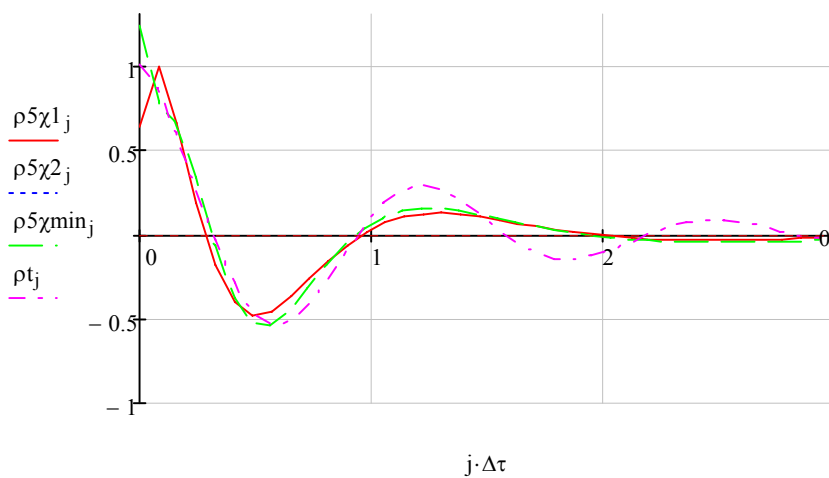
$$j := 0..Nx - 1$$

$$\rho 5 \chi 1_j := \rho(j \cdot \Delta\tau, m\_1, \chi 1 c(m\_1))$$

$$\rho 5 \chi 2_j := \rho(j \cdot \Delta\tau, m\_1, \chi 2 c(m\_1))$$

$$\rho 5 \chi \min_j := \rho(j \cdot \Delta\tau, m\_1, \chi \min M_{m\_1-2})$$

$$\rho t_j := \rho t(j \cdot \Delta\tau)$$



$$\delta 3 V_8 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 10, 5)$$

$$\delta 3 M^{\langle 8 \rangle} := \delta 3 V_8$$

$$\min(\delta 3 M^{\langle 8 \rangle}) = 0.148$$

$$\text{match}(\min(\delta 3 M^{\langle 8 \rangle}), \delta 3 M^{\langle 8 \rangle}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.11)$$

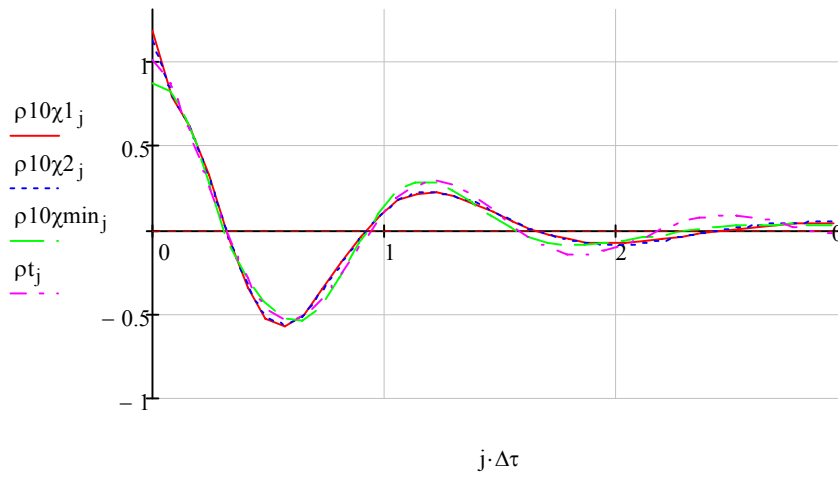
$$\chi_{\min M_8} := \text{match}(\min(\delta 3 M^{\langle 8 \rangle}), \delta 3 M^{\langle 8 \rangle})_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$m\_2 := 10$$

$$\rho 10 \chi 1_j := \rho(j \cdot \Delta \tau, m\_2, \chi 1 c(m\_2))$$

$$\rho 10 \chi 2_j := \rho(j \cdot \Delta \tau, m\_2, \chi 2 c(m\_2))$$

$$\rho 10 \chi_{\min j} := \rho(j \cdot \Delta \tau, m\_2, \chi_{\min M_{m\_2-2}})$$



# **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 6. «АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ЕЁ МОДЕЛЬ»**

**Цель работы:** изучение метода и приобретение практических навыков при аппроксимации корреляционных функций случайных процессов ортогональными функциями при ограничении на её модель.

1. Определить коэффициенты разложения  $\beta_k$  и  $b_k$ . Построить графические зависимости  $\beta_k$  и  $b_k$  от порядка  $k$ ;  $\mu$ ,  $m$ ,  $\gamma$ .

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$\gamma := 0.30619$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta5M_k := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

$$b5M_k := \beta5M_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta5M_s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$



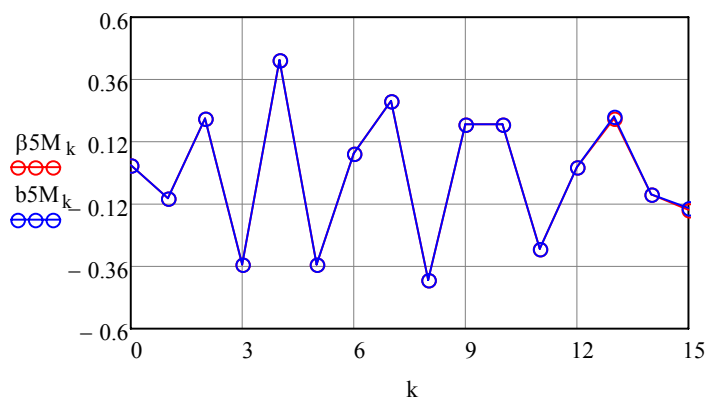
$\beta 5M_k =$ 

0.029948
-0.094859
0.210559
-0.350974
0.434154
-0.353464
0.071981
0.274272
-0.41309
0.189251
0.186837
-0.292016
0.022924
0.21321
-0.084344
-0.139691

 $b5M_k =$ 

0.029851
-0.094664
0.210267
-0.350585
0.433667
-0.35288
0.071299
0.275051
-0.413966
0.190224
0.185766
-0.290847
0.021658
0.214573
-0.085804
-0.138134

$$\sum_{k=0}^m \left[ b5M_k \cdot (-1)^k \right] = 1$$



2. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\chi$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ .  
 Определить количество локальных экстремумов, значения параметра  $\chi_{opt}$  и соответствующие им значения погрешностей.

$$\tau 4(\omega) := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega^2)}$$

$$\chi := \gamma$$

$$\beta5(k,\chi,\omega) := 2\chi\cdot(k+1)\cdot\int_0^\infty P7(k,\tau,\chi)\cdot e^{-\lambda\cdot\tau}\cdot\cos(\omega\cdot\tau)\,d\tau$$

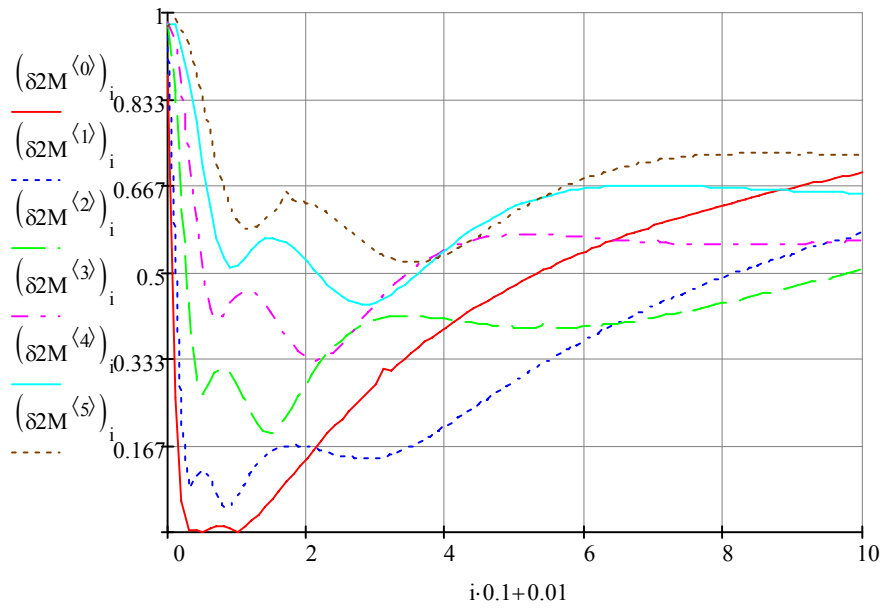
$$b5(k,\chi,\omega) := \beta5(k,\chi,\omega) + \frac{2\cdot(-1)^k\cdot(k+1)\cdot\left[1-\sum_{s=0}^m\left[(-1)^s\cdot\beta5(s,\chi,\omega)\right]\right]}{(m+1)\cdot(m+2)}$$

$$\delta l(\chi,m,\omega) := \sqrt{1-\frac{1}{2\cdot\chi\cdot\tau4(\omega)}\cdot\sum_{k=0}^m\frac{(b5(k,\chi,\omega))^2}{k+1}}$$

$$i:=0..100$$

$$\begin{array}{lll} \delta2V0_1:=\delta l(i\cdot0.1+0.01,2,0) & \delta2V2_1:=\delta l(i\cdot0.1+0.01,2,2) & \delta2V4_1:=\delta l(i\cdot0.1+0.01,2,4) \\ \delta2V1_1:=\delta l(i\cdot0.1+0.01,2,1) & \delta2V3_1:=\delta l(i\cdot0.1+0.01,2,3) & \delta2V5_1:=\delta l(i\cdot0.1+0.01,2,5) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \delta2M^{\langle0\rangle}:=\delta2V0 & \delta2M^{\langle2\rangle}:=\delta2V2 & \delta2M^{\langle5\rangle}:=\delta2V5 \\ \delta2M^{\langle1\rangle}:=\delta2V1 & \delta2M^{\langle3\rangle}:=\delta2V3 & \delta2M^{\langle4\rangle}:=\delta2V4 \end{array}$$



$$\delta 3V0_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 2, 5)$$

$$\delta 3V2_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 4, 5)$$

$$\delta 3V4_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 6, 5)$$

$$\delta 3V1_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 3, 5)$$

$$\delta 3V3_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 5, 5)$$

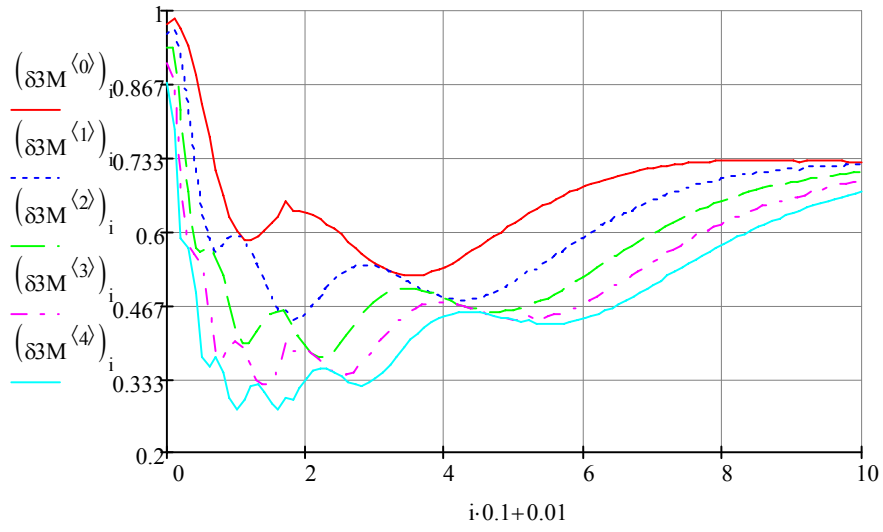
$$\delta 3M^{(0)} := \delta 3V0_1$$

$$\delta 3M^{(2)} := \delta 3V2_1$$

$$\delta 3M^{(4)} := \delta 3V4_1$$

$$\delta 3M^{(1)} := \delta 3V1_1$$

$$\delta 3M^{(3)} := \delta 3V3_1$$



$$\min(\delta 3 M^{\langle 0 \rangle}) = 0.52$$

$$\text{match}(\min(\delta 3 M^{\langle 0 \rangle}), \delta 3 M^{\langle 0 \rangle})_{0.1+0.01} = \begin{pmatrix} 3.41 \\ 3.51 \\ 3.61 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\min M_0} := \text{match}(\min(\delta 3 M^{\langle 0 \rangle}), \delta 3 M^{\langle 0 \rangle})_{1 \cdot 0.1+0.01}$$

$$\min(\delta 3 M^{\langle 1 \rangle}) = 0.439$$

$$\text{match}(\min(\delta 3 M^{\langle 1 \rangle}), \delta 3 M^{\langle 1 \rangle})_{0.1+0.01} = (1.81)$$

$$\chi_{\min M_1} := \text{match}(\min(\delta 3 M^{\langle 1 \rangle}), \delta 3 M^{\langle 1 \rangle})_{0 \cdot 0.1+0.01}$$

$$\min(\delta 3 M^{\langle 2 \rangle}) = 0.372$$

$$\text{match}(\min(\delta 3 M^{\langle 2 \rangle}), \delta 3 M^{\langle 2 \rangle})_{0.1+0.01} = (2.21)$$

$$\chi_{\min M_2} := \text{match}(\min(\delta 3 M^{\langle 2 \rangle}), \delta 3 M^{\langle 2 \rangle})_{0 \cdot 0.1+0.01}$$

$$\min(\delta M^{\langle 3 \rangle}) = 0.318$$

$$\text{match}(\min(\delta M^{\langle 3 \rangle}), \delta M^{\langle 3 \rangle}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.41)$$

$$\chi_{\min M_3} := \text{match}(\min(\delta M^{\langle 3 \rangle}), \delta M^{\langle 3 \rangle})_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$\min(\delta M^{\langle 4 \rangle}) = 0.276$$

$$\text{match}(\min(\delta M^{\langle 4 \rangle}), \delta M^{\langle 4 \rangle}) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.61)$$

$$\chi_{\min M_4} := \text{match}(\min(\delta M^{\langle 4 \rangle}), \delta M^{\langle 4 \rangle})_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$\chi_{\min M} = \begin{pmatrix} 3.51 \\ 1.81 \\ 2.21 \\ 1.41 \\ 1.61 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} j := 0..4 \\ \min(\delta M^{\langle j \rangle}) \end{array}$$

0.52
0.439
0.372
0.318
0.276

3. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\mu$ ,  $m$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ ,  $\chi_{\text{opt}}$ .

$$\omega_1 := 0..5$$

$$\delta V_{\omega_1}^0 := \delta l(\chi_{\min M_0, 2}, \omega_1)$$

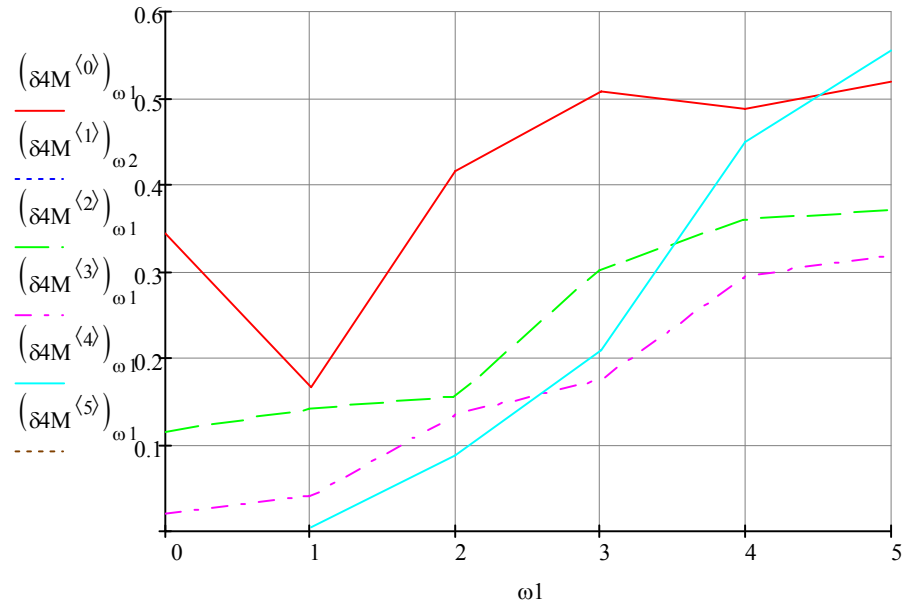
$$\delta V_{\omega_1}^2 := \delta l(\chi_{\min M_2, 4}, \omega_1)$$

$$\delta V_{\omega_1}^4 := \delta l(\chi, 6, \omega_1)$$

$$\delta V_{\omega_1}^1 := \delta l(\chi_{\min M_1, 3}, \omega_1)$$

$$\delta V_{\omega_1}^3 := \delta l(\chi_{\min M_3, 5}, \omega_1)$$

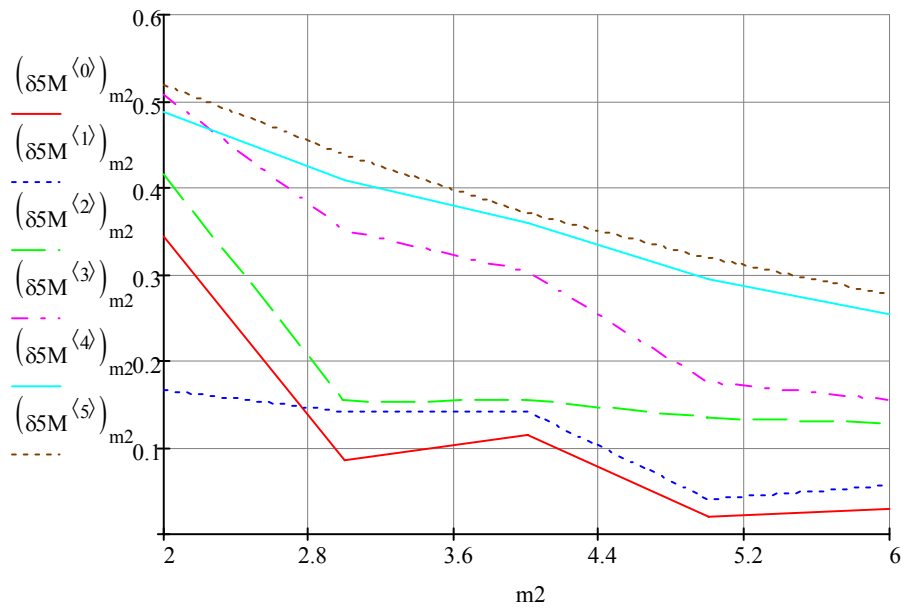
$$\begin{array}{lll}
\delta 4 M^{\langle 0 \rangle} := \delta 4 V 0 & \delta 4 M^{\langle 2 \rangle} := \delta 4 V 2 & \delta 4 M^{\langle 4 \rangle} := \delta 4 V 4 \\
\delta 4 M^{\langle 1 \rangle} := \delta 4 V 1 & \delta 4 M^{\langle 3 \rangle} := \delta 4 V 3 & 
\end{array}$$



$$m 2 := 2..6$$

$$\begin{array}{lll}
\delta 5 V 0_{m 2} := \delta l\left(\chi_{\min M_{m 2-2}, m 2, 0}\right) & \delta 5 V 2_{m 2} := \delta l\left(\chi_{\min M_{m 2-2}, m 2, 2}\right) & \delta 5 V 4_{m 2} := \delta l\left(\chi_{\min M_{m 2-2}, m 2, 4}\right) \\
\delta 5 V 1_{m 2} := \delta l\left(\chi_{\min M_{m 2-2}, m 2, 1}\right) & \delta 5 V 3_{m 2} := \delta l\left(\chi_{\min M_{m 2-2}, m 2, 3}\right) & \delta 5 V 5_{m 2} := \delta l\left(\chi_{\min M_{m 2-2}, m 2, 5}\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\delta 5 M^{\langle 0 \rangle} := \delta 5 V 0 & \delta 5 M^{\langle 2 \rangle} := \delta 5 V 2 & \delta 5 M^{\langle 4 \rangle} := \delta 5 V 4 \\
\delta 5 M^{\langle 1 \rangle} := \delta 5 V 1 & \delta 5 M^{\langle 3 \rangle} := \delta 5 V 3 & \delta 5 M^{\langle 5 \rangle} := \delta 5 V 5
\end{array}$$



4. Построить графические зависимости  $\delta$  от параметра  $\mu$ ,  $m$ ;  $\mu = 0 - 5$ ,  $m = 2 - 6$ ,  $\chi_1, \chi_2$ .

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\chi^1_{m2} := \frac{0.4}{(m2 + 1) \cdot \Delta_t}$$

$$\chi^1_{m2} =$$

1.633
1.225
0.98
0.816
0.7

$$\chi^{1c(mx)} := \frac{0.4}{(mx + 1) \cdot \Delta_t}$$

$$\delta V^0_{\omega 1} := \delta l(\chi^1_{2,2}, \omega 1)$$

$$\delta V^2_{\omega 1} := \delta l(\chi^1_{4,4}, \omega 1)$$

$$\delta V^4_{\omega 1} := \delta l(\chi^1_{6,6}, \omega 1)$$

$$\delta V^1_{\omega 1} := \delta l(\chi^1_{3,3}, \omega 1)$$

$$\delta V^3_{\omega 1} := \delta l(\chi^1_{5,5}, \omega 1)$$

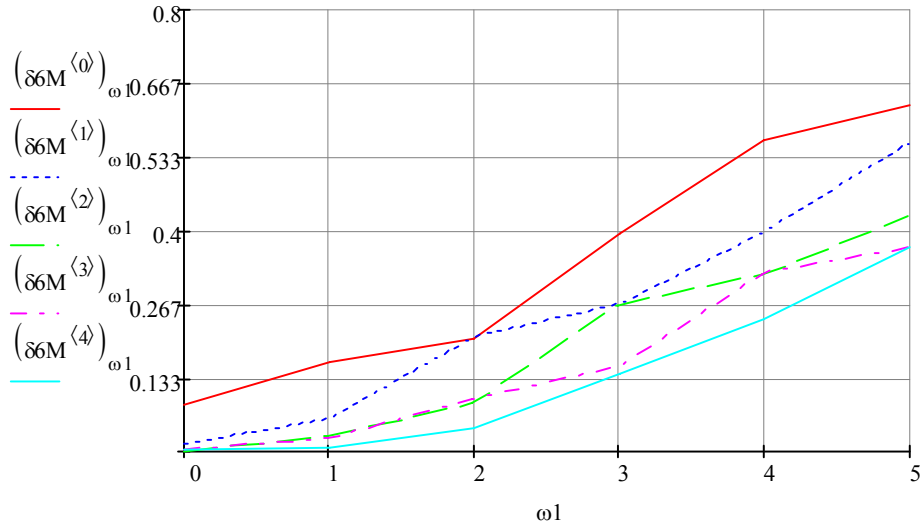
$$\delta M^{\langle 0 \rangle} := \delta V^0$$

$$\delta M^{\langle 2 \rangle} := \delta V^2$$

$$\delta M^{\langle 4 \rangle} := \delta V^4$$

$$\delta M^{\langle 1 \rangle} := \delta V^1$$

$$\delta M^{\langle 3 \rangle} := \delta V^3$$



$$\delta 7V0_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 0)$$

$$\delta 7V2_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 2)$$

$$\delta 7V4_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 4)$$

$$\delta 7V1_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 1)$$

$$\delta 7V3_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 3)$$

$$\delta 7V5_{m2} := \delta l(\chi^1_{m2}, m2, 5)$$

$$\delta 7M^{(0)} := \delta 7V0$$

$$\delta 7M^{(2)} := \delta 7V2$$

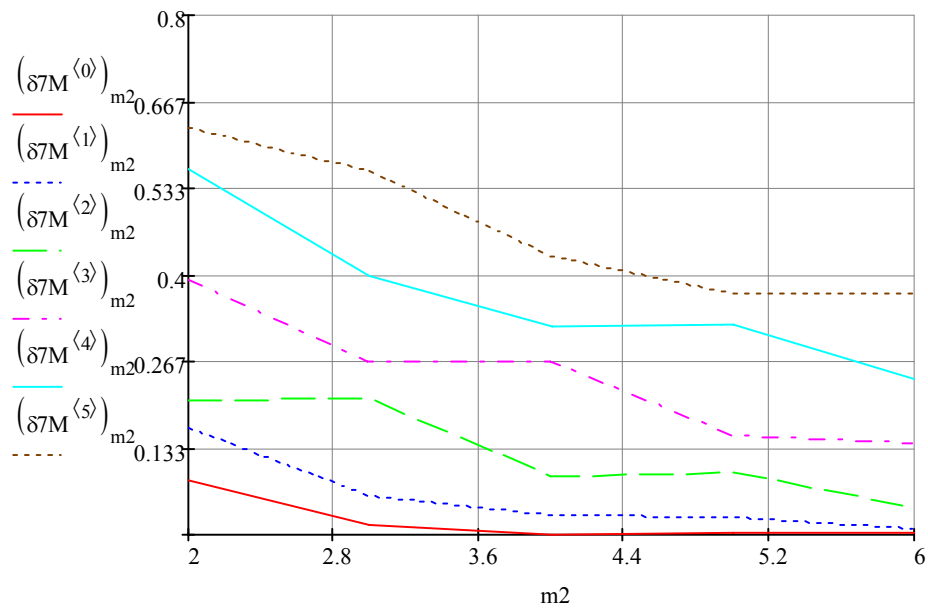
$$\delta 7M^{(4)} := \delta 7V4$$

$$\delta 7M^{(1)} := \delta 7V1$$

$$\delta 7M^{(3)} := \delta 7V3$$

$$\delta 7M^{(5)} := \delta 7V5$$





$$\chi^2_{m2} := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(m2 + 1)}$$

$$\chi^2_{m2} =$$

1.7
1.275
1.02
0.85
0.728

$$\chi^2_{c(mx)} := \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}{(mx + 1)}$$

$$\delta 8 V_{\omega 1}^{0}:=\delta l\left(\chi_{2,2}^2, 2, \omega 1\right)$$

$$\delta 8 V_{\omega 1}^2:=\delta l\left(\chi_{4,4}^2, 4, \omega 1\right)$$

$$\delta 8 V_{\omega 1}^4:=\delta l\left(\chi_{6,6}^2, 6, \omega 1\right)$$

$$\delta 8 V_{\omega 1}^1:=\delta l\left(\chi_{3,3}^2, 3, \omega 1\right)$$

$$\delta 8 V_{\omega 1}^3:=\delta l\left(\chi_{5,5}^2, 5, \omega 1\right)$$

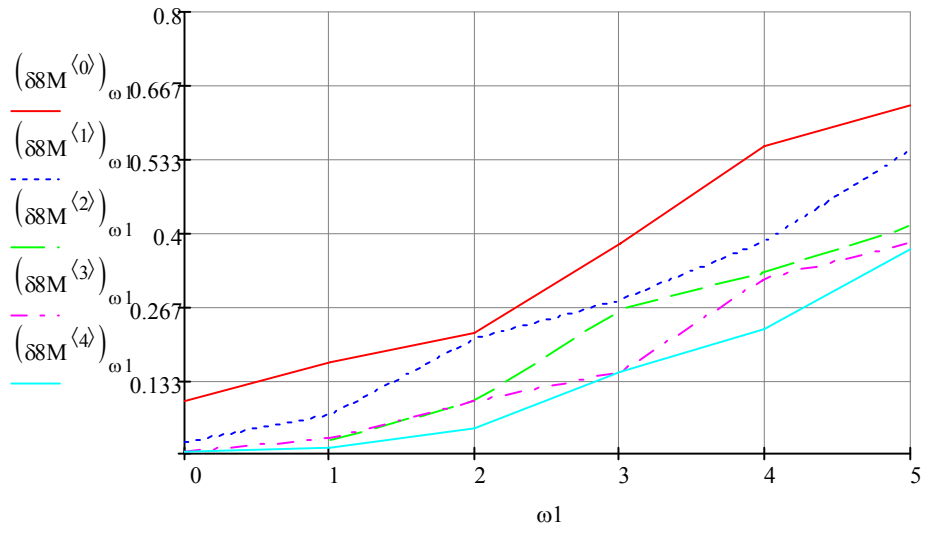
$$\delta 8 M^{\langle 0\rangle}:=\delta 8 V 0$$

$$\delta 8 M^{\langle 2\rangle}:=\delta 8 V 2$$

$$\delta 8 M^{\langle 4\rangle}:=\delta 8 V 4$$

$$\delta 8 M^{\langle 1\rangle}:=\delta 8 V 1$$

$$\delta 8 M^{\langle 3\rangle}:=\delta 8 V 3$$



$$\partial V0_{m2} := \delta l(\chi^2_{m2}, m2, 0)$$

$$\partial V2_{m2} := \delta l(\chi^2_{m2}, m2, 2)$$

$$\partial V4_{m2} := \delta l(\chi^2_{m2}, m2, 4)$$

$$\partial V1_{m2} := \delta l(\chi^2_{m2}, m2, 1)$$

$$\partial V3_{m2} := \delta l(\chi^2_{m2}, m2, 3)$$

$$\partial V5_{m2} := \delta l(\chi^2_{m2}, m2, 5)$$

$$\partial M^{⟨0⟩} := \partial V0$$

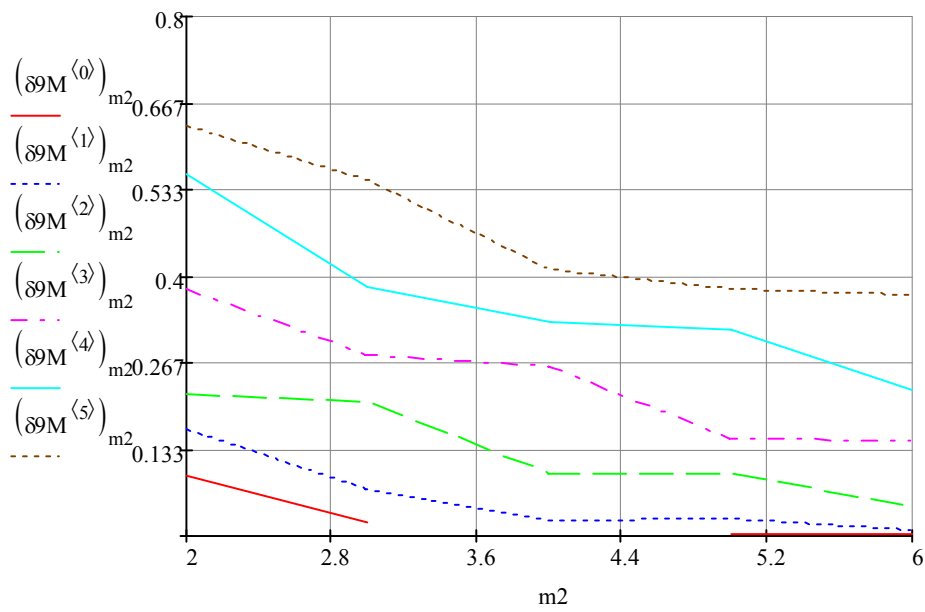
$$\partial M^{⟨2⟩} := \partial V2$$

$$\partial M^{⟨4⟩} := \partial V4$$

$$\partial M^{⟨1⟩} := \partial V1$$

$$\partial M^{⟨3⟩} := \partial V3$$

$$\partial M^{⟨5⟩} := \partial V5$$



5. Построить модели корреляционной функции;  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 5$ ,  $m = 5/10$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_{opt}$ .

$$\rho(\tau, m, \chi) := \sum_{k=0}^m (b_5(k, \chi, \omega) \cdot P_7(k, \tau, \chi))$$

$$\Delta\tau := 0.081649 \quad N_x := 37$$

$$\tau := 0, 0 + \Delta\tau \dots (N_x - 1) \cdot \Delta\tau$$

$$\rho t(\tau) := e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$

$$m\_1 := 5$$

$$j := 0 \dots N_x - 1$$

$$\beta_5 M \chi_1 m\_1_k := 2 \chi_1 c(m\_1) \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P_7(k, \tau, \chi_1 c(m\_1)) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

$$b_5 M \chi_1 m\_1_k := \beta_5 M \chi_1 m\_1_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta_5 M \chi_1 m\_1_s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

$$\rho_5 \chi_1(\tau) := \sum_{k=0}^{m\_1} \left( b_5 M \chi_1 m\_1_k \cdot P_7(k, \tau, \chi_1 c(m\_1)) \right)$$

$$\beta_5 M \chi_2 m\_1_k := 2 \chi_2 c(m\_1) \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P_7(k, \tau, \chi_2 c(m\_1)) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

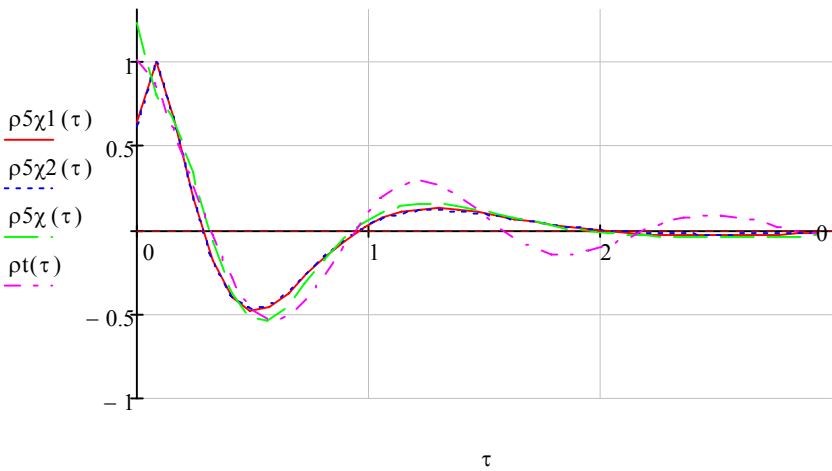
$$b_5 M \chi_2 m\_1_k := \beta_5 M \chi_2 m\_1_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta_5 M \chi_2 m\_1_s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

$$\rho5\chi2(\tau) := \sum_{k=0}^{m-1} \left( b5M\chi2m-1_k \cdot P7(k,\tau,\chi2c(m-1)) \right)$$

$$\beta5M\chi m-1_k := 2\chi\min M_{m-1-2} \cdot (k+1) \cdot \int_0^\infty P7\Big(k,\tau,\chi\min M_{m-1-2}\Big) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$b5M\chi m-1_k := \beta5M\chi m-1_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta5M\chi m-1_s \right] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$\rho5\chi(\tau) := \sum_{k=0}^{m-1} \left( b5M\chi m-1_k \cdot P7\Big(k,\tau,\chi\min M_{m-1-2}\Big) \right)$$



$$\delta3V\delta_1 := \delta l(i \cdot 0.1 + 0.01, 10, 5)$$

$$\delta3M^{\langle8\rangle} := \delta3V\delta$$

$$\min\big(\delta3M^{\langle8\rangle}\big) = 0.143$$

$$\mathit{match}\Big(\min\big(\delta3M^{\langle8\rangle}\big),\delta3M^{\langle8\rangle}\Big) \cdot 0.1 + 0.01 = (1.11)$$

$$\chi\min M_8 := \mathit{match}\Big(\min\big(\delta3M^{\langle8\rangle}\big),\delta3M^{\langle8\rangle}\Big)_0 \cdot 0.1 + 0.01$$

$$m\_2 := 10$$

$$\beta 5 M \chi 1 m\_2_k := 2 \chi 1 c(m\_2) \cdot (k + 1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \tau, \chi 1 c(m\_2)) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$b5 M \chi 1 m\_2_k := \beta 5 M \chi 1 m\_2_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta 5 M \chi 1 m\_2_s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

$$\rho 10 \chi 1(\tau) := \sum_{k=0}^{m\_2} \left( b5 M \chi 1 m\_2_k \cdot P7(k, \tau, \chi 1 c(m\_2)) \right)$$

$$\beta 5 M \chi 2 m\_2_k := 2 \chi 2 c(m\_2) \cdot (k + 1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \tau, \chi 2 c(m\_2)) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

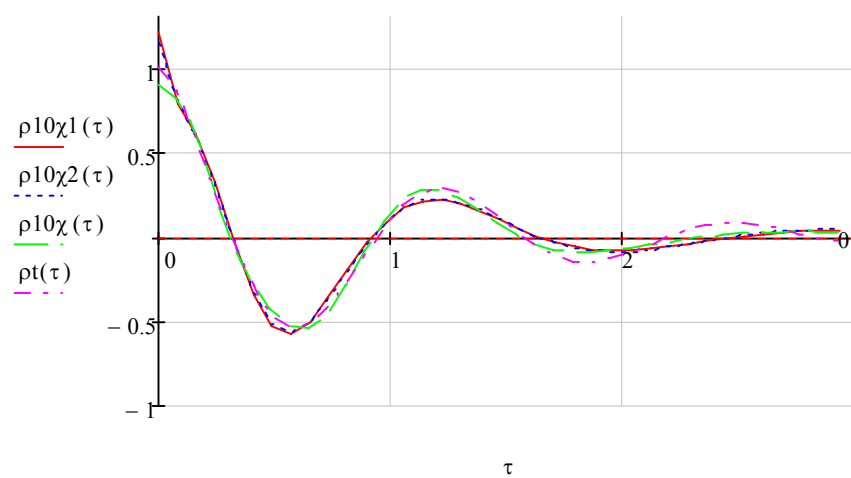
$$b5 M \chi 2 m\_2_k := \beta 5 M \chi 2 m\_2_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta 5 M \chi 2 m\_2_s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

$$\rho 10 \chi 2(\tau) := \sum_{k=0}^{m\_2} \left( b5 M \chi 2 m\_2_k \cdot P7(k, \tau, \chi 2 c(m\_2)) \right)$$

$$\beta 5 M \chi m\_2_k := 2 \chi \min M_{m\_2-2} \cdot (k + 1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \tau, \chi \min M_{m\_2-2}) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$b5 M \chi m\_2_k := \beta 5 M \chi m\_2_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k + 1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta 5 M \chi m\_2_s \right] \right]}{(m + 1) \cdot (m + 2)}$$

$$\rho 10 \chi(\tau) := \sum_{k=0}^{m\_2} \left( b5 M \chi m\_2_k \cdot P7(k, \tau, \chi \min M_{m\_2-2}) \right)$$



## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 7. «АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ»

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных плотностей мощности случайных процессов ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega_0 := 3$$

$$m := 12$$

$$k := 0..m$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega_0}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\gamma := \frac{0.4}{(m+1) \cdot \Delta_t}$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k+s+1, s+1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta_5(k, \gamma) := 2\gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\beta M_k := \beta_5(k, \gamma)$$

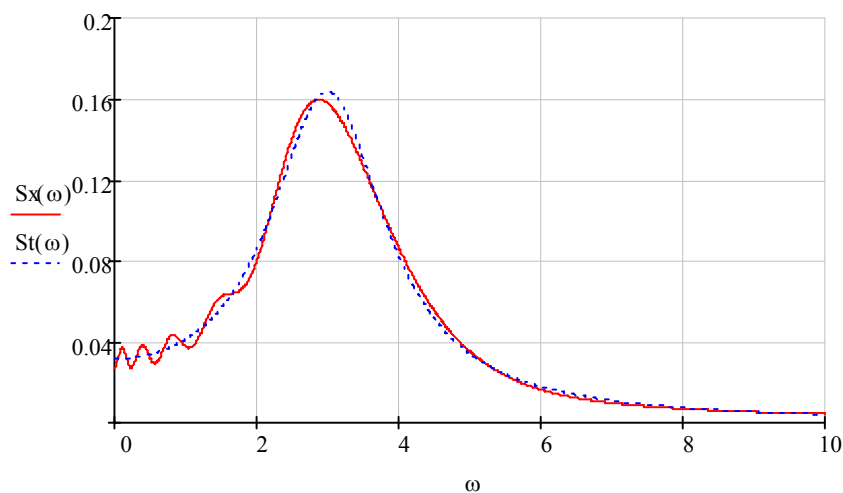
2. Найти модель спектральной плотности мощности по параметрам нормированной корреляционной функции  $\beta_k$ . Проверить условие нормировки.

$$\phi(\omega, k) := \text{atan} \left[ \frac{\omega}{(k+1)\gamma} \right]$$

$$S_X(\omega) := \frac{1}{\gamma \cdot \pi} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ \frac{\beta M_k}{k+1} \cdot \cos(\phi(\omega, k)) \cdot \cos \left[ \phi(\omega, k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{k-1} \phi(\omega, s) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \right] \right]$$

$$St(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2]} + \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2]} \right]$$

$$\omega := 0,0 + 0,01..10$$



Проверка условия нормировки модели нормированной корреляционной функции.

$$\sum_{k=0}^m [\beta M_k \cdot (-1)^k] = 1.004$$



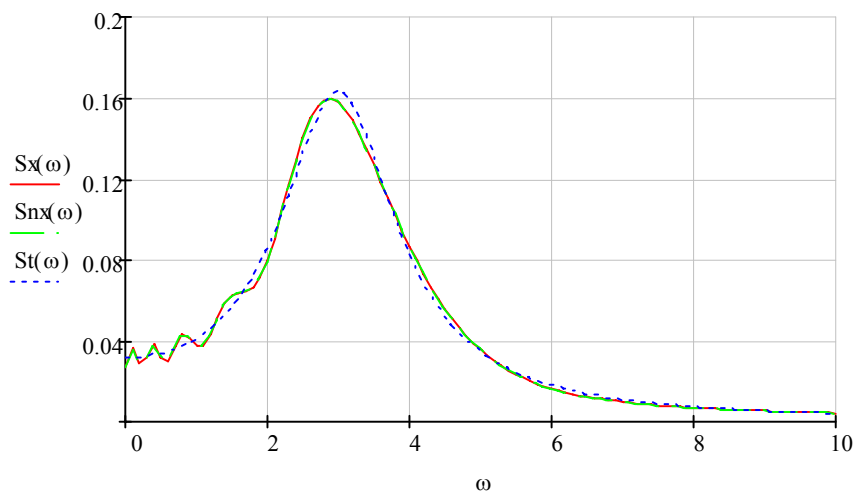
3. Найти модель спектральной плотности мощности по параметрам нормированной корреляционной функции  $b_k$ . Проверить условие нормировки.

$$b5(k, \gamma) := \beta M_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta M_s \right] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$S_{nx}(\omega) := \frac{1}{\gamma \cdot \pi} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ \frac{b5(k, \gamma)}{k+1} \cdot \cos(\phi(\omega, k)) \cdot \cos \left[ \phi(\omega, k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{k-1} \phi(\omega, s) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \right] \right]$$

$$St(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2]} + \frac{1}{[\lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2]} \right]$$

$$\omega := 0, 0 + 0.1 \dots 10$$



Проверка условия нормировки модели нормированной корреляционной функции при ограничении на модель.

$$\sum_{k=0}^m [b5(k, \gamma) \cdot (-1)^k] = 1$$

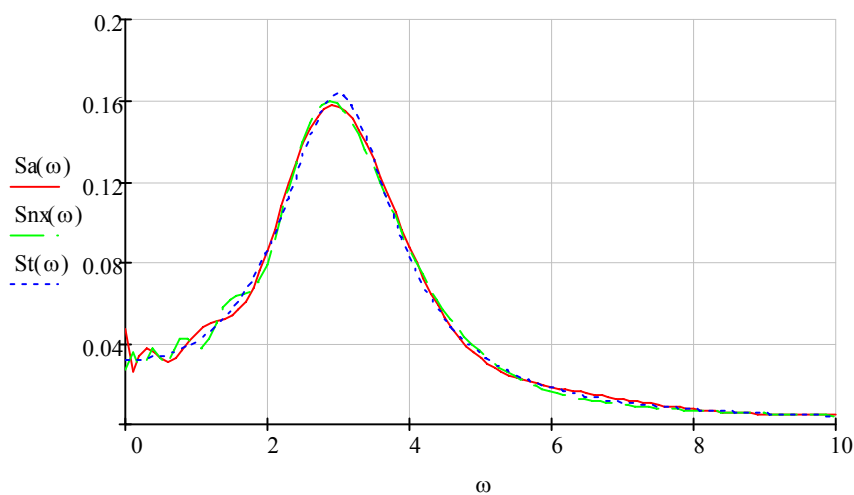
4. Для той же модели спектральной плотности мощности найти корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$ . Построить ортогональную модель спектральной плотности мощности. Проверить условие нормировки.

$$\beta s(k, \gamma) := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \omega, \gamma) \cdot St(\omega) d\omega$$

$$\beta sM_k := \beta s(k, \gamma)$$

$$c5(k, \gamma) := \beta sM_k + \frac{\frac{\gamma}{2} - \sum_{s=0}^m \frac{\beta sM_s}{s+1}}{\sum_{s=0}^m \frac{1}{s+1}}$$

$$Sa(\omega) := \sum_{k=0}^m (c5(k, \gamma) \cdot P7(k, \omega, \gamma))$$



Проверка условия нормировки модели спектральной плотности мощности.

$$2 \cdot \sum_{k=0}^m \frac{c5(k, \gamma)}{2\gamma \cdot (k + 1)} = 0.5$$

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 8. «АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ»

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимации спектральных функций случайных процессов ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega_0 := 5$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\gamma := 0.30619$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k+s+1, s+1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta_5(k) := 2\gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) d\tau$$

$$\beta M_k := \beta_5(k)$$

$$b_5(k) := \beta M_k + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta M_s \right] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

2. Построить спектральную функцию и ее ортогональную модель.

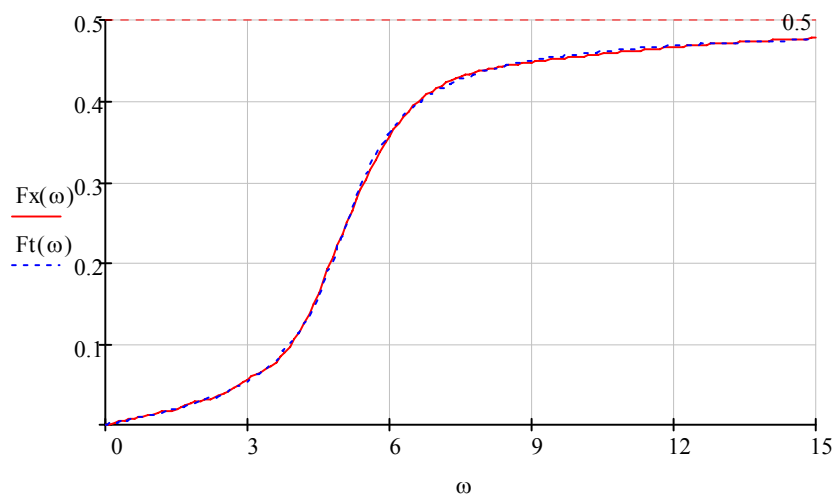
$$\phi_1(\omega) := \text{atan}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\lambda}\right)$$

$$\phi_2(\omega) := \text{atan}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\lambda}\right)$$

$$F_X(\omega) := \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ b_5(k) \cdot \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot \text{atan} \left[ \frac{\omega}{\gamma \cdot (s + 1)} \right] \right] \right]$$

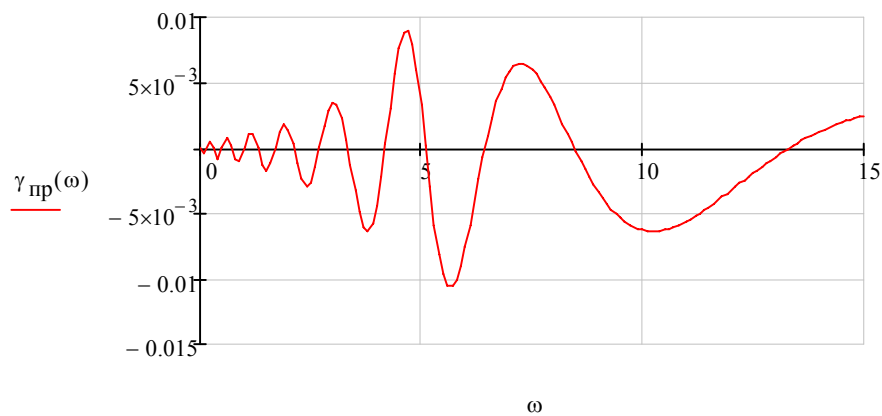
$$F_t(\omega) := \frac{1}{2\pi} \cdot (\phi_1(\omega) + \phi_2(\omega))$$

$$\omega := 0, 0 + 0.1 \dots 15$$



3. Найти приведенную погрешность определения спектральной функции ее ортогональной моделью. Построить график.

$$\gamma_{\text{пр}}(\omega) := \frac{F_X(\omega) - F_t(\omega)}{0.5}$$



# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 9. «АППРОКСИМАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК»

**Цель работы:** изучение методов и приобретение практических навыков при аппроксимативном анализе корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции, выражения для оценки интервалов корреляции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega_0 := 5$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 0.02}{\left| \left( \frac{\omega_0}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\gamma := \frac{0.4}{(m+1) \cdot \Delta_t}$$

$$\gamma = 0.306$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k+s+1, s+1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta_5(k) := 2\gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\beta_{5_k} := \beta_5(k)$$

$$b_5(k) := \beta_{5_k} + \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot (k+1) \cdot \left[ 1 - \sum_{s=0}^m \left[ (-1)^s \cdot \beta_{5_s} \right] \right]}{(m+1) \cdot (m+2)}$$

$$\tau_{20k} := \frac{1}{\gamma} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{b_5(k)}{k+1}$$

$$\tau_{40k} := \frac{1}{2\gamma} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{b_5(k)^2}{k+1}$$

2. Определить относительные погрешности оценки интервалов корреляции.

$$\tau_{2k} := \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_0^2}$$

$$\tau_{4k} := \frac{2\lambda^2 + \omega_0^2}{4\lambda(\lambda^2 + \omega_0^2)}$$

$$\gamma_{1cm} := \frac{\tau_{20k} - \tau_{2k}}{\tau_{2k}}$$

$$\gamma_{2cm} := \frac{\tau_{40k} - \tau_{4k}}{\tau_{4k}}$$

$$\gamma_{1cm} = -0.511$$

$$\gamma_{2cm} = -0.011$$

3. Для заданной модели спектральной плотности мощности с использованием параметров модели корреляционной функции определить эквивалентную ширину спектра мощности по аналитическим выражениям и по параметрам ортогональной модели корреляционной функции.

$$\omega_e := \sqrt{(2 \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2}) - \omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$\omega_e = 4.999$$

$$\Delta\omega_e := \omega_e + \frac{\pi \cdot [\lambda^2 + (\omega_e - \omega_0)^2] \cdot [\lambda^2 + (\omega_e + \omega_0)^2]}{4\lambda \cdot (\lambda^2 + \omega_e^2 + \omega_0^2)}$$

$$\Delta\omega_e = 6.554$$

$$\phi(\omega, k) := \operatorname{atan}\left[\frac{\omega}{(k+1)\gamma}\right]$$

$$S_X(\omega) := \frac{1}{\gamma \cdot \pi} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ \frac{b_5(k)}{k+1} \cdot \cos(\phi(\omega, k)) \cdot \cos\left[\phi(\omega, k) + \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ 2 \left( \sum_{s=0}^{k-1} \phi(\omega, s) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \right] \right]$$

$$\omega_0_e := 4.995$$

$$\Delta\omega_0_e := \omega_0_e + \frac{1}{Sx(\omega_0_e)} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^m \left[ b5(k) \cdot \left[ (-1)^k - \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k,s) \cdot \text{combin}(k+s+1,s+1) \cdot (-1)^s \cdot \text{atan} \left[ \frac{\omega_0_e}{(s+1)\gamma} \right] \right] \right] \right]$$

$$\Delta\omega_0_e = 6.811$$

4. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности по параметрам модели корреляционной функции.

$$\gamma_{3\text{ cm}} := \frac{\Delta\omega_0_e - \Delta\omega_e}{\Delta\omega_e}$$

$$\gamma_{3\text{ cm}} = 0.039$$

5. Построить ортогональную модель спектральной плотности мощности и найти корректирующие коэффициенты  $\zeta_k$ . Определить эквивалентную ширину спектра мощности по параметрам модели спектра мощности.

$$St(\omega) := \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\lambda^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$$

$$\beta 5s(k) := 2\gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \omega, \gamma) \cdot St(\omega) d\omega$$

$$\beta 5s_k := \beta 5s(k)$$

$$c5(k) := \beta 5s_k + \frac{\frac{\gamma}{2} - \sum_{s=0}^m \frac{\beta 5s_s}{s+1}}{\sum_{s=0}^m \frac{1}{s+1}}$$

$$\omega := 0,0 + 0.2..20$$

$$Sa(\omega) := \sum_{k=0}^m (c5(k) \cdot P7(k, \omega, \gamma))$$

$$\Delta\omega_{01_e} := \omega_{0_e} + \frac{\int_{\omega_{0_e}}^{\infty} Sa(\omega) d\omega}{Sa(\omega_{0_e})}$$

$$\Delta\omega_{01_e} = 6.738$$

6. Определить относительные погрешности оценки эквивалентной ширины спектра мощности по параметрам ортогональной модели спектральной плотности мощности.

$$\gamma_{cm}^4 := \frac{\Delta\omega_{01_e} - \Delta\omega_e}{\Delta\omega_e}$$

$$\gamma_{cm}^4 = 0.028$$



АЛГОРИТМЫ РЕКУРСИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Вид модели	Генерирующий алгоритм	Параметры алгоритма
1	2	3
$e^{-\lambda \tau }$	$y_0 = x_0$ $y_n = a_0 x_n + b_1 y_{n-1}$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $a_0 = \sqrt{1-p^2}$ ; $b_1 = p$
$e^{-\lambda \tau }(1 + \lambda \tau )$	$y_0 = x_0$ $y_1 = a_0 x_1 +$ $+ a_1 x_0 +$ $+ b_1 y_0$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $\alpha_0 = p^3(1+\gamma) - p(1-\gamma)$ ; $\alpha_1 = 1 - 4p^2\gamma - p^4$ ; $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ ; $a_1 = \frac{\alpha_1}{a_0}$ ; $b_1 = 2p$ ; $b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda \tau }(1 - \lambda \tau )$	$y_n = a_0 x_n +$ $+ a_1 x_{n-1} +$ $+ b_1 y_{n-1} +$ $+ b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $\alpha_0 = p^3(1-\gamma) - p(1+\gamma)$ ; $\alpha_1 = 1 + 4p^2\gamma - p^4$ ; $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ ; $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}$ ; $b_1 = 2p$ ; $b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda \tau }\left(1 + \lambda \tau  + \frac{\lambda^2 \tau^2}{3}\right)$	$y_0 = x_0$ $y_1 = a_0 x_1 +$ $+ b_1 y_0$ $y_2 = a_0 x_2 +$ $+ a_1 x_1 +$ $+ a_2 x_0 +$ $+ b_1 y_1 +$ $+ b_2 y_0$ $y_n = a_0 x_n +$ $+ a_1 x_{n-1} +$ $+ a_2 x_{n-2} +$ $+ b_1 y_{n-1} +$ $+ b_2 y_{n-2} +$ $+ b_3 y_{n-3}$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $\alpha_0 = p^4(\gamma^2/3 + \gamma + 1) - p^2(\gamma^2/3 - \gamma + 1)$ ; $\alpha_1 = p^5(\gamma^2/3 - \gamma - 2) - 6\gamma p^3 - p(\gamma^2/3 + \gamma - 2)$ ; $\alpha_2 = p^6 - p^4(2\gamma^2 - 6\gamma - 3) + p^2(2\gamma^2 + 6\gamma - 3) - 1$ ; $y_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 + 8\alpha_0^2}}{2\alpha_0}$ ; $a_0 = \sqrt{-\alpha_0 \frac{(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})}{2}}$ ; $a_2 = \sqrt{-\alpha_0 \frac{2}{(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})}}$ ; $a_1 = -\alpha_2(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4})(y_2 + \sqrt{y_2^2 - 4})$ ; $b_1 = 3p$ ; $b_2 = -3p^2$ ; $b_3 = p^3$
$e^{-\lambda \tau } \cos \omega_0 \tau$	$y_0 = x_0$ $y_1 = a_0 x_1 +$ $+ a_1 x_0 +$ $+ b_1 y_0$	$\gamma = \lambda \Delta t$ ; $p = e^{-\gamma}$ ; $\gamma_0 = \omega_0 \Delta t$ ; $\alpha_0 = p(p^2 - 1)\cos \gamma_0$ ; $\alpha_1 = 1 - p^4$ ; $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}$ ; $a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0}$ ; $b_1 = 2p \cos \gamma_0$ ; $b_2 = -p^2$

1	2	3
$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$	$y_n = a_0 x_n +$ $+ a_1 x_{n-1} +$ $+ b_1 y_{n-1} +$ $+ b_2 y_{n-2}$	$\gamma = \lambda \Delta t; \quad p = e^{-\gamma}; \quad \gamma_0 = \omega_0 \Delta t;$ $\alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 + \frac{\lambda}{\omega_0} p(p^2 + 1) \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 - 4p^2 \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}; \quad a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0};$ $b_1 = 2p \cos \gamma_0; \quad b_2 = -p^2$
$e^{-\lambda \tau } \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \omega_0  \tau  \right)$		$\gamma = \lambda \Delta t; \quad p = e^{-\gamma}; \quad \gamma_0 = \omega_0 \Delta t;$ $\alpha_0 = p(p^2 - 1) \cos \gamma_0 - \frac{\lambda}{\omega_0} p(p^2 + 1) \sin \gamma_0;$ $\alpha_1 = 1 - p^4 + 4p^2 \frac{\lambda}{\omega_0} \sin \gamma_0 \cos \gamma_0;$ $a_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0^2}}{2}}; \quad a_1 = \frac{\alpha_0}{a_0};$ $b_1 = 2p \cos \gamma_0; \quad b_2 = -p^2$

## АИС КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

При проектировании разработанной автоматизированной системы был использован язык UML – унифицированный язык моделирования [15].

Этот язык позволит использовать объектно-ориентированные понятия уже на этапе моделирования, явным образом обеспечить взаимосвязь между базовыми понятиями для моделей концептуального и физического уровней и обеспечить масштабируемость модели. К тому же он понятен аналитикам и программистам и поддерживается практически всеми современными инструментальными средствами.

При проектировании системы использовалась среда разработки Rational Rose 2000e [15], которая базируется на унифицированном языке моделирования UML.

В качестве инструментального средства разработки был выбран объектно-ориентированный язык программирования Delphi (в 1 - 6 версиях среды разработки Delphi язык называется Object Pascal, однако в 7 версии он переименован в Delphi) и среда разработки приложений Borland Delphi v 7.0. Такой выбор можно аргументировать наличием ряда свойств у среды разработки (IDE – Integrated Development Environment – интегрированная среда разработки), позволяющих сделать процесс создания приложения сравнительно быстрым, обладающим малой трудоемкостью и удобством в создании интерфейсной части.

На рисунках П 17.1 – П 17.2 приведены диаграммы вариантов использования «Аппроксимативный анализ ВКФ» и «Аппроксимативный анализ СПМ» и соответствующие им диаграммы деятельности (см. рисунки П 17.3 – П 17.4), а также диаграмма классов всей системы, представленная на рисунке П 17.5.

В качестве основного подхода к реализации системы, целесообразного с точки зрения современных средств программирования, был принят объектно-ориентированный подход.

На рисунке П 17.6 представлена структурная схема разработанной автоматизированной системы, где цифровыми эквивалентами указаны соответствующие ей подсистемы:

1. Подсистема генерации источника случайного процесса;
2. Подсистема настройки оптимальных параметров;
3. Подсистема фильтрации;
4. Подсистема формирования взаимной корреляционной функции;
5. Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции;
6. Подсистема построения модели спектральной плотности мощности;
7. Подсистема построения модели спектральной функции;
8. Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности;
9. Подсистема восстановления взаимной корреляционной функции;
10. Подсистема построения корреляционных функций специального вида;
11. Подсистема исследования ортогональных полиномов и функций;
12. Подсистема имитационного моделирования;
13. Подсистема ввода-вывода;
14. Подсистема экспорта данных в MS Word;
15. Подсистема экспорта данных в MS Excel.

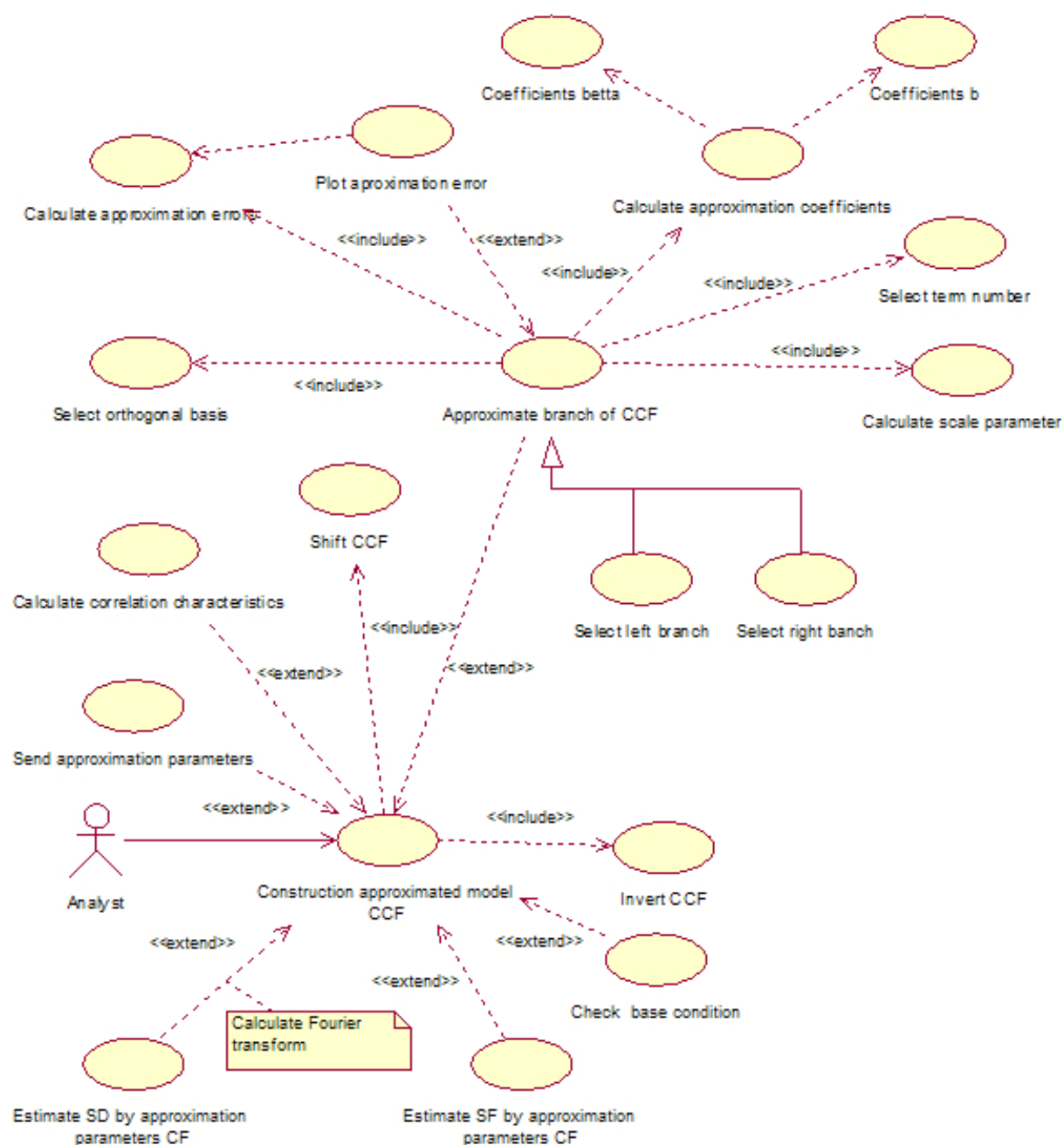


Рисунок П 17.1 – Диаграмма вариантов использования «Аппроксимативный анализ ВКФ»

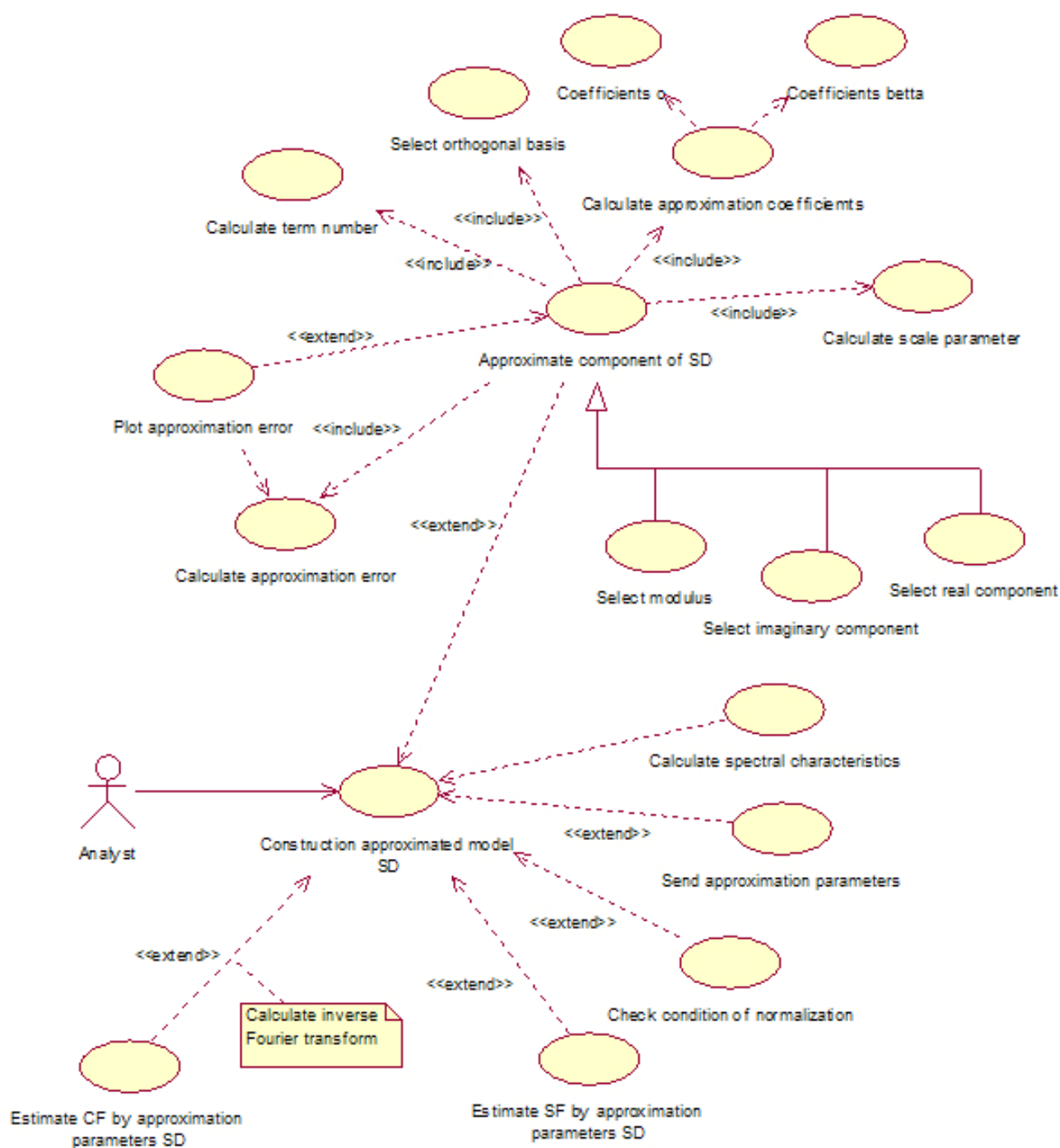


Рисунок П 17.2 – Диаграмма вариантов использования «Аппроксимативный анализ СПМ»

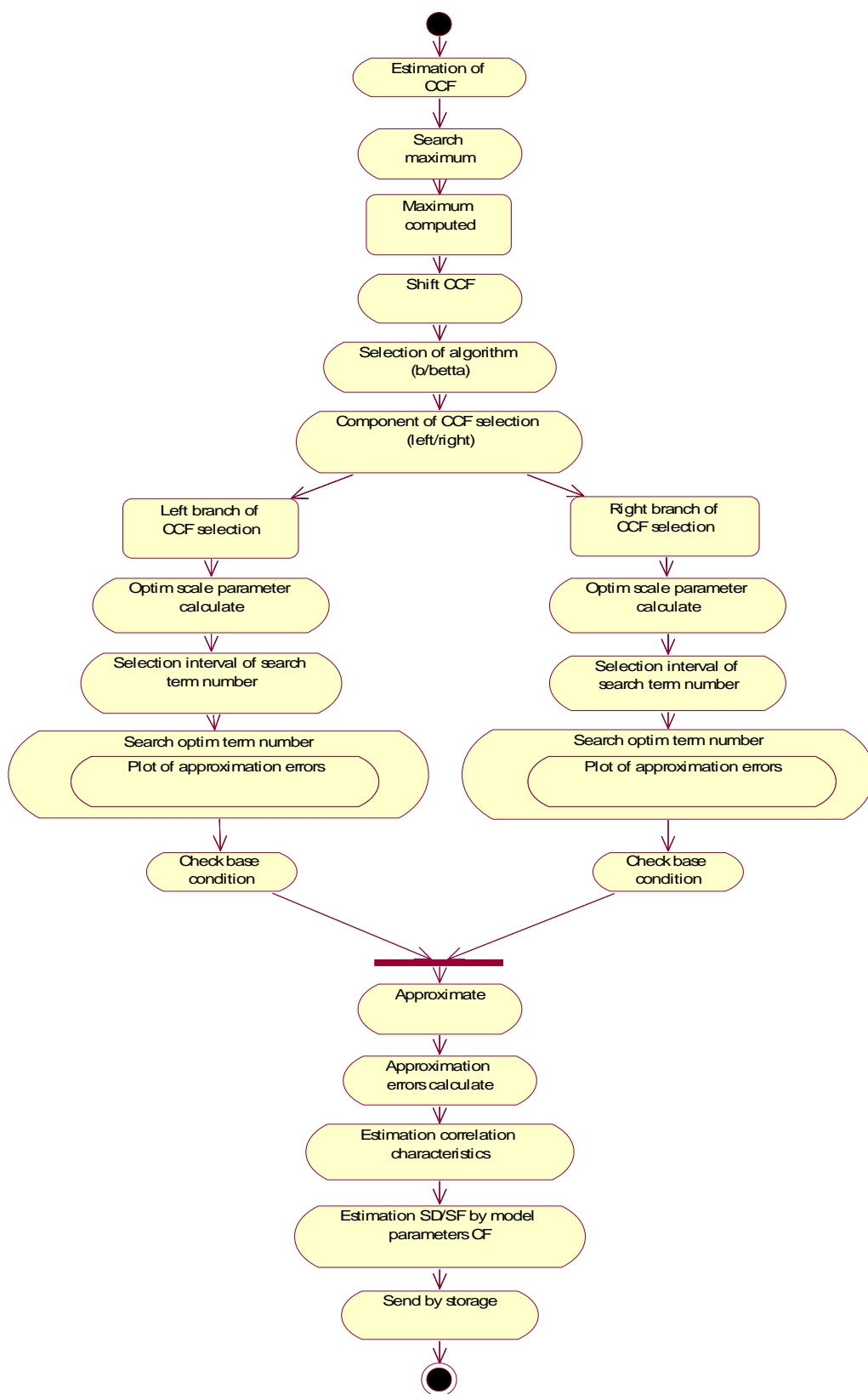


Рисунок П 17.3 – Диаграмма деятельности «Аппроксимация ВКФ»

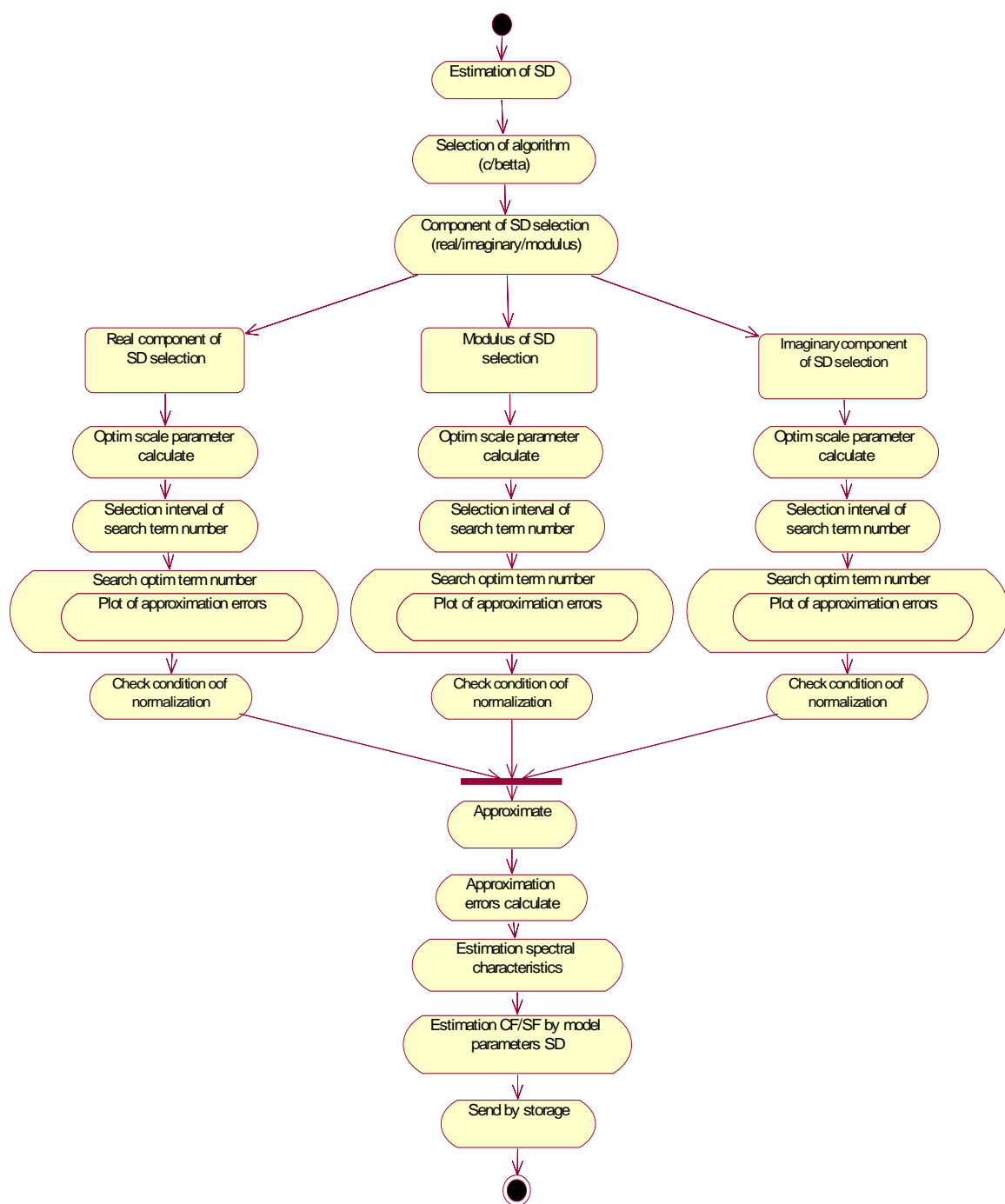


Рисунок П 17.4 – Диаграмма деятельности «Аппроксимация СПМ»

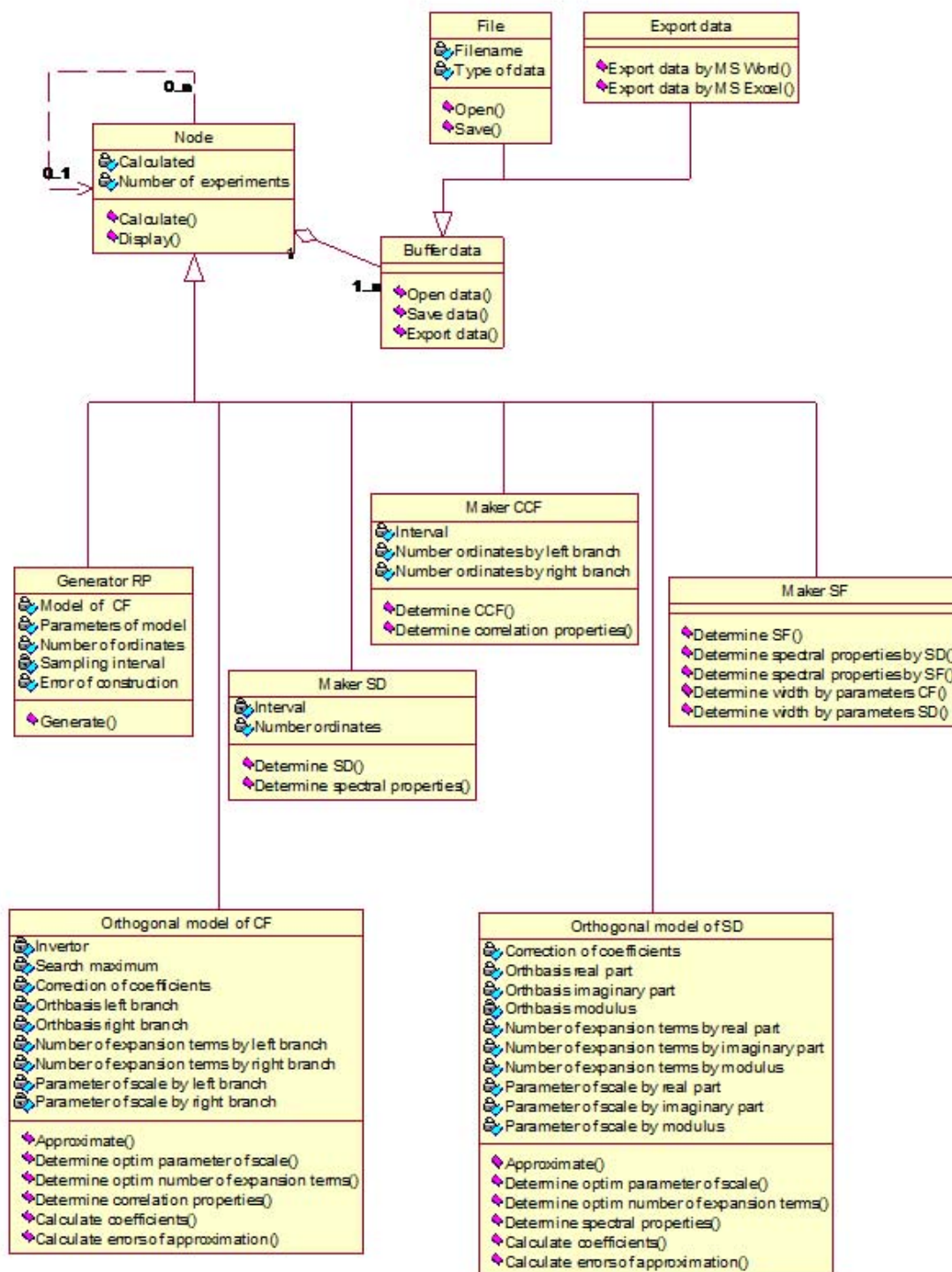


Рисунок П 17.5 – Диаграмма классов автоматизированной системы





**Подсистема формирования взаимной корреляционной функции** позволяет построить взаимную корреляционную функцию (либо автокорреляционную функцию). При этом пара процессов, поступающих из подсистемы фильтрации, центрируется и нормируется. Для проверки качества генерирования также имеется возможность наложения теоретической кривой.

**Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции** является одной из двух основных в разработанной автоматизированной системе (на рисунке обозначена жирной линией). Подсистема предназначена для аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями из семейств Якоби и Сонина-Лагерра. Всего имеется набор из восьми ортогональных функций с различными параметрами ортогональных базисов: Якоби  $(-0,5, 0)$ ; Якоби  $(0,5, 0)$ ; Якоби  $(0, 0)$  (Лежандра); Якоби  $(1, 0)$ ; Якоби  $(2, 0)$ ; Сонина-Лагерра  $(0)$  (Лагерра); Сонина-Лагерра  $(1)$ ; Сонина-Лагерра  $(2)$ .

Помимо выбора ортогонального базиса можно произвести расчет оптимальных параметров аппроксимации в соответствии с минимумом квадратической погрешности аппроксимации. К параметрам аппроксимации относятся коэффициенты разложения Фурье, параметр масштаба, число членов разложения ряда. Методика аппроксимации корреляционных функций с помощью ортогональных разложений описана в работе [21]. По построенной модели определяются обобщенные корреляционные характеристики.

**Подсистема построения модели спектральной плотности мощности** предназначена для построения взаимной спектральной плотности мощности и ее составляющих: реальная компонента, мнимая компонента, фаза и модуль спектральной плотности мощности – по параметрам аппроксимативной модели взаимной корреляционной функции. По построенному спектру определяются обобщенные спектральные характеристики. Для проверки качества аппроксимации имеется возможность наложения теоретической кривой.

**Подсистема построения модели спектральной функции** предназначена для построения спектральной функции по параметрам модели корреляционной функции и спектральной плотности мощности, а также исследования обобщенных спектральных характеристик.

**Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности** является второй из двух основных. Подсистема предназначена для аппроксимации выбранной компоненты спектральной плотности мощности (действительной или мнимой). Набор ортогональных функций аналогичен тому, что описан в подсистеме 5. Методика аппроксимации спектральных плотностей мощности с помощью ортогональных разложений описана в работе [21].

**Подсистема восстановления взаимной корреляционной функции** предназначена для восстановления взаимной корреляционной (автокорреляционной) функции по параметрам моделей действительной и мнимой частей спектральной плотности мощности. Имеется возможность наложения как теоретической кривой, если исходная корреляционная функция была сгенерирована, так и взаимной корреляционной функции из подсистемы 4.

**Подсистема построения корреляционных функций специального вида** позволяет построить корреляционные функции идеального белого шума и идеального полосового шума, которые физически сложно реализуемы, с заданием входных параметров. Передав построенную функцию на подсистему 4, можно изучить ее корреляционно-спектральные характеристики.

**Подсистема исследования ортогональных полиномов и функций** предназначена для построения ортогональных полиномов и функции, исследования их поведения на выбранном сегменте ортогональности и общих свойств [21].

**Подсистема имитационного моделирования** позволяет проводить имитационное моделирование и провести анализ разработанных алгоритмов корреляционно-спектрального анализа на адекватность и пригодность при обработке экспериментальных данных. Следует заметить, что данная подсистема связана с подсистемами, соответствующими цифровым эквивалентам 1, 3 – 12 (см. рисунок П 17.6), из которых экспортируются данные для последующей обработки. Данная подсистема содержит результаты моделирования в виде отчета, а исходные параметры для моделирования можно выбрать в подсистемах, указанных выше.

**Подсистема ввода-вывода** предназначена для открытия из файла и сохранения в файл определенного формата выбранной функциональной зависимости и ее характеристик.

**Подсистема экспорта данных в MS Word** предназначена для формирования отчетов определенной структуры из активной в данный момент подсистемы в текстовый редактор, для их последующего редактирования либо печати.

**Подсистема экспорта данных в MS Excel** позволяет выгружать результаты имитационного моделирования из аналогичной подсистемы в MS Excel для последующего анализа.

## РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

Основные функции, выполняемые разработанной системой:

- Генерирование случайного процесса с заданным видом корреляционной функции;
- Построение корреляционной функции и фазового портрета по исходному процессу;
- Построение взаимной корреляционной функции и фазового портрета по паре процессов;
- Аппроксимация взаимной корреляционной функции ортогональными функциями;
- Оценка спектральной плотности мощности и ее составляющих по параметрам аппроксимирующего выражения;
- Аппроксимация составляющих спектральной плотности мощности (действительная и мнимая части, модуль);
- Оценка КФ по параметрам модели спектральной плотности мощности;
- Оценка спектральной функции по параметрам модели корреляционной функции и спектральной плотности мощности;
- Построение корреляционных функций идеального белого шума и идеального низкочастотного шума;
- Оценка обобщенных корреляционно-спектральных характеристик;
- Исследование ортогональных полиномов, функций и их свойств;
- Проведение экспериментов с помощью имитационного моделирования.

Для начала работы программы необходимо запустить файл CSA.exe. На экране появится форма, изображенная на рисунке П 18.1.

Экранную форму можно условно разбить на блоки:

1. Панель кнопок, при нажатии на которые выполняются определенные действия. В зависимости от выбранной закладки (подсистемы) на панели высвечиваются доступные для заданной подсистемы кнопки.

2. Панель-блокнот, позволяющая при работе с автоматизированной системой, не имея под рукой необходимых средств, записать требуемую информацию либо делать заметки.

3. Панель навигации, предназначенная для удобства работы с автоматизированной системой. Предоставляет возможность производить навигацию не только по закладкам, на которых организована система, но и по дереву, имеющему логическую структуру, разработанную на основании структурной схемы системы, и по списку, являющаяся упрощенной схемой навигации по дереву и имеющая идентичную логическую структуру.

4. Панель состояния, предназначенная для отображения этапа и процента выполнения решаемой задачи.

5. Панель расположения подсистем в виде закладок. При выборе подсистемы можно пользоваться как панелью навигации, так и непосредственным переходом по закладкам. На каждой закладке располагаются те кнопки, которые в данный момент активны на панели кнопок, а также компоненты ввода-вывода параметров и отображение результатов работы подсистемы.

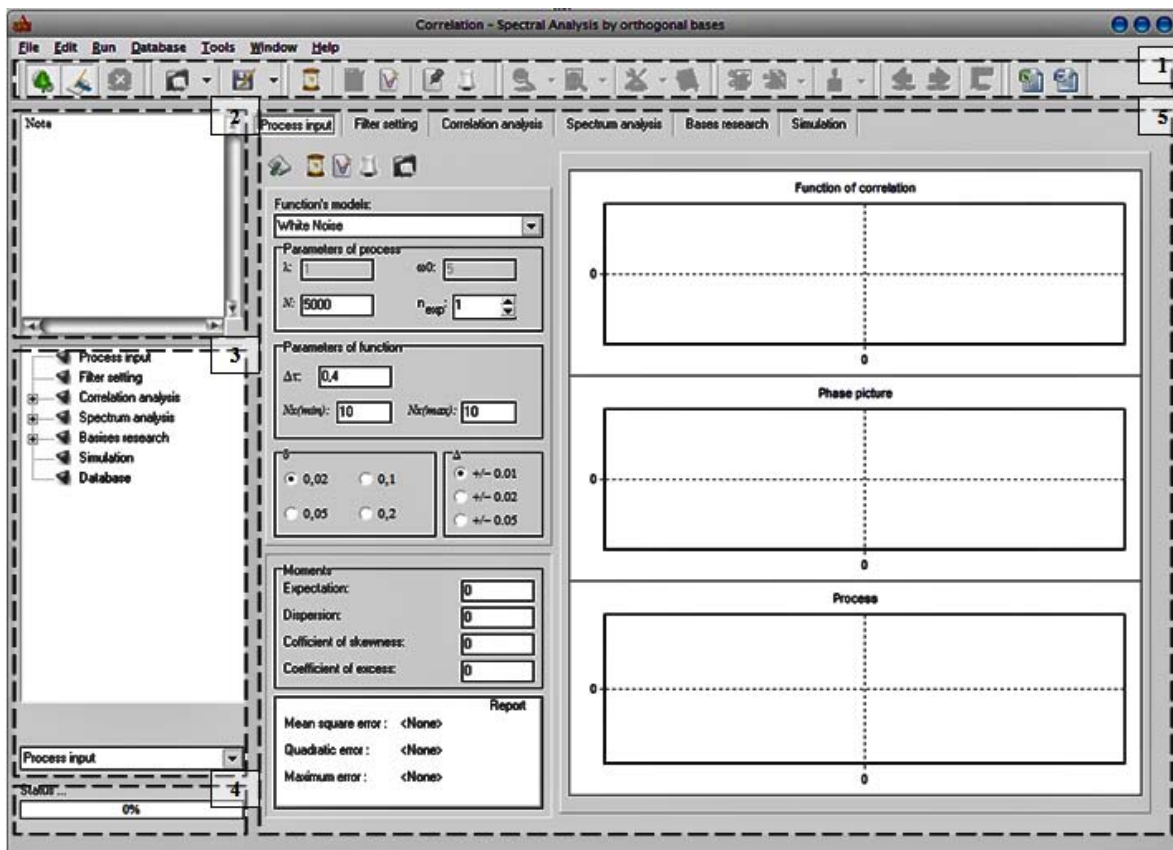






Рисунок П 18.1 – Вид экранной формы начала работы


Представим описание кнопок и действий, которые могут производиться при нажатии на соответствующие кнопки (панель кнопок):


 - кнопка, имеющая два состояния: в активном (нажатом) состоянии панель навигации и панель состояния отображены; в неактивном (отжатом) состоянии указанные панели не отображаются;


 - кнопка, имеющая два состояния: в активном состоянии – панель-блокнот отображается, иначе – не отображается;


 - кнопка прерывания, предназначенная для остановки вычислений при работе системы в случае необходимости;


 - кнопка открытия файла (процесса, взаимной корреляционной функции, действительной компоненты спектра, мнимой компоненты спектра);
















 - кнопка сохранения файла (процесса, взаимной корреляционной функции, действительной компоненты спектра, мнимой компоненты спектра, модуля и фазы спектральной плотности мощности, спектральной плотности мощности);

 - кнопка генерации источника «белого шума» с передачей параметров на подсистемы 3-8, согласно структурной схемы системы (см. Приложение 17).

 - кнопка построения сгенерированной функциональной зависимости либо открытой из файла;

 - кнопка построения теоретической функциональной зависимости;

 - кнопка фиксирования функциональных зависимостей, которая при работе в сочетании с кнопкой генерации позволяет перейти в режим имитационного моделирования;

-  - кнопка очистки графических плотов;
-  - кнопка поиска оптимальных параметров аппроксимации  $m$  и  $\gamma$ ;
-  - кнопка поиска оптимального числа членов разложения  $m$  при заданном параметре  $\gamma$ ;
-  - кнопка поиска оптимального параметра масштаба  $\gamma$  при заданном числе членов разложения ряда  $m$ ;
-  - кнопка настройки параметров и условий аппроксимации;
-  - кнопка аппроксимации;
-  - кнопка передачи функциональной зависимости из заданной подсистемы;
-  - кнопка передачи параметров функциональной зависимости из заданной подсистемы;
-  - кнопка построения ортогональных полиномов и функций;
-  - кнопка формирования левой ветви взаимной корреляционной функции специального вида;
-  - кнопка формирования правой ветви взаимной корреляционной функции специального вида;
-  - кнопка, имеющая два состояния: в активном состоянии – оси отображаются, иначе – не отображается;
-  - кнопка экспорта данных в MS Excel;
-  - кнопка формирования отчета в MS Word;
-  - кнопка вызова окна рекомендаций по выбору интервала дискретизации и числа ординат восстановления, располагающаяся на закладке формирования источника.

В качестве демонстрации работы автоматизированной системы, рассмотрим работу системы при решении задачи аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа с использованием корреляционных функций специального вида.

На рисунке П 18.2 представлена экранная форма подсистемы построения корреляционной функции специального вида, в качестве которой выбрана корреляционная функция низкочастотного полосового шума.

При нажатии соответствующей кнопки передадим сформированную автокорреляционную функцию на подсистемы формирования взаимных корреляционных функций и аппроксимации взаимных корреляционных функций. Соответствующие экранные формы представлены ниже на рисунках П 18.3 и П 18.4.

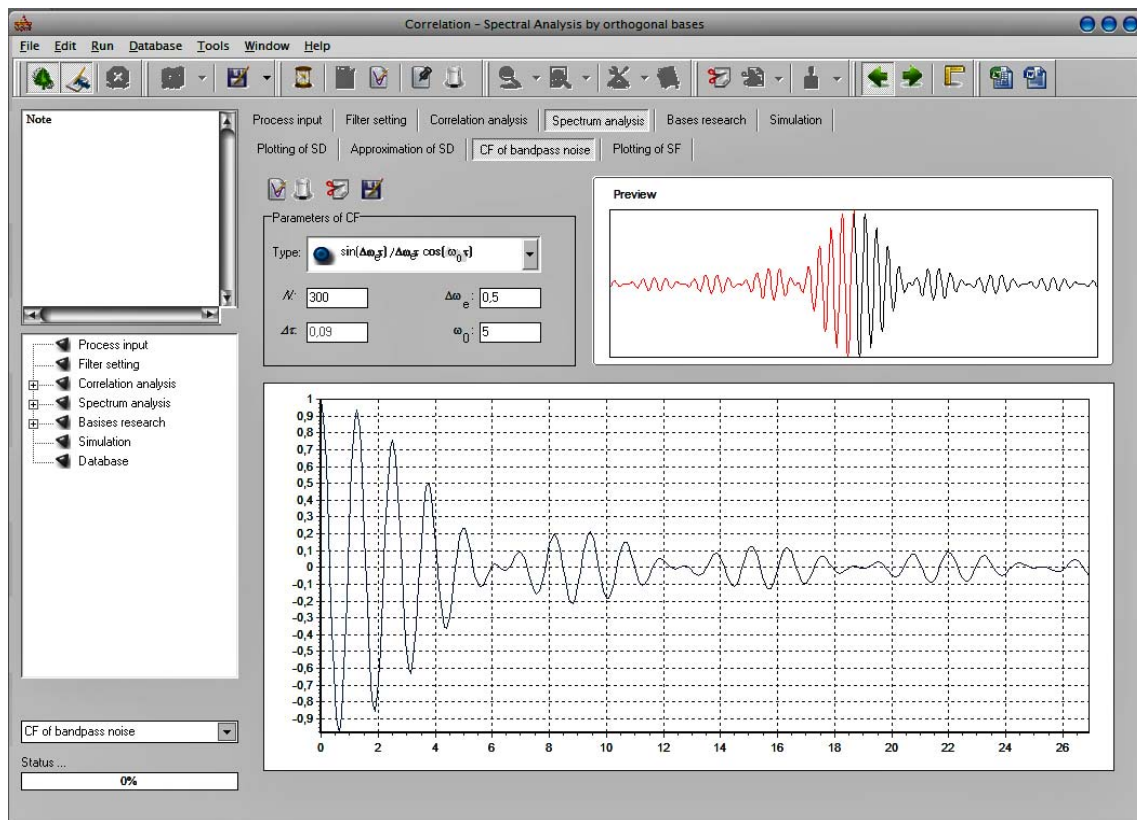


Рисунок П 18.2 – Экранная форма подсистемы построения корреляционных функций специального вида

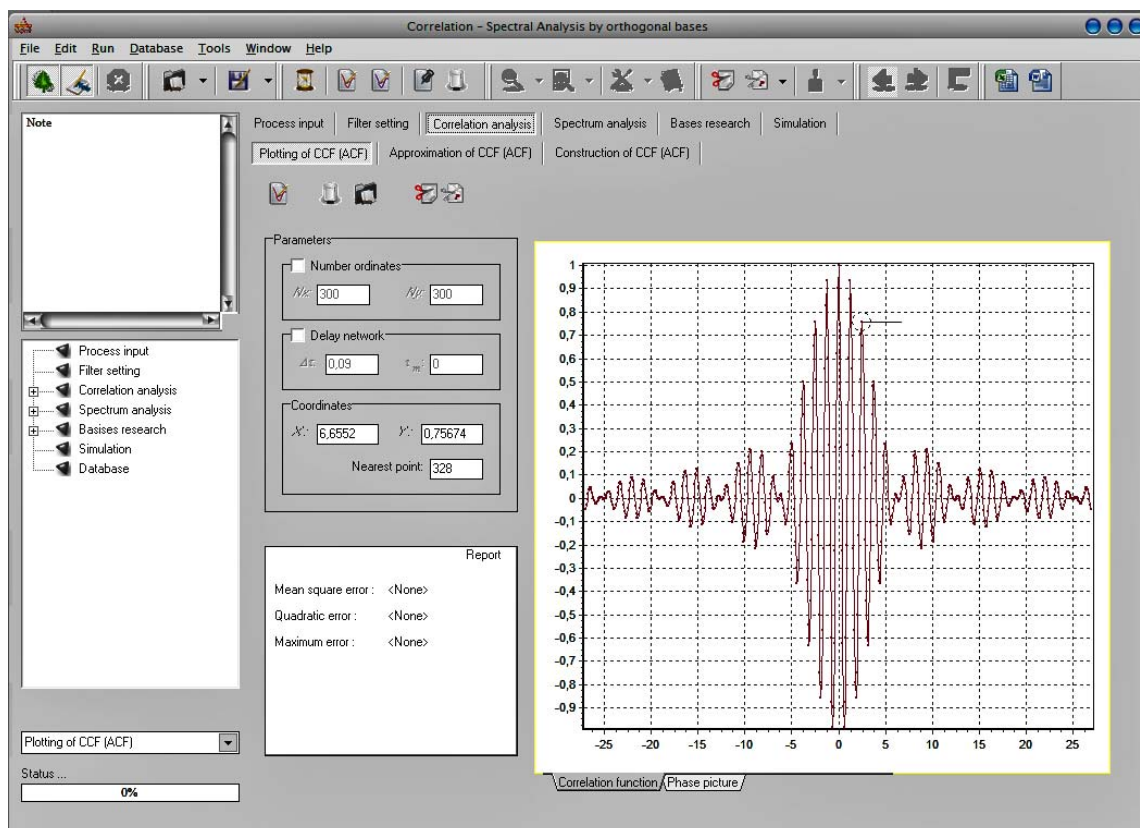


Рисунок П 18.3 – Экранная форма подсистемы формирования ВКФ



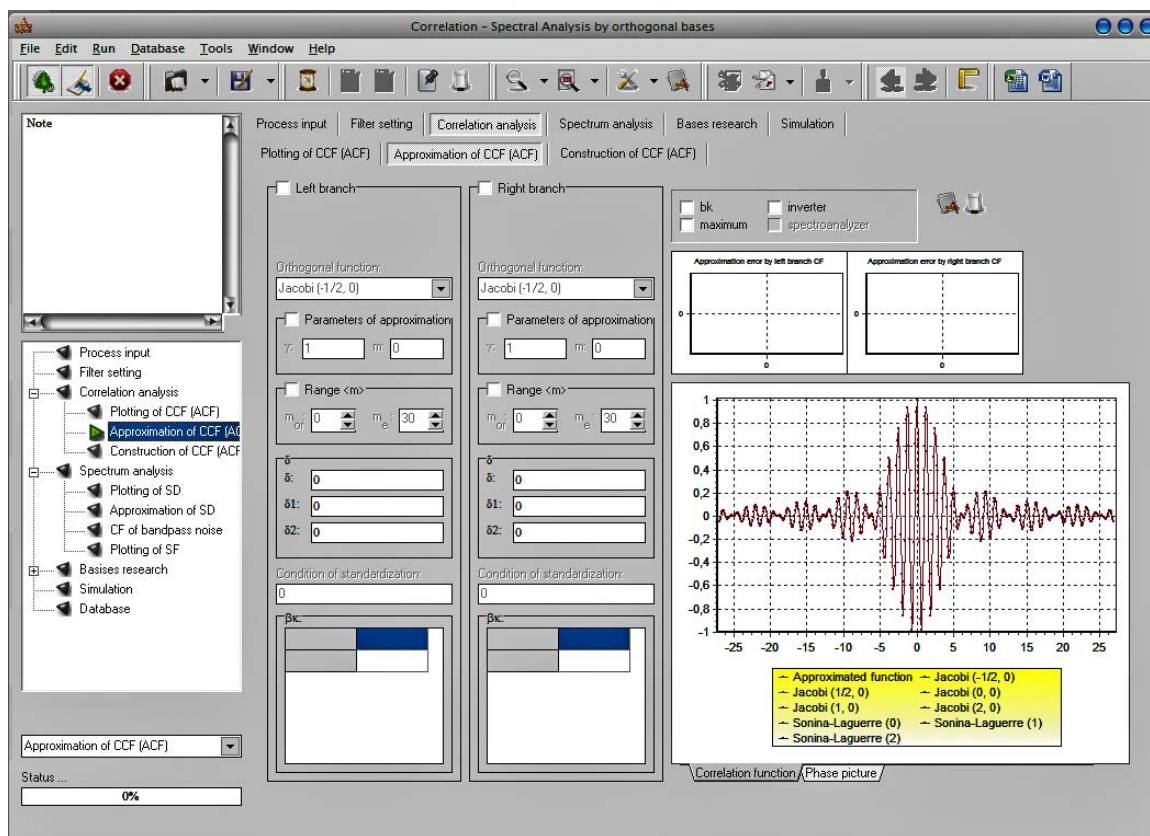


Рисунок П 18.4 – Экранная форма подсистемы аппроксимации ВКФ

Настроив параметры аппроксимации, построим аппроксимативную модель сформированной корреляционной функции в выбранном ортогональном базисе.

Результаты проведения аппроксимации отражены на экранной форме, представленной на рисунке П 18.5. Нажатием правой кнопки мыши по графическому плоту, на котором отображается функциональная зависимость и ее ортогональная модель, выгружается информационное окно с обобщенными корреляционными характеристиками.

По параметрам ортогональной модели корреляционной функции оценим модель спектральной плотности мощности. Вид подсистемы построения спектра и его составляющих приведен на рисунке П 18.6. Нажатием правой кнопки мыши по соответствующим графическим плотам (действительная часть, мнимая часть, модуль спектральной плотности мощности), на которых отображаются функциональные зависимости, выгружается информационное окно с обобщенными спектральными характеристиками. Также предоставляются следующие возможности: на график действительной и мнимой частей спектральной плотности мощности наложить модуль спектральной плотности мощности и эквивалентную ширину спектра мощности; увеличить масштаб графика мнимой части, действительной части и модуля спектральной плотности мощности.

Построенную модель СПМ можно получить и другим способом – через аппроксимацию ее составляющих. Выбрав график аппроксимируемой составляющей (действительная часть, мнимая часть или модуль), передадим ее на подсистему аппроксимации СПМ (см. рисунок П 18.7).



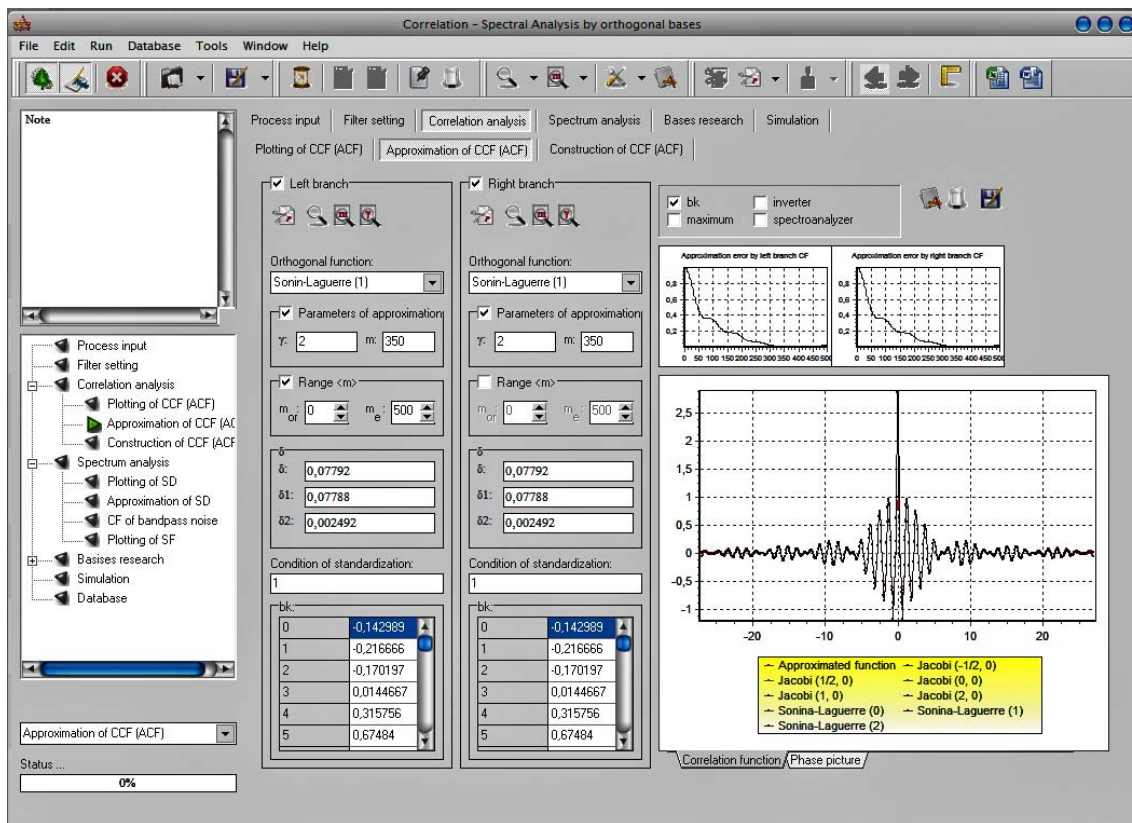


Рисунок П 18.5 – Экранная форма подсистемы аппроксимации КФ с отображением результатов эксперимента

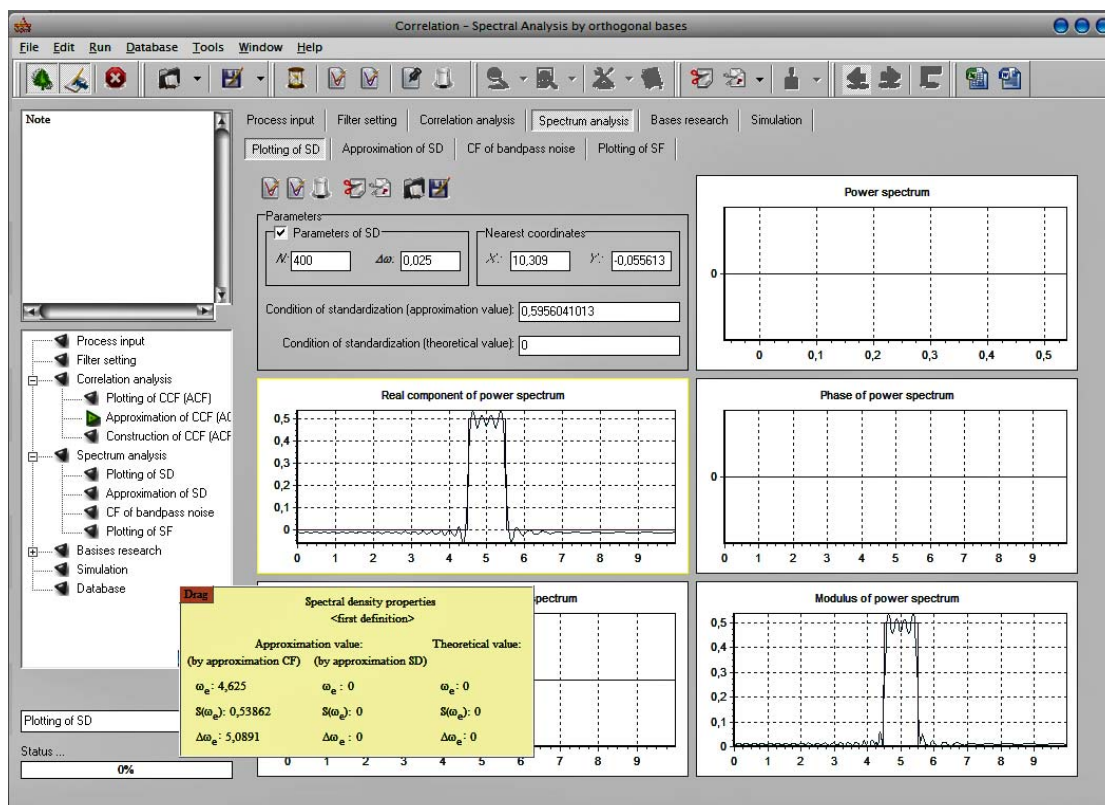


Рисунок П 18.6 – Экранная форма подсистемы построения модели СПМ

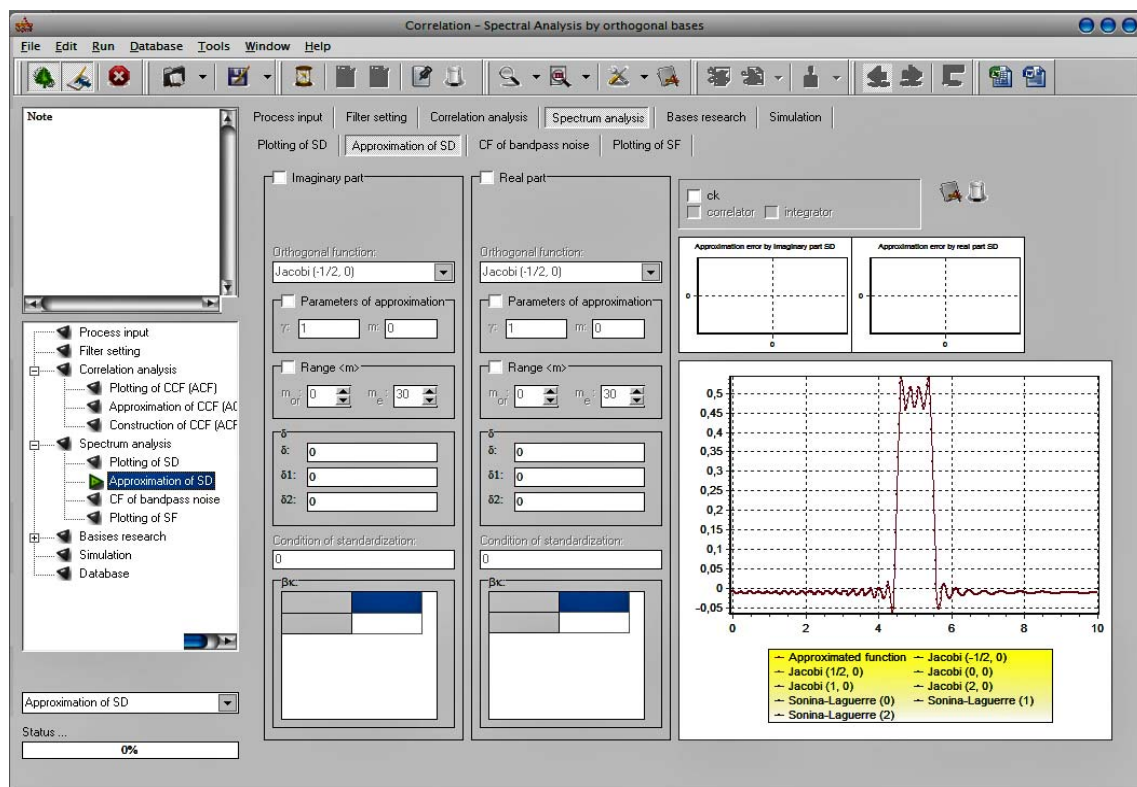


Рисунок П 18.7 – Экранная форма подсистемы аппроксимации СПМ

Результаты проведения аппроксимации отражены на экранной форме, представленной на рисунке П 18.8. Нажатием правой кнопки мыши по графическому плоту, на котором отображается функциональная зависимость и ее ортогональная модель, выгружается информационное окно с обобщенными спектральными характеристиками.

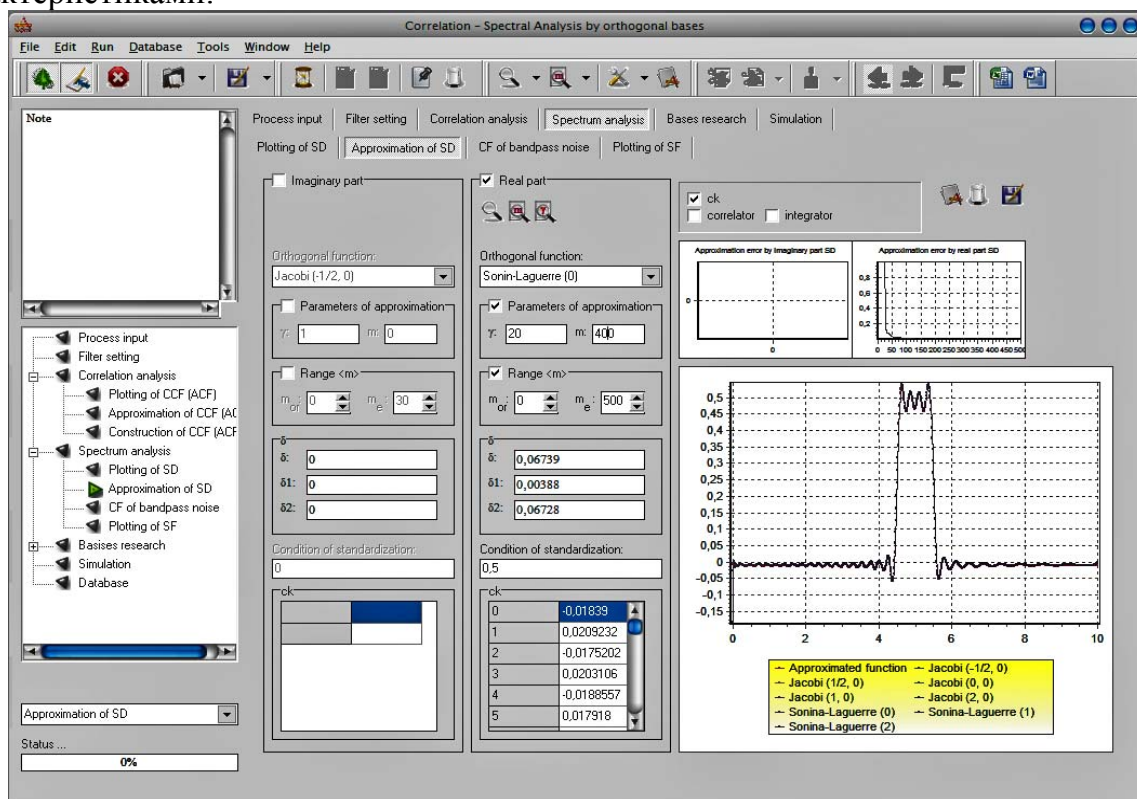


Рисунок П 18.8 – Экранная форма подсистемы аппроксимации СПМ с отображением результатов эксперимента

По параметрам аппроксимативной модели СПМ можно восстановить исходную модель КФ. Результаты построения КФ представлены в подсистеме восстановления взаимной корреляционной функции (см. рисунок П 18.9). При необходимости в указанную подсистему можно передать исходную корреляционную функцию из подсистемы формирования взаимной корреляционной функции нажатием соответствующей кнопки. Результаты наложения исходной и полученной корреляционных функций представлены на рисунке П 18.10.

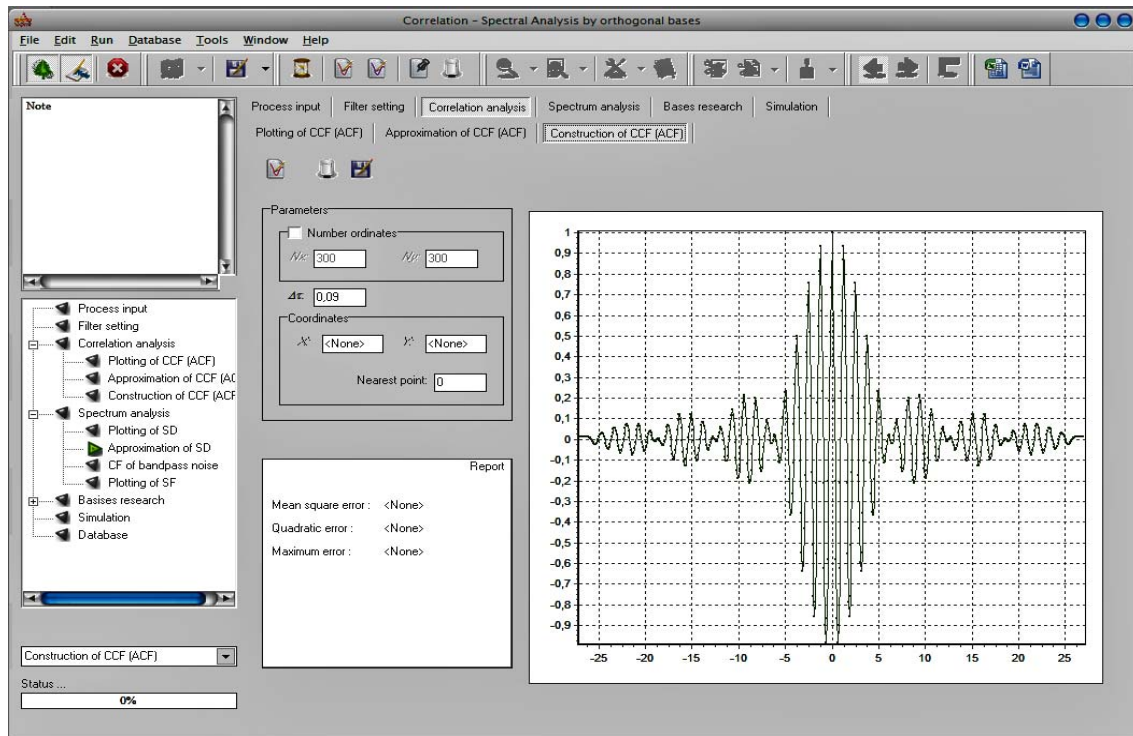


Рисунок П 18.9 – Экранная форма подсистемы восстановления ВКФ

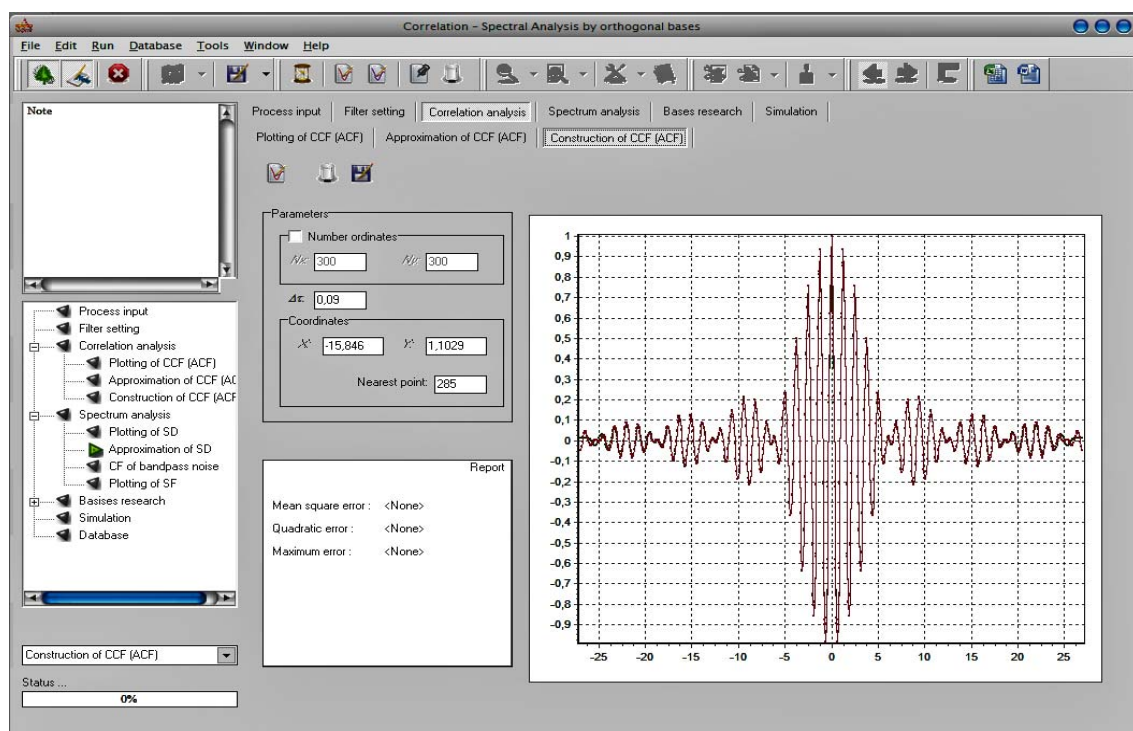


Рисунок П 18.10 – Экранная форма подсистемы восстановления ВКФ с наложением исходной ВКФ

**Формат вводимых и выводимых файлов**

Процесс с регулярной дискретизацией *rd	Процесс с нерегулярной дискретизацией *nrd	ВКФ с регулярной дискретизацией *txt	Спектральная плотность мощности (парам. модели) *txt	Спектральная плотность мощности *txt	Параметры ортогональных функций *txt
M	$M_j$	$J_{\max, \Pi}$	$\Delta\omega$	$\Delta\omega$	$\alpha_{\Pi}$
$\Delta t$	$x(1)$	$J_{\max, \Lambda}$	$\omega_{\text{э}}$	$\omega_{\text{э}}$	$\beta_{0, \Pi}$
$x(1)$	...	$\Delta\tau$	$S_x(\omega_{\text{э}})$	$S_x(\omega_{\text{э}})$	...
...	...	$\rho_{x, \Pi}(1)$	$\Delta\omega_{\text{э}}$	$\Delta\omega_{\text{э}}$	$\beta_{m1, \Pi}$
...	$x(M_j)$	...	$S_x(1)$	$S_x(1)$	$\alpha_{\Lambda}$
...	$t(1)$	$\rho_{x, \Pi}(J_{\max, \Pi})$	$S_x(2)$	$S_x(2)$	$\beta_{0, \Lambda}$
...	...	$\rho_{x, \Lambda}(1)$	...	...	
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	$\beta_{m2, \Lambda}$
...	...	...	...	...	$\tau_m$
...	...	...	...	...	$\rho_{xy\max}$
...	...	...	...	...	m
...	...	...	...	...	$\tau_k^{(2)}$
$x(M)$	$t(M_j)$	$\rho_{x, \Lambda}(J_{\max, \Lambda})$	$S_x(N)$	$S_x(N)$	$\tau_k^{(4)}$

## **ПРИМЕР ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ**

### **КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФОТОПЛЕТИЗМОГРАММ**

#### **Описание предметной области и постановка задачи**

Движение крови в сосудах обусловлено работой сердца. При сокращении миокарда желудочков кровь под давлением изгоняется из сердца в аорту и легочную артерию. Ритмические сокращения миокарда образуют ритмические расширения сосудистой стенки (пульс), которые под действием распространения волн давления от начальной части аорты к артериолам и капиллярам вызывают распространение пульсовых волн. В фотоплетизмографии (ФПГ) участок тканей, в котором исследуется кровоток, например палец руки, располагают на пути луча света между источником излучения и фотоприемником. Поскольку поглощение света в тканях пропорционально объему крови, проходящему через освещаемый участок, то усиливая сигнал фотоприемника, можно зарегистрировать изменения его амплитуды и параметров объемной пульсовой волны, обусловленные артериальной пульсацией сосуда [13, 14].

Решим следующие задачи с использованием автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах:

- 1) определить частоту пульсаций по фотоплетизмограмме с использованием аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах;
- 2) определить корреляцию параметров пульсовых волн по спектру мощности фотоплетизмограммы;
- 3) определить корреляцию параметров пульсовых волн по различным реализациям фотоплетизмограммы одного объекта, либо нескольких объектов, относящихся к одной группе.

Перед проведением корреляционно-спектрального анализа, исходный процесс необходимо отцентрировать, например, с применением ортогональных полиномов [21]. Вид центрированных фотоплетизмограмм, являющихся набором исходных данных для обработки и решения вышеуказанных задач, приведен в Приложении 21.

#### **Определение частоты пульсаций по фотоплетизмограмме**

Для определения частоты пульсаций проведен корреляционно-спектральный анализ. На рисунке П 20.1 представлен исходный центрированный процесс FPG - 13 (см. Приложение 21).



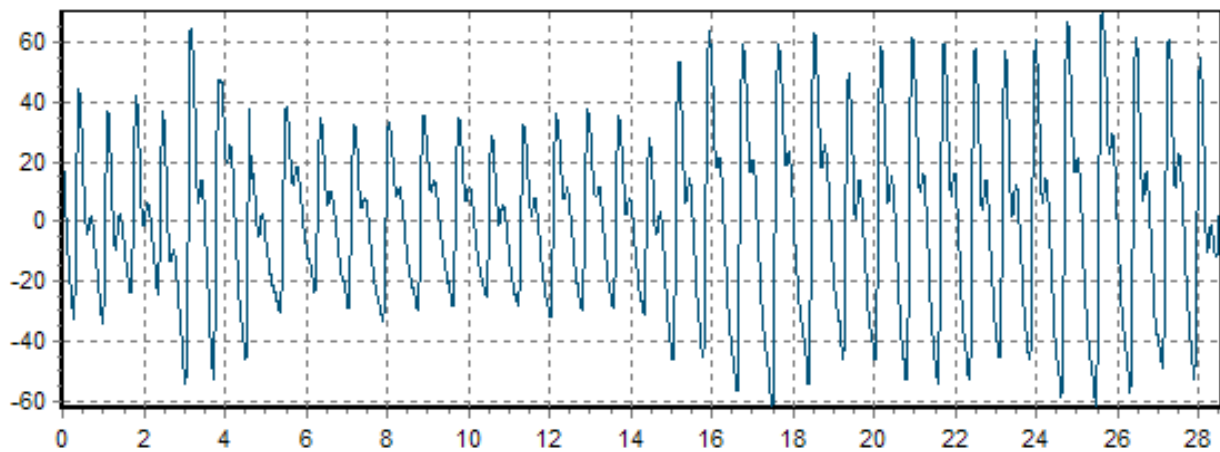


Рисунок П 20.1 - Центрированный процесс, полученный с датчика  
с интервалом в 10 мс, объем выборки - 2854

Ниже на рисунках П 20.2 и П 20.3 – АКФ с интервалом дискретизации  $\Delta\tau = 0,01$  и числом ординат восстановления  $N_x = 1500$  и ее фазовый портрет соответственно.

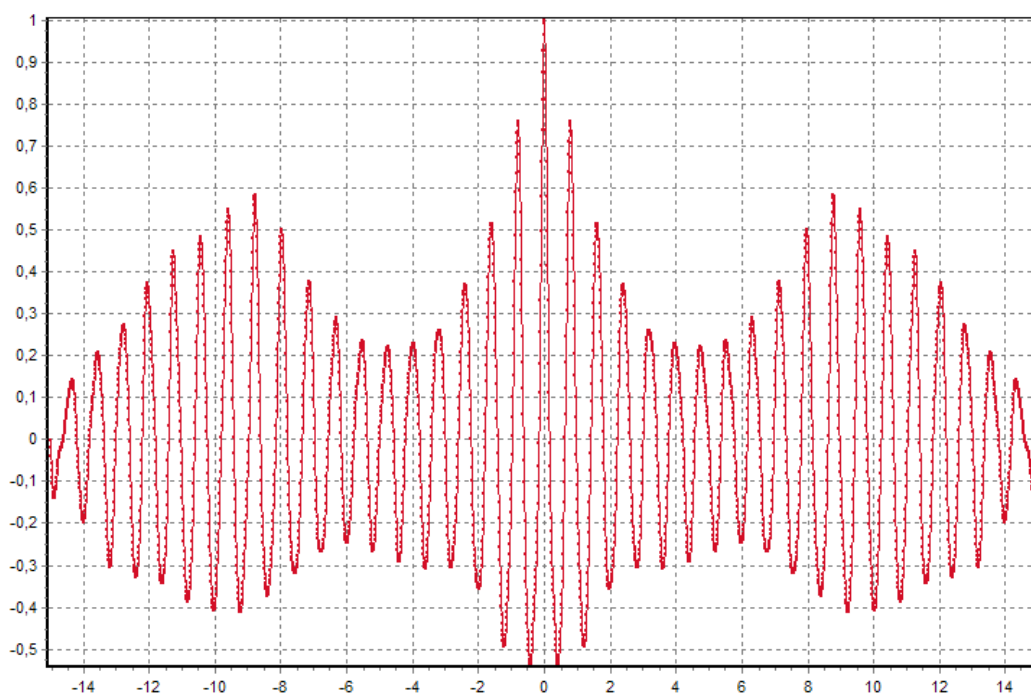


Рисунок П 20.2 - АКФ с параметрами  $\Delta\tau = 0,01$ ,  $N_x = 1500$

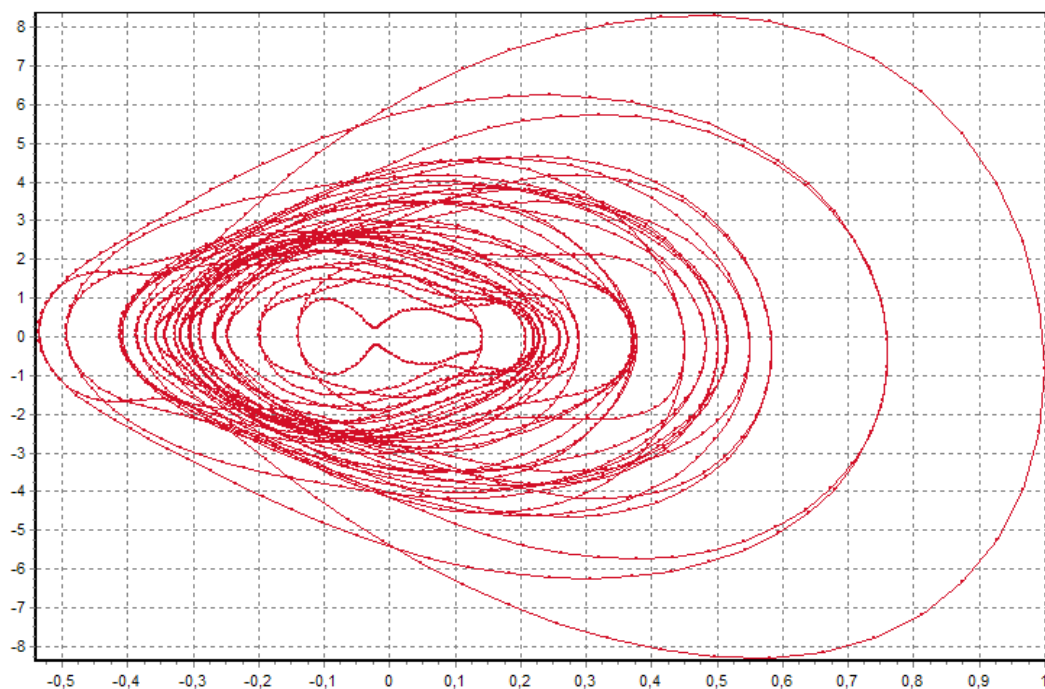


Рисунок П 20.3 – Фазовый портрет АКФ

Построим ортогональную модель АКФ с помощью ортогональных функций Сонина-Лагерра (1) (см. рисунок П 20.4).

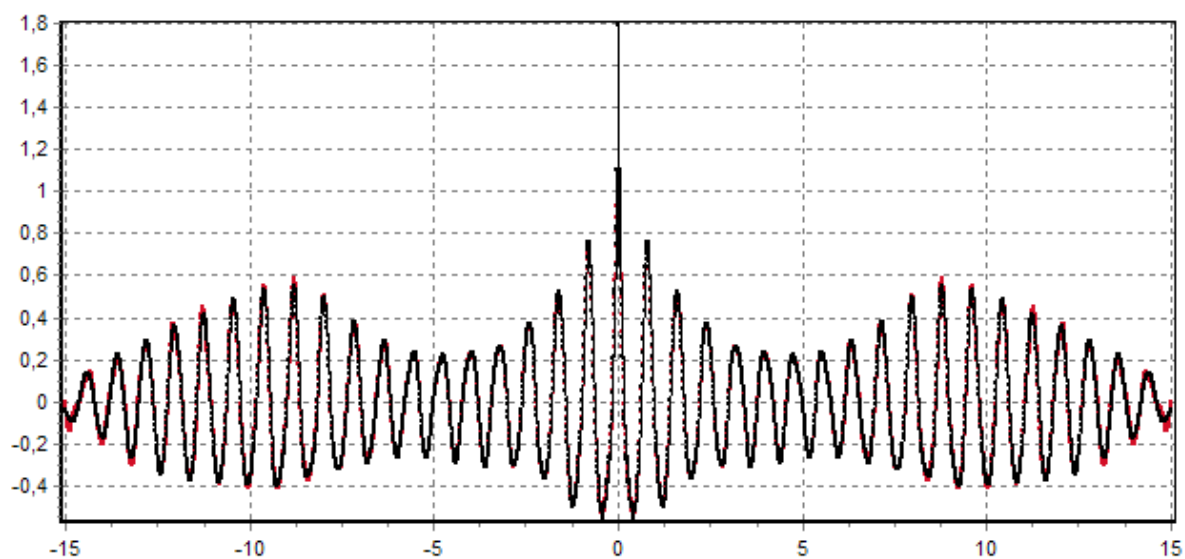


Рисунок П 20.4 – Аппроксимация АКФ ортогональными функциями

Сонина-Лагерра (1);  $\gamma = 10$ ,  $m = 280$ ,  $\delta = 0,087$

Тогда, по параметрам ортогональной модели АКФ оценим СПМ процесса и определим обобщенные спектральные характеристики (см. рисунок П 20.5). На рисунке построены графики реальной части СПМ и модуля СПМ, а прямоугольником указана найденная эквивалентная ширина.

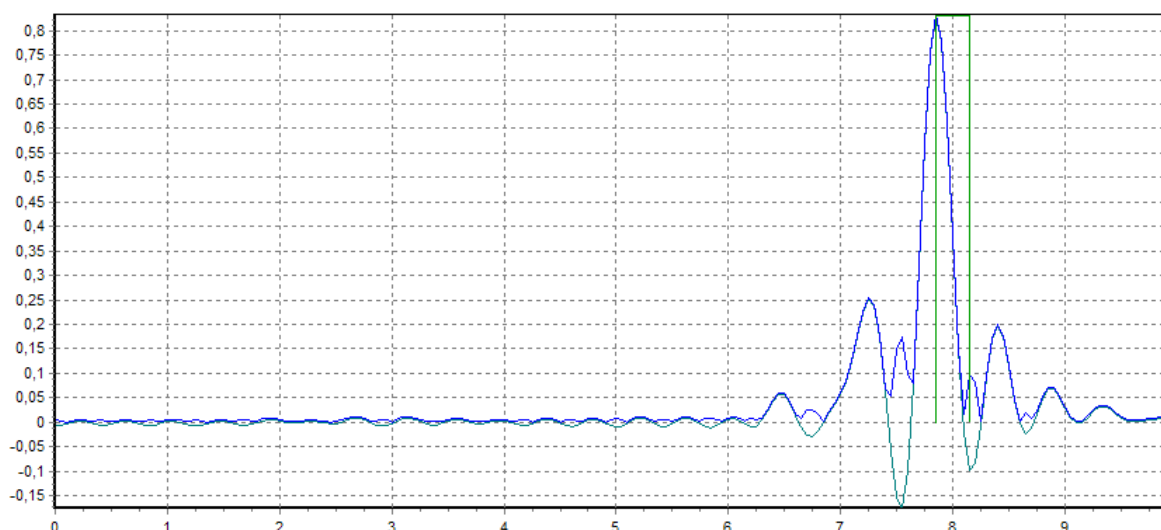


Рисунок П 20.5 – Модель СПМ и его составляющие с характеристиками  
 $\omega_e = 7,85, S(\omega_e) = 0,83047, \Delta\omega_e = 8,151$

Известно, что СПМ представляет собой распределение частот процесса. В свою очередь частота пульсаций соответствует экстремальной частоте  $\omega_e = 7,85 \text{ рад/с}$ . Данное значение представлено в относительных единицах. Следовательно,  
 $f_n = \frac{\omega_e}{2\pi} = 1,25 \text{ уд/с}$  или  $f_n = 75 \text{ уд/мин}$ .

### Определение корреляции параметров пульсовых волн по спектру мощности фотоплетизмограммы

Заметим, что разработанная автоматизированная система при необходимости позволяет найти решения обратной задачи, а именно, по имеющейся спектральной плотности мощности, построив ее ортогональную модель в выбранном базисе, восстановить КФ с заданным числом ординат восстановления.

Воспользуемся данной возможностью для определения корреляции различных параметров сигнала (в данном случае параметров объемной пульсовой волны) через определение его корреляционной функции.

В качестве исходных данных используем СПМ, полученную при решении прямой задачи (см. рисунок П 20.5), и построим ортогональную модель ее действительной компоненты в ортогональном базисе Лагерра. На рисунке П 20.6 – результаты аппроксимации.



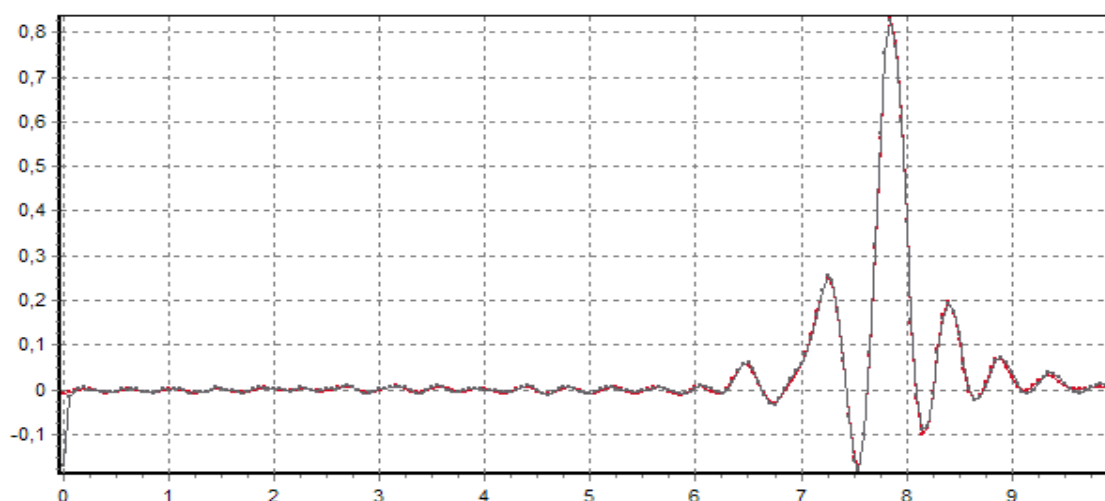


Рисунок П 20.6 – Аппроксимация действительной части СПМ ортогональными функциями Лагерра;  $\gamma = 5$ ,  $m = 350$ ,  $\delta = 0,0362$

По параметрам ортогональной модели СПМ (мнимая компонента равна нулю) можно оценить КФ и спектральные характеристики (см. рисунок П 20.7).

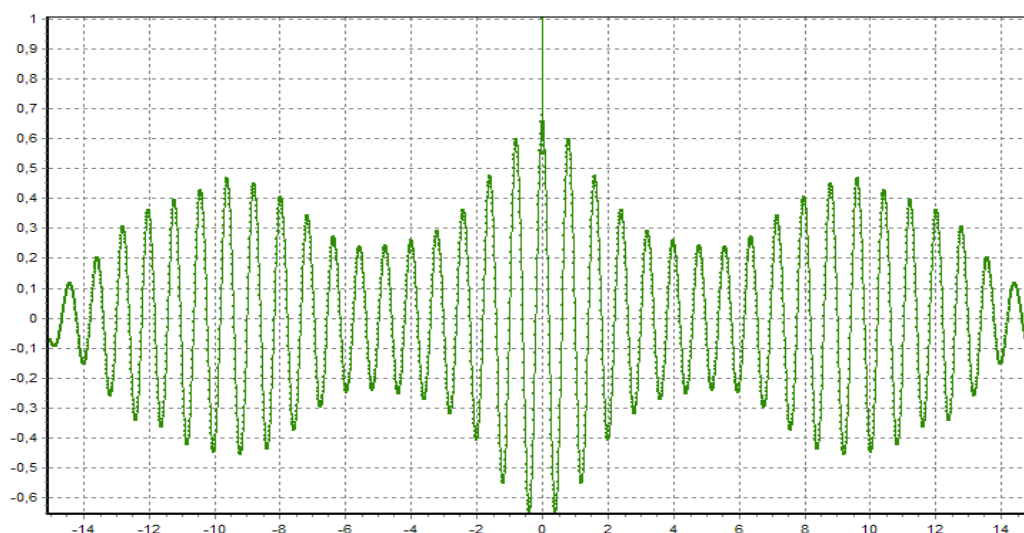


Рисунок П 20.7 – Модель КФ, восстановленная по параметрам модели СПМ

Для проверки адекватности предложенных алгоритмов корреляционно-спектрального анализа и достоверности результатов, получаемых при обработке реальных сигналов, наложим модель исходной АКФ (см. рисунок П 20.4) и модели КФ, полученной при решении прямой и обратной задачи. Результат наложения графиков представлен на рисунке П 20.8.



Рисунок П 20.8 – Модель КФ, восстановленная по параметрам модели СПМ, и исходная АКФ

Итак, при сравнении полученных таким образом корреляционных функций можно судить об изменении параметров исходного сигнала и об их влиянии друг на друга по спектру мощности, а также о виде сигналов, поступающих на вход по характеру получаемой корреляционной функции: АКФ либо ВКФ.

### **Определение корреляции параметров пульсовых волн по различным реализациям фотоплетизмограммы**

Проведем исследование коэффициента корреляции двух сигналов – различных реализаций фотоплетизмограммы. Исходные данные для обработки представлены в Приложении 21.

Для решения данной задачи необходимо сформировать ВКФ. На рисунках П 20.9 и П 20.10 представлены результаты построения ВКФ и ее фазового портрета для сигналов FPG – 13 и FPG – 14.

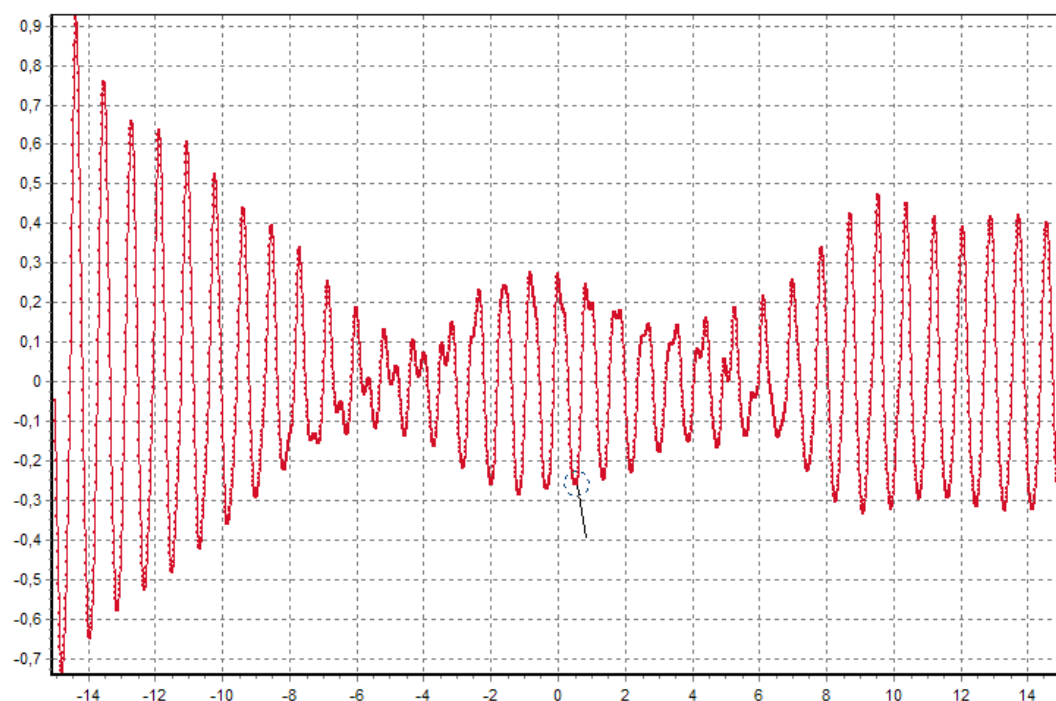


Рисунок П 20.9 – Формирование ВКФ

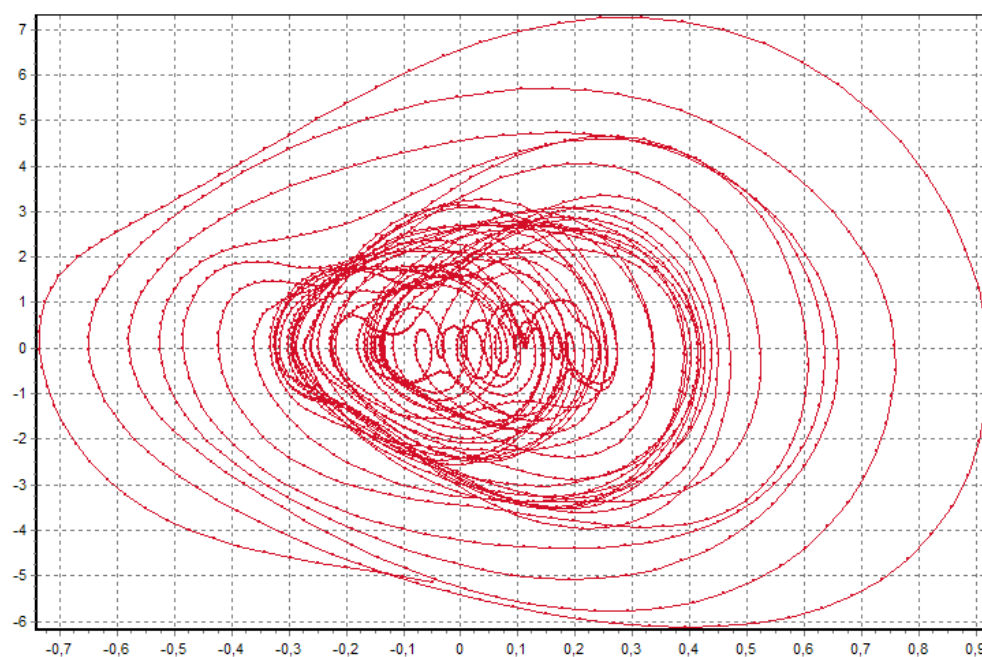


Рисунок П 20.10 – Построение фазового портрета сформированной ВКФ

В таблице П 20.1 представлены результаты обработки сигналов, снятых с фотоплетизмографа с интервалом в 10 мс (см. Приложение 21), где введены следующие обозначения: «+» - результирующая ВКФ с высоким коэффициентом корреляции; «-» - ВКФ с низким коэффициентом корреляции.

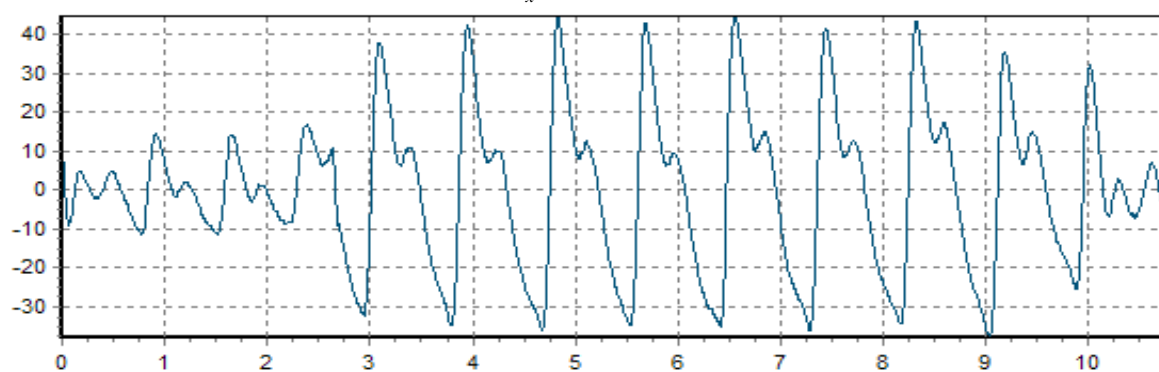
Таблица П 20.1

	FPG-1	FPG-2	FPG-3	FPG-4	FPG-5	FPG-6	FPG-7	FPG-8	FPG-9	FPG-10	FPG-11	FPG-12	FPG-13	FPG-14	FPG-15	FPG-16
FPG-1	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+
FPG-2	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
FPG-3	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
FPG-4	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+
FPG-5	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
FPG-6	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-
FPG-7	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+
FPG-8	-	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
FPG-9	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-
FPG-10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
FPG-11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
FPG-12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
FPG-13	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
FPG-14	+	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-	+
FPG-15	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
FPG-16	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	+	+	-	+

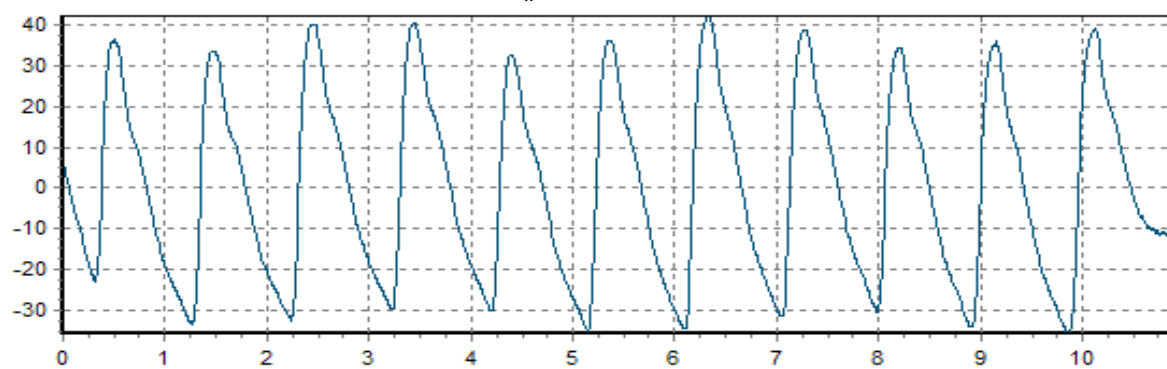
Заметим, при необходимости можно указать конкретные значения коэффициента корреляции, показывающие степень взаимосвязи параметров объекта исследования друг относительно друга.

# ВИД ЦЕНТРИРОВАННЫХ ФОТОПЛЕТИЗМОГРАММ

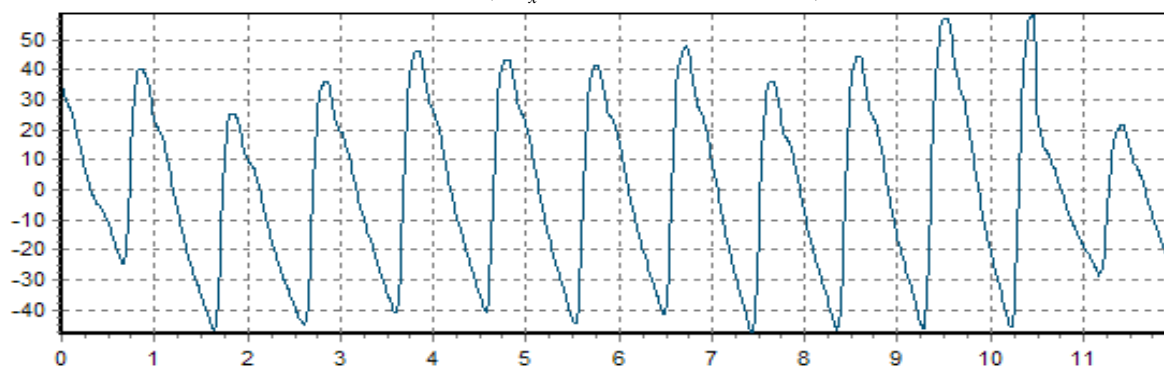
FPG – 1 ( $N_x = 1077$ ,  $dt = 0,01$ )



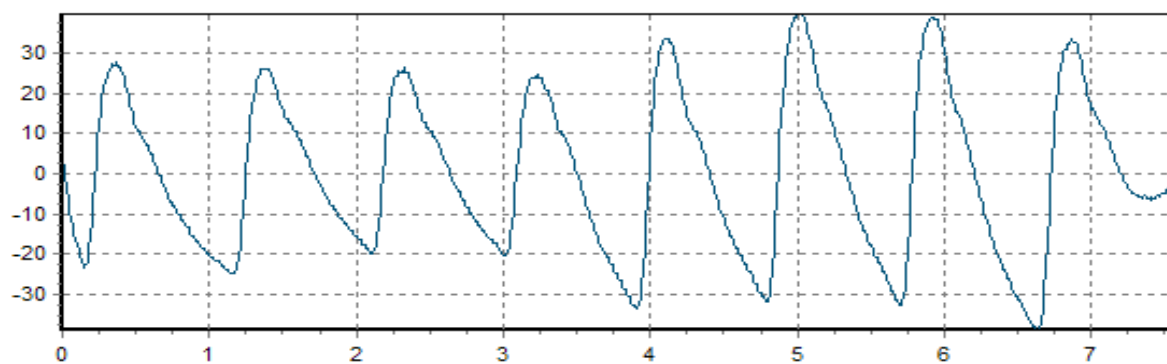
FPG – 2 ( $N_x = 1094$ ,  $dt = 0,01$ )



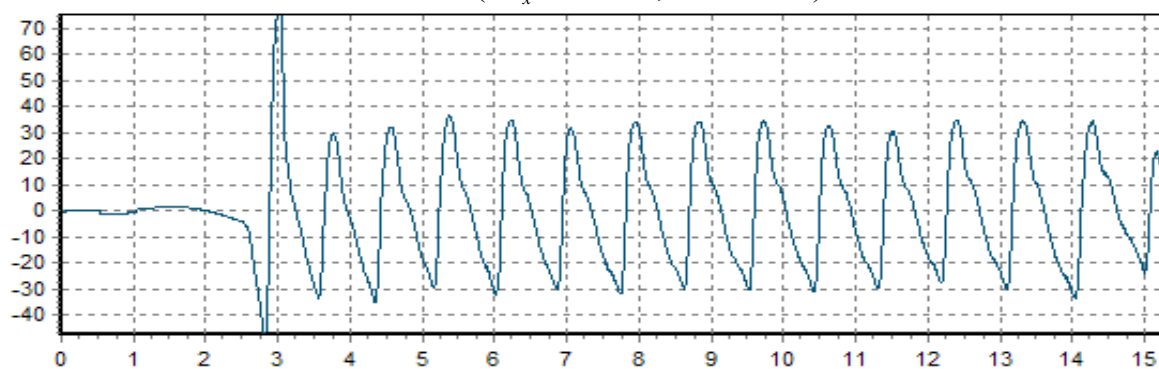
FPG – 3 ( $N_x = 1198$ ,  $dt = 0,01$ )



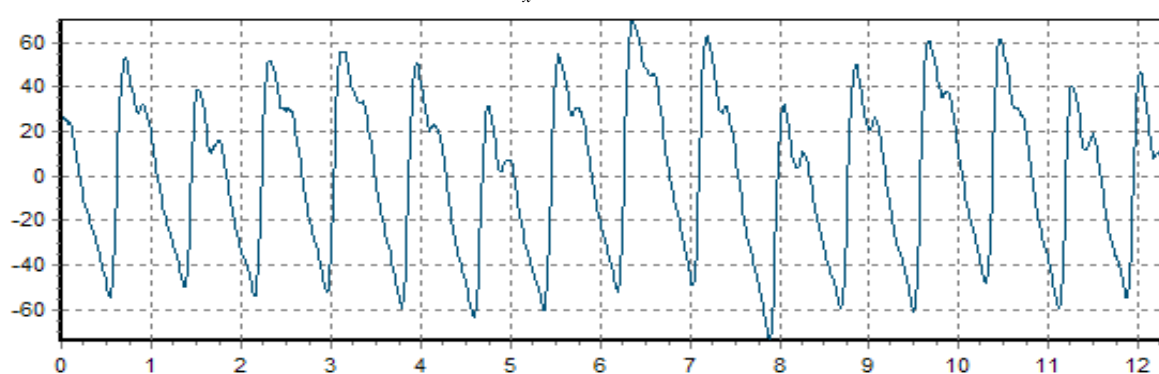
FPG – 4 ( $N_x = 759$ ,  $dt = 0,01$ )



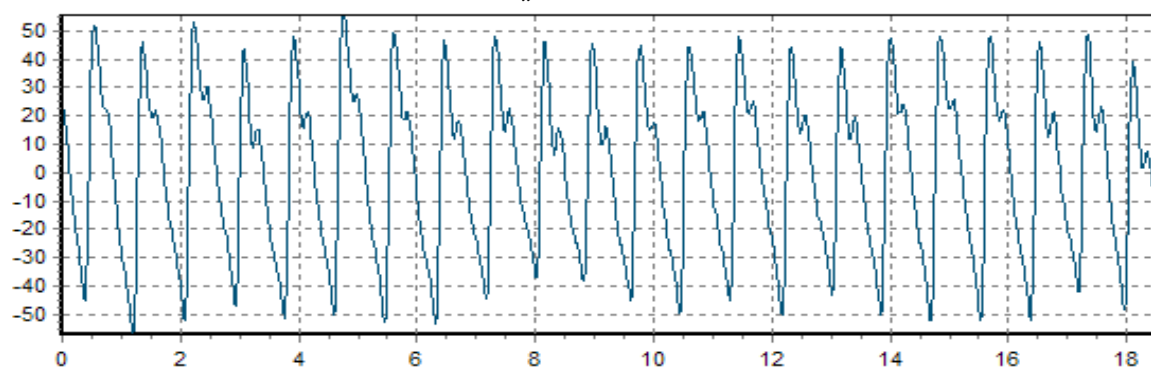
FPG – 5 ( $N_x = 1536$ ,  $dt = 0,01$ )



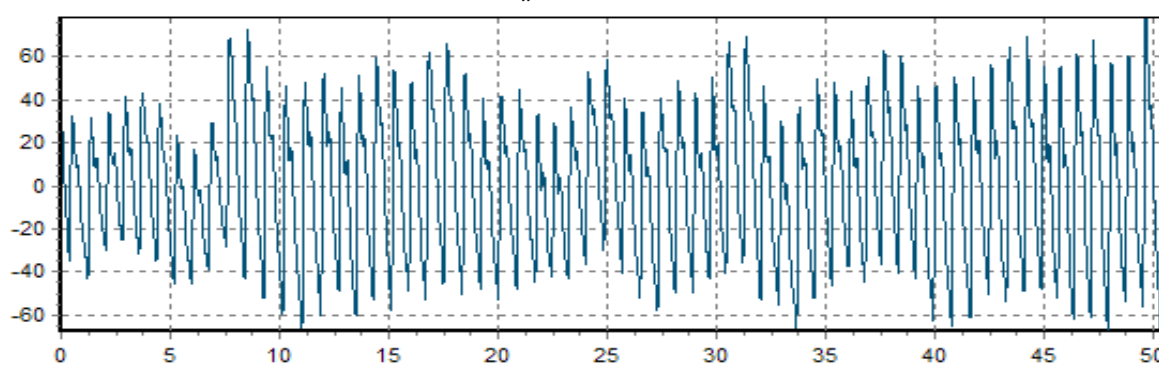
FPG – 6 ( $N_x = 1236$ ,  $dt = 0,01$ )



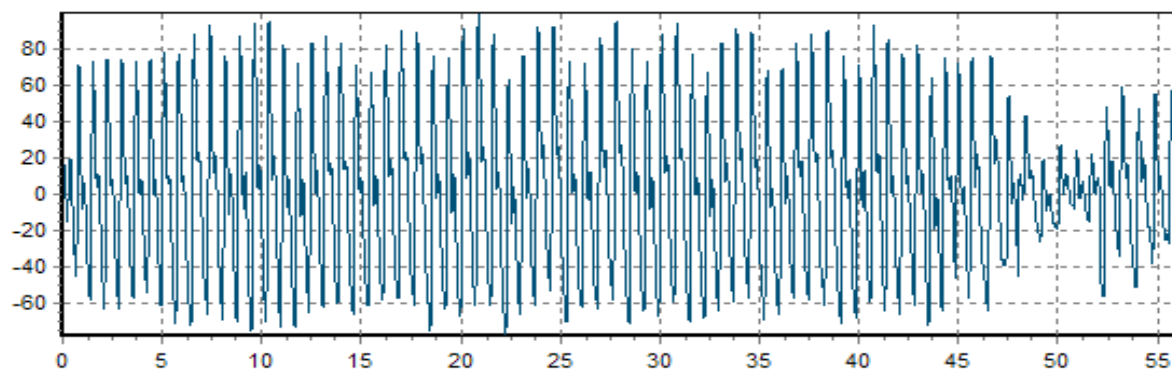
FPG – 7 ( $N_x = 1858$ ,  $dt = 0,01$ )



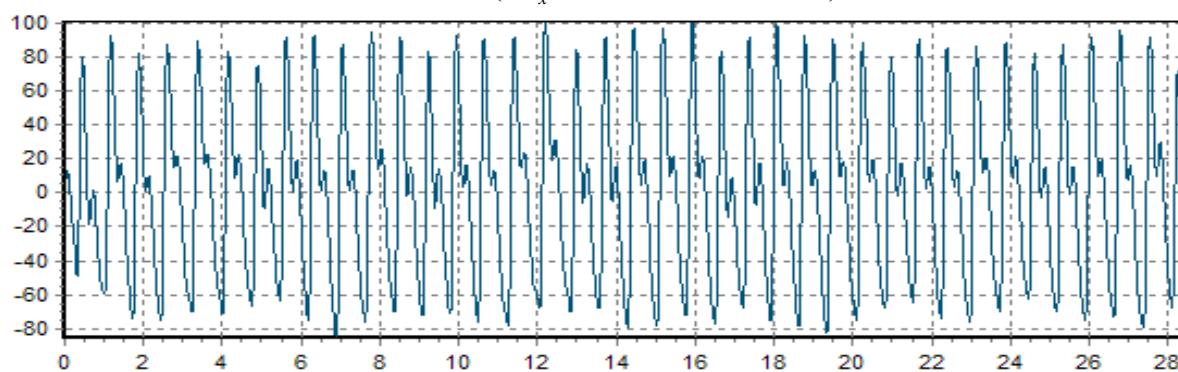
FPG – 8 ( $N_x = 5075$ ,  $dt = 0,01$ )



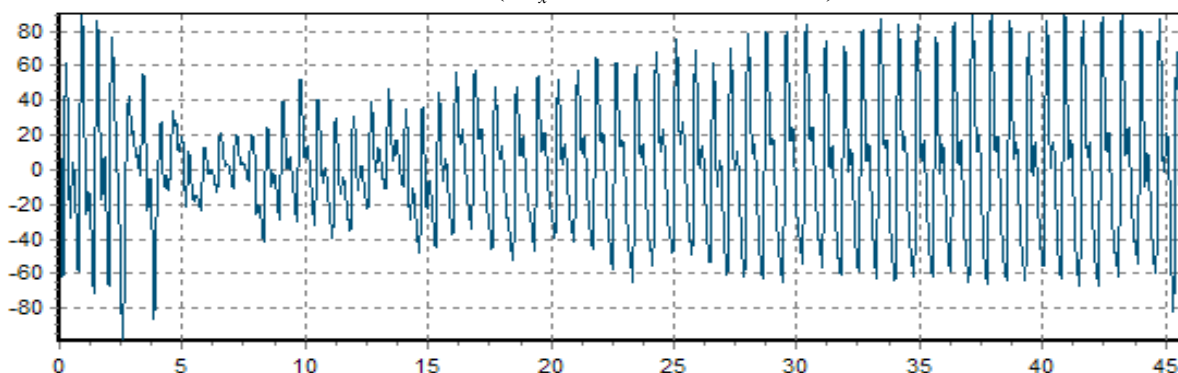
FPG – 9 ( $N_x = 5614$ ,  $dt = 0,01$ )



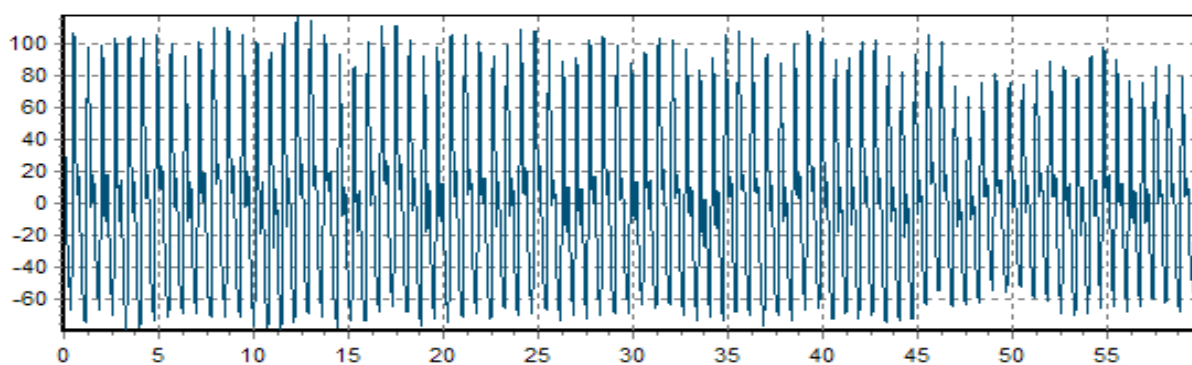
FPG – 10 ( $N_x = 2849$ ,  $dt = 0,01$ )



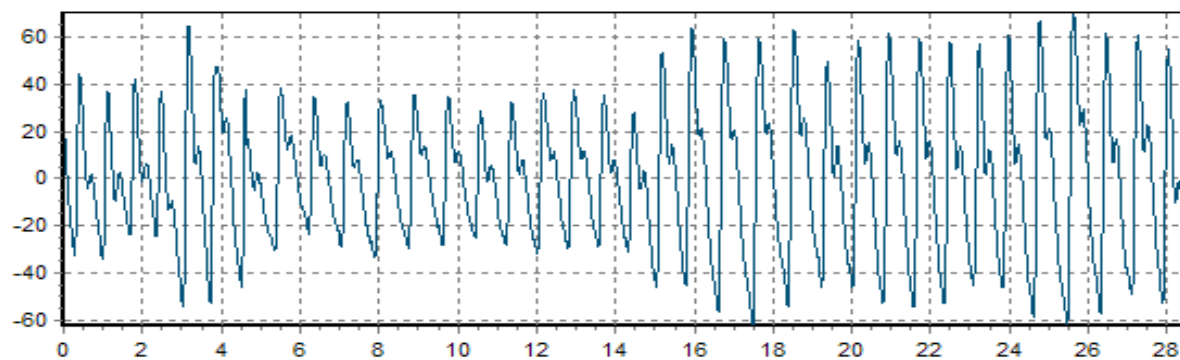
FPG – 11 ( $N_x = 4592$ ,  $dt = 0,01$ )



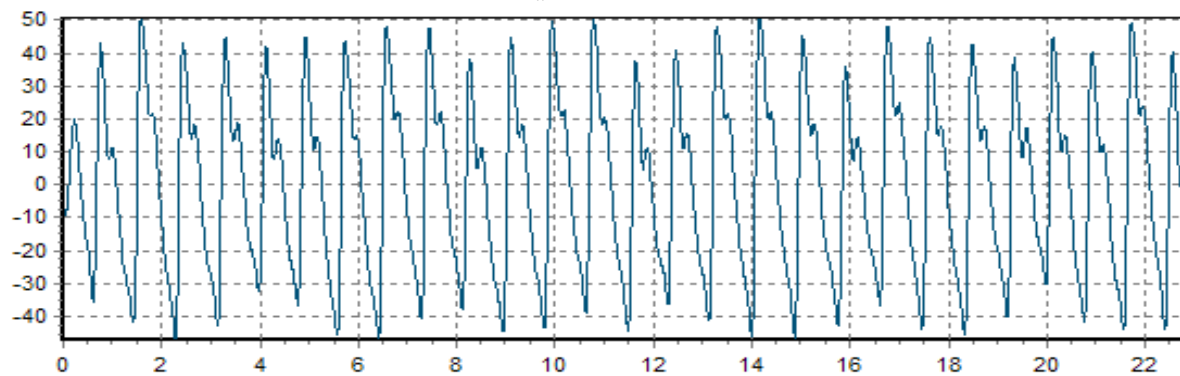
FPG – 12 ( $N_x = 6000$ ,  $dt = 0,01$ )



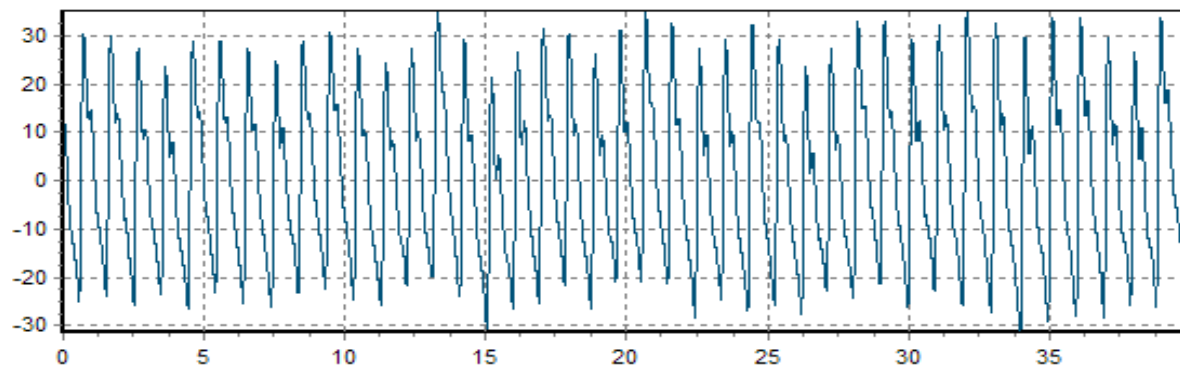
FPG – 13 ( $N_x = 2854$ ,  $dt = 0,01$ )



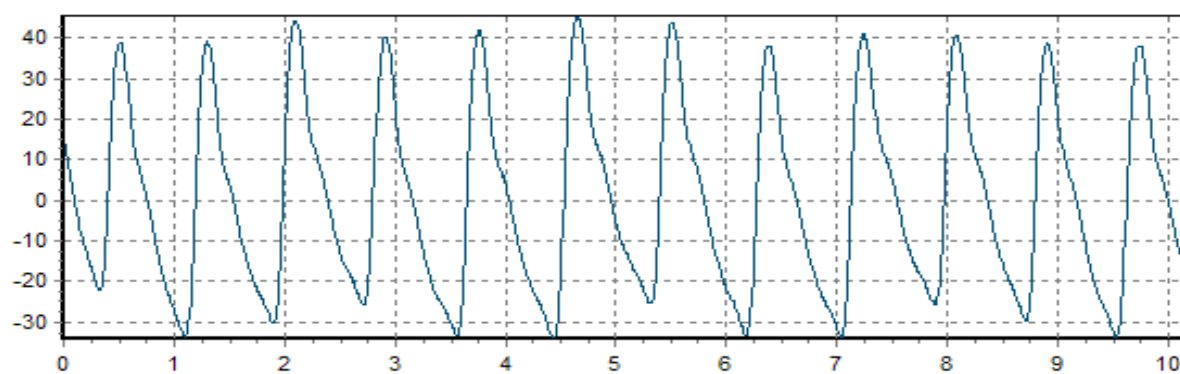
FPG – 14 ( $N_x = 2288$ ,  $dt = 0,01$ )



FPG – 15 ( $N_x = 3979$ ,  $dt = 0,01$ )



FPG – 16 ( $N_x = 1019$ ,  $dt = 0,01$ )





## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 12. «АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ»

**Цель работы:** анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей корреляционной функции.

1. Определить коэффициенты разложения  $\beta_k$ .

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 5$$

$$\gamma := 0.30619$$

$$m := 15$$

$$k := 0..m$$

$$\Delta\tau := 0.081649 \quad N_x := 37$$

$$\tau_{\max} := \Delta\tau \cdot N_x$$

$$\rho_X(\tau) := e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau)$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k + s + 1, s + 1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

$$\beta5_k := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\infty} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

2. Найти оценку коэффициентов разложения  $\beta_{k-1}$  и составляющую методической погрешности, вызванную конечным верхним пределом интегрирования  $\Delta1$ .

$$\beta5_{-1k} := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \int_0^{\tau_{\max}} P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\Delta^1 \beta_{5_k} := \beta_{5_{-1_k}} - \beta_{5_k}$$

$$\Delta^1 \beta_{5_k} =$$

0.00174
0.0027
-0.00127
-0.00453
-0.00032
0.00581
0.00304
-0.00596
-0.00655
0.00431
0.01011
-0.00042
-0.01275
-0.00615
0.0124
0.01452

3. Найти оценку коэффициентов разложения  $\beta_{k\_2}$  и составляющую методической погрешности, вызванную дискретизацией КФ и необходимостью численного интегрирования  $\Delta^2 \beta$ .

MethodInt :=

$$\text{func}(k, dt, J) := \rho_X(dt \cdot J) \cdot P7(k, dt \cdot J, \gamma)$$

Реализация методов численного интегрирования.

Метод прямоугольников.

```

IntP(dt, J, k) :=
    temp ← 0
    for i ∈ 1..J - 1
        temp ← temp + func(k, dt, i)
    temp ← temp · dt
    temp

```

Метод трапеций.

```

IntT(dt,J,k) :=
  temp ← 0
  for i ∈ 1..J - 2
    temp ← temp + func(k,dt,i)
  temp ← temp +  $\frac{(\text{func}(k,dt,0) + \text{func}(k,dt,J - 1))}{2}$ 
  temp ← temp·dt
  temp

```

Метод Ньютона.

```

IntN(dt,J,k) :=
  i ← 0
  temp ← 0
  while i ≤ J - 4
    temp ← temp + (func(k,dt,i) + 3 func(k,dt,i + 1) + 3 func(k,dt,i + 2) + func(k,dt,i + 3))
    i ← i + 3
  temp ← temp·dt· $\frac{3}{8}$ 
  temp

```

Метод Симпсона.

```

IntS(dt,J,k) :=
  i ← 1
  temp ← 0
  while i ≤ J - 2
    temp ← temp + 4 func(k,dt,i)
    i ← i + 2
  i ← 2
  while i ≤ J - 3
    temp ← temp + 2 func(k,dt,i)
    i ← i + 2
  temp ←  $\frac{(\text{temp} + \text{func}(k,dt,0) + \text{func}(k,dt,J - 1)) \cdot dt}{3}$ 
  temp

```

$$\text{Integ}(\text{dt}, \text{J}, \text{k}) := \begin{cases} \text{IntP}(\text{dt}, \text{J}, \text{k}) & \text{if MethodInt} = 1 \\ \text{IntT}(\text{dt}, \text{J}, \text{k}) & \text{if MethodInt} = 2 \\ \text{IntN}(\text{dt}, \text{J}, \text{k}) & \text{if MethodInt} = 3 \\ \text{IntS}(\text{dt}, \text{J}, \text{k}) & \text{if MethodInt} = 4 \end{cases}$$

$$\beta 5\_2_k := 2\gamma \cdot (k + 1) \cdot \text{Integ}(\Delta \tau, \text{Nx}, \text{k})$$

$$\Delta^2 \beta 5_k := \beta 5\_2_k - \beta 5\_1_k$$

$$\Delta^2 \beta 5_k =$$

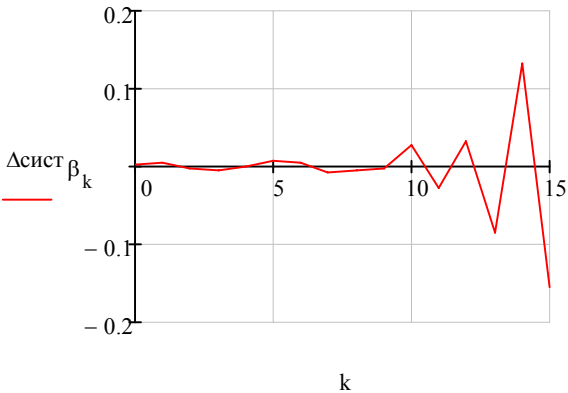
0.00068
0.00116
-0.00055
-0.00156
-0.00063
0.00238
0.0012
-0.00266
0.00082
-0.00624
0.01792
-0.02777
0.04449
-0.07804
0.12012
-0.16853

4. Найти систематическую составляющую методической погрешности  $\Delta_{\text{сист}} \beta$ .

$$\Delta_{\text{сист}} \beta_k := \Delta^1 \beta_{5_k} + \Delta^2 \beta_{5_k}$$

$$\Delta_{\text{сист}} \beta_k =$$

0.00242
0.00386
-0.00181
-0.00609
-0.00095
0.00819
0.00424
-0.00862
-0.00573
-0.00194
0.02803
-0.02819
0.03174
-0.08419
0.13252
-0.15401



# **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ 13. «ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НА УВЕЛИЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ»**

**Цель работы:** изучение погрешностей аппроксимации корреляционных функций ортогональными функциями.

1. Записать выражения, необходимые для дальнейшего расчета в соответствии с заданной ортогональной функцией и выбранным видом корреляционной функции.

$$\lambda := 1$$

$$\omega := 3$$

$$m := 12$$

$$k := 0..m$$

$$\Delta_t := \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{8 \cdot 0.02}{\sqrt{\left| \left( \frac{\omega}{\lambda} \right)^2 - 1 \right|}}$$

$$\gamma(m) := \frac{0.4}{(m+1) \cdot \Delta_t}$$

$$P7(k, \tau, \gamma) := \sum_{s=0}^k \left[ \text{combin}(k, s) \cdot \text{combin}(k+s+1, s+1) \cdot (-1)^s \cdot e^{-(s+1) \cdot \gamma \cdot \tau} \right]$$

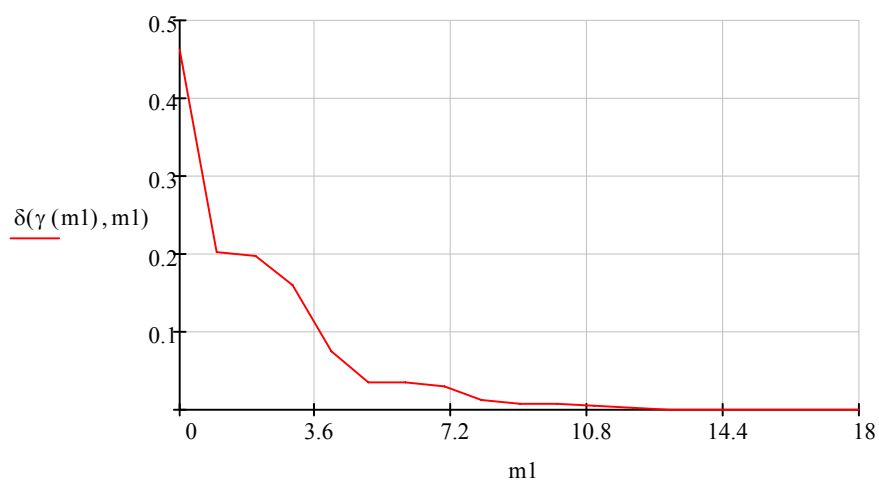
$$\beta5(k, \gamma) := 2\gamma \cdot (k+1) \cdot \int_0^\infty P7(k, \tau, \gamma) \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \, d\tau$$

$$\tau4 := \frac{2 \cdot \lambda^2 + \omega^2}{4 \cdot \lambda \cdot (\lambda^2 + \omega^2)}$$

$$\delta(\gamma, m) := 1 - \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau4} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{(\beta5(k, \gamma))^2}{k+1}$$

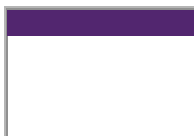
2. Построить зависимость  $\delta_{\min}$  от параметра  $m$  при заданном параметре масштаба.

$m1 := 0..18$



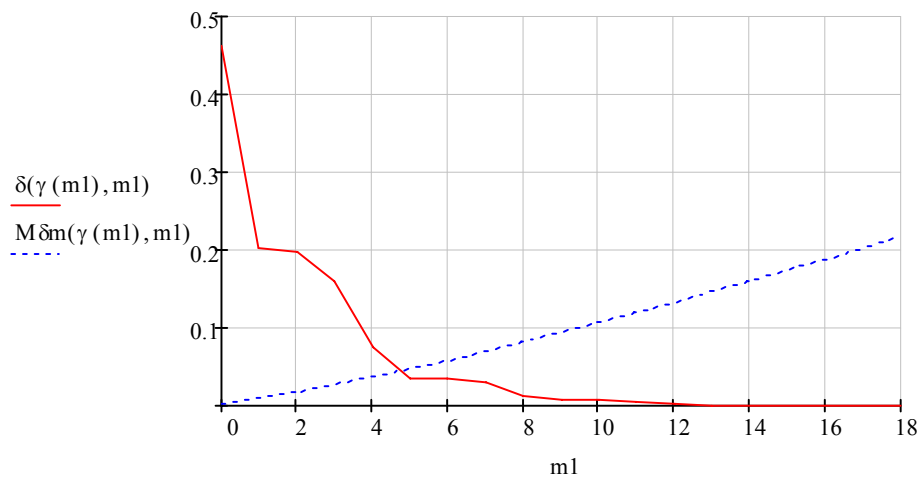
3. Построить зависимость  $M[\delta m]$  от параметра  $m$  при заданном параметре  $\gamma_k$ .

$gk :=$



$$\gamma_k := \begin{cases} 0.005 & \text{if } gk = 1 \\ 0.01 & \text{if } gk = 2 \\ 0.02 & \text{if } gk = 3 \\ 0.05 & \text{if } gk = 4 \\ 0.1 & \text{if } gk = 5 \end{cases}$$

$$M\delta m(\gamma, m) := \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau_4} \cdot \sum_{k=0}^m \frac{\gamma_k}{k+1}$$



4. Построить зависимость  $M[\delta]$  от параметра  $m$  при заданном параметре  $\gamma_k$ .

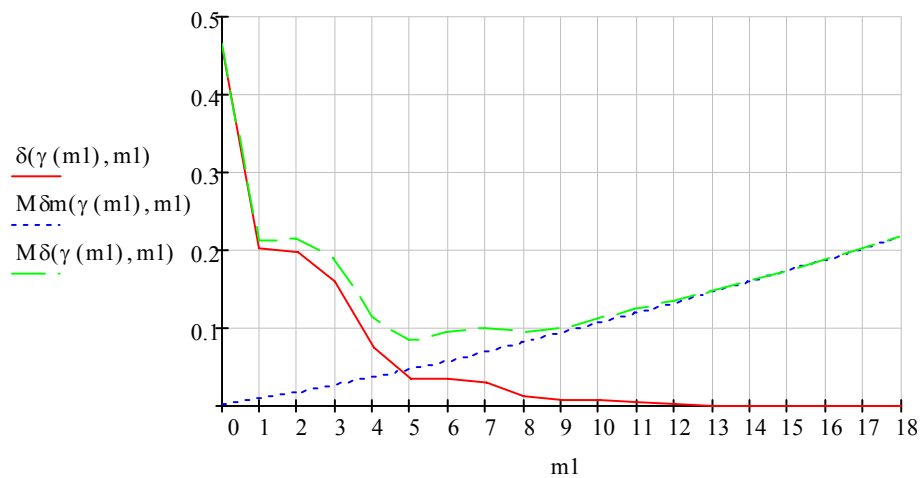
$$g_k :=$$

$$\gamma_k := \begin{cases} 0.005 & \text{if } g_k = 1 \\ 0.01 & \text{if } g_k = 2 \\ 0.02 & \text{if } g_k = 3 \\ 0.05 & \text{if } g_k = 4 \\ 0.1 & \text{if } g_k = 5 \end{cases}$$

$$\delta(\gamma, m) := 1 - \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau_4} \cdot \sum_{k=0}^{\text{trunc}(m)} \frac{(\beta_5(k, \gamma))^2}{k+1}$$

$$M\delta m(\gamma, m) := \frac{1}{2 \cdot \gamma \cdot \tau_4} \cdot \sum_{k=0}^{\text{trunc}(m)} \frac{\gamma_k}{k+1}$$

$$M\delta(\gamma, m) := \delta(\gamma, m) + M\delta m(\gamma, m)$$



5. Построить зависимость  $m_{\text{opt}}$  от параметра  $\gamma_k$ .

$$M\delta(\gamma, m_2) := \delta(\gamma, m_2) + M\delta m(\gamma, m_2)$$

$$m_2 := 12$$

Given

$$M\delta m(\gamma(m_2), m_2) = \delta(\gamma(m_2), m_2)$$

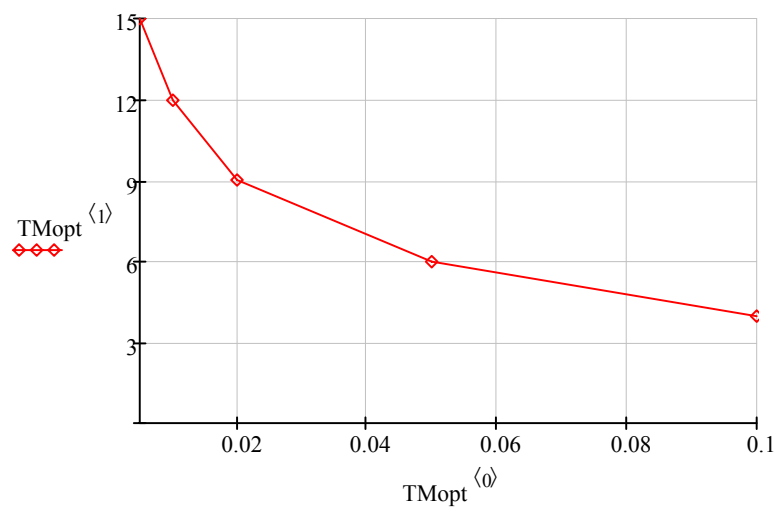


Find(m2) = 5.941

m3 := trunc(5.941)

m3 = 5

$$\text{TMopt} := \begin{pmatrix} 0.005 & 15 \\ 0.01 & 12 \\ 0.02 & 9 \\ 0.05 & 6 \\ 0.1 & 4 \end{pmatrix}$$



## КРАТКИЕ БИОГРАФИИ МАТЕМАТИКОВ

## ГИЛЬБЕРТ Давид (David Hilbert)



Гильберт Давид (23.1.1862 – 14.2.1943) - немецкий математик. Родился в Велау, близ Кёнигсберга. Окончил Кёнигсбергский университет, в 1893-1895 г.г. профессор там же, в 1895-1930 г.г. профессор Гёттингенского университета, до 1933 г. продолжал читать лекции в университете, после прихода гитлеровцев к власти в Германии (1933) жил в Гёттингене в стороне от университетских дел.

Исследования Гильберта оказали большое влияние на развитие многих разделов математики, а его деятельность в Гёттингенском университете в значительной мере содействовала тому, что Гёттинген в 1-й трети XX в. являлся одним из основных мировых центров математической мысли.

Научная биография Д. Гильберта резко распадается на периоды, посвященные работе в какой-либо одной области математики: а) теория инвариантов (1885-1893); б) теория алгебраических чисел (1893-1898); в) основания геометрии (1898-1902); г) принцип Дирихле и примыкающие к нему проблемы вариационного исчисления и дифференциальных уравнений (1900-1906); д) теория интегральных уравнений (1900-1910); е) решение проблемы Варинга в теории чисел (1908-1909); ж) основы математической физики (1910-1922); з) логической основы математики (1922-1939).

В теории инвариантов исследования Д. Гильберта явились завершением периода бурного развития этой области математики во 2-й половине XIX в. Им доказана основная теорема о существовании конечного базиса системы инвариантов. Работы Д. Гильберта по теории алгебраических чисел преобразовали эту область математики и стали исходным пунктом её последующего развития. Данное Д. Гильбертом решение проблемы Дирихле положило начало разработке т. н. прямых методов в вариационном исчислении. Построенная Д. Гильбертом теория интегральных уравнений с симметричным ядром составила одну из основ современного функционального анализа и особенно спектральной теории линейных операторов. Основания геометрии Д. Гильберта (1899) стали образцом для дальнейших работ по аксиоматическому построению геометрии.

К 1922 г. у Д. Гильберта сложился значительно более обширный план обоснования всей математики путём её полной формализации с последующим «метаматематическим» доказательством непротиворечивости формализованной математики.

Два тома «Оснований математики», написанных Д. Гильберт совместно с П. Бернайсом, в которых эта концепция подробно развивается, вышли в 1934 г. и 1939 г. Считая с логической точки зрения необходимой полную формализацию математики, Д. Гильберт в то же время верил в силу творческой математической интуиции.

Он был большим мастером в высшей степени наглядного изложения математических теорий. В этом отношении замечательна «Наглядная геометрия», написанная Д. Гильбертом совместно с С. Кон-Фоссеном. Д. Гильберт умер 14 февраля 1943 г. в Гёттингене [58].

**ДИРИХЛЕ Петер Густав Лежен (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet)**

Дирихле Петер Густав Лежен (13.2.1805 – 5.5.1859) - немецкий математик. Родился в Дюрене. В 1822-1827 г.г. был домашним учителем в Париже. Входил в кружок молодых ученых, которые группировались вокруг Ж. Фурье. В 1827 г. занял место доцента в Бреславе; с 1829 г. работал в Берлине. В 1831-1855 г.г. - профессор Берлинского университета, после смерти К. Гаусса (1855 г.) - Гёттингенского университета. Сделал ряд крупных открытий в теории чисел; установил формулы для числа классов бинарных квадратичных форм с заданным определителем и доказал теорему о бесконечности количества простых чисел в арифметической прогрессии из целых чисел, первый член и разность которой взаимно просты. К решению этих задач применил аналитические функции, названные функциями (рядами) Дирихле. Создал общую теорию алгебр, единиц в алгебраическом числовом поле. В области математического

анализа впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций, что послужило обоснованием для многих дальнейших исследований. Значительны труды Дирихле в механике и математической физике, в частности в теории потенциала. С именем Дирихле связаны задача, интеграл (ввел интеграл с ядром Дирихле), принцип, характер, ряды. Лекции Дирихле имели огромное влияние на выдающихся математиков более позднего времени, в том числе на Г. Римана, Ф. Эйзенштейна, Л. Кронекера, Ю. Дедкинда [59].

**ЛАГЕРР Эдмон Николя (Edmond-Nicolas Laguerre)**

Лагерр Эдмон Николя (9.04.1834 – 14.08.1886) - французский математик. Первую известность ему дали еще некоторые ученические его работы. В 1853 г. он поступил в Ecole Polytechnique, откуда поступил на службу в артиллерию. В 1864 г. Лагерр был назначен репетитором в Ecole polytechnique.

В 1885 г. академия наук в Париже избрала его членом геометрического отдела, на место Серре, а немного спустя Бертран избрал его своим заместителем по кафедре физики в College de France.

Первоначальные работы его имели целью найти конкретное изображение мнимых точек на плоскости и в пространстве; он первый уяснил важную роль площади сферического треугольника в сферической геометрии и распространил на все алгебраические кривые теорию фокусов. Затем он изучал подобие форм, нашел две новые системы координат, из которых в одной

"смешанное уравнение (equation mixte)", как он это называл, показывало свойства всех касательных, которые можно провести к кривой из внешней точки. В то же время он указал несколько новых свойств кривых и поверхностей аналагматических, распространил на гиперэллиптические функции теорему Понсле и на поверхности второго порядка теорему Иохимсталя. В 1867 г. Лагерр опубликовал в "Journal de l'Ecole Polytechnique" замечательный мемуар: "Sur le Systemes lineaires". Немного позже он создал геометрию направления. Затем, обратившись к алгебраическим уравнениям и найдя недостаточными методы Штурма и Ньютона, он еще более упростил объяснение Декартова правила знаков, применяя его как к многочленам, так и к бесконечным рядам; нашел способ отделять мнимые корни и делать с ними вычисления; показал, что можно привести расходящийся ряд в расходящуюся непрерывную дробь.

Эти и другие труды его составляют около полутора десятка оригинальных мемуаров, появлявшихся в "Nouvelles Annales de mathematiques", "Comptes rendus de l'Academie de sciences de Paris", "Bulletin de la Societe philomatique", "Bulletin de la Societe mathematique" и др. Отдельно были напечатаны только "Note sur la resolution des equations numeriques" (П. 1880); "Theorie des equations numeriques" (П., 1884); "Recherches sur la geometrie de direction" (П., 1885).

В 1887 г. академия наук воздала ему посмертную честь, присудив ему премию Petit d'Ormy. Ср. "Notice sur les travaux mathematiques de M. Laguerre" (П., 1875 и 1884); Poincare, "Notice sur Laguerre" (П., 1887); "Comptes rendus de l'Acad. des sciences" (1886) [60].

**ЛЕЖАНДР Адриен Мари (Adrien-Marie Legendre)**

Лежандр Адриен Мари (18.9.1752 – 10.1.1833) - французский математик, профессор Политехнической школы, чл. Парижской АН (1785). Родился в Париже. Лежандр обосновал и развил теорию геодезических измерений, сделал значительный вклад в тригонометрию на поверхности сфероида. Он сформулировал теорему о том, что сферический треугольник, стороны которого в сравнении с радиусом сферы так малы, что сферический излишек достигает всего нескольких градусов, можно вычислять как плоский треугольник с теми самыми сторонами, вычтя из каждого его угла треть сферического излишка. Одновременно с К.Ф. Гауссом, но независимо от него, Лежандр разработал метод вычисления наиболее вероятнейших результатов совокупности наблюдений, известный в науке как метод наименьших

квадратов. Ему также принадлежит ряд фундаментальных исследований по математическому анализу и теории чисел. В 1783 г., определяя компоненту силы притяжения эллипсоида вращения в направлении радиуса-вектора, открыл многочлены, получившие название полиномов Лежандра, и доказал их важнейшие свойства. В вариационном исчислении Лежандр установил признаки существования экстремумов. Его двухтомный труд "Теория чисел", третье издание которого вышло в 1830 г., был самым полным изложением теории чисел в то время. Первая из его четырех частей посвящена теории непрерывных дробей, которую впоследствии Лежандр использовал для решения неопределенных уравнений. В следующих двух частях рассматриваются общие свойства чисел, доказывается закон взаимности квадратичных вычетов, по которым определяются делители целых чисел. В четвертой части "Теории чисел" освещается вопрос о количестве простых чисел, которые не превышают данного числа, а во втором издании этого труда автор приводит и свою знаменитую эмпирическую формулу

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366}, \quad \pi(x) - \text{число простых чисел, не превосходящих } x, \text{ найденную в 1798 г..}$$

В последующих изданиях (1808, 1816, 1825) он помещает доказательство великой теоремы Ферма для  $n = 5$ , которое нашел одновременно с П. Дирихле. В 1794 г. Лежандр издал учебник по элементарной геометрии под названием "Начала геометрии". В этом учебнике, в отличие от "Начал" Евклида, осуществлена алгебраизация и арифметизация геометрии, а также используются элементы учения о симметрии. По образцу "Начал геометрии" Лежандра создавались все учебники по элементарной геометрии, в частности в России. Лежандру принадлежит одна из попыток доказать постулат о параллельных [61].

**РОДРИГ Бенжамен Оленд (Benjamin Olinde Rodrigues)**



Родриг Бенжамен Оленд (16.10.1794 – 26.12.1851) - французский математик и экономист. Родился в португальской еврейской семье в Бордо. Окончил Высшую нормальную школу в Париже. В то время евреям было запрещено посещать *École Polytechnique* – самую престижную школу в Париже, поэтому углубленным изучением математики О. Родригу приходилось заниматься самостоятельно.

В 1816 г. О. Родриг получает докторскую степень по математике. Результаты его диссертации содержат так называемую формулу Родрига.

После выпуска Родриг становится банкиром. О. Родриг состоял в закрытой организации называемой «Comte de Saint-Simon». В 1825 г. после смерти лидера данной организации продолжает его идеи – «Saint-Simonianism». О. Родриг публикует ряд работ по политике, социальным реформам и банковскому делу. В

1840 г. публикует результаты по группам преобразований, однако они были проигнорированы и лишь не так давно стали использоваться некоторые из них.

О. Родриг знаменит двумя основными результатами: формула вращения векторов Родрига и формула представления ортогональных многочленов, позже названная формулой Родрига благодаря усилиям адвоката Эдварда Хейна, который доказал, что О. Родриг получил данную формулу раньше, чем Шарль Эрмит. В 1851 г. О. Родриг умер в Париже [62, 63, 64].

**СОНИН Николай Яковлевич**

Сонин Николай Яковлевич (10 февраля 1849 – 14 февраля 1915) – русский математик. Образование получил в Москве, в 4-й гимназии и в университете по физико-математическому факультету (1869). Был оставлен при Университете и в 1871 г. защитил диссертацию на степень магистра чистой математики под названием: "О разложении функций в бесконечные ряды" (V т. "Матем. сборн."). Диссертация эта посвящена объединению и обобщению результатов, полученных Гейне и К. Нейманом относительно разложения дроби  $1/(a - z)$  по сферическим и цилиндрическим функциям.

В 1873 - 1877 г.г. выезжал в командировку за границу, где слушал лекции Ж. Лиувилля, Ш. Эрмита, Ж. Бертрана, Ж. Серре, Ж. Дарбу.

В 1874 г. удостоен степени доктора математики за диссертацию: "Об интегрировании уравнений с частными производными второго порядка" (VII т. "Матем. Сборн."), переведенную на немецкий язык проф. Энгелем в "Mathem. Ann." 1897 г. В этой диссертации впервые решен вопрос о существовании общего интеграла первого порядка и приведен в окончательную форму способ интеграции, предложенный Дарбу.

С 1872 г. состоял на службе в Варшавском университете, сначала в должности доцента, потом (1877) экстраординарного и, наконец (1879), ординарного профессора.

В 1890 г. получил от Академии наук премию имени В. Я. Буняковского за представленный сборник статей, в 1891 г. избран членом-корреспондентом Академии, с 1893 г. избран ординарным академиком на место В. Я. Буняковского.

Первый труд: "О дифференцировании с произвольным указателем" был сообщен в 1869 г. на II съезде русских естествоиспытателей и врачей в Москве ("Матем. Сборн.", т. VI). В статье "Recherches sur les fonctions cylindriques" ("Mathematische Annalen", 1879) выведены замечательные прерывные интегралы с цилиндрическими функциями и выполнено интегрирование гипергеометрического уравнения при помощи цилиндрических функций. В статье "О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам" ("Mem. de l'Acad. de St.-Petersb." 1898) указано происхождение и истинное место в теории определенных интегралов некоторым неравенствам, выведенным П. Л. Чебышевым, которые к тому же значительно обобщены.

Основные научные результаты Сонины Н.Я. в области математики касаются теории различных специальных функций: гамма-функций, цилиндрических функций, полиномов Бернулли, ортогональных многочленов и т.д. В мемуаре "О некоторых неравенствах, касающихся определенных интегралов" разработал метод ортогонализации системы функций. Результаты по теории ортогональных многочленов получил большей частью в связи с приближенным вычислением определенных интегралов.

В работах о дополнительных членах формул Эйлера и Стирлинга впервые выведены низшие пределы величин этих дополнительных членов в различных формах, одна из которых обязана своим происхождением вызову, сделанному автору по этому предмету знаменитым парижским академиком Эрмитом [65].

**ФУРЬЕ Жан Батист Жозеф (Jean Baptiste Joseph Fourier)**

Фурье Жан Батист Жозеф (21 марта 1768, Осер, Франция – 16 мая 1830, Париж) – французский математик и физик. Родился в Осере в семье портного. В 9 лет потерял обоих родителей. Сироту устроили в Военную школу при бенедиктинском монастыре. В 1789 г. приехал в Париж, чтобы представить работу о численном решении уравнений любой степени, но она затерялась во время революции.

Революция пришла раньше, чем он смог решить, кем ему стать – монахом, военным или математиком. Фурье вернулся в Осер и стал преподавать в школе, где прежде учился. Он активно содействовал новой власти, и Фурье пригласили в Нормальную школу, организованную Конвентом для подготовки преподавателей (1794). Вскоре школу закрыли, но он успел обратить на себя внимание видных учёных (Лагранжа, Лапласа и Монжа).

В 1795-1798 г.г. преподавал в Политехнической школе. По отзывам слушателей, лекции Фурье были блестящими. В своих лекциях Фурье излагает теорему о числе вещественных корней в заданном интервале (опубликована в 1820 г.). Позднее его результаты обобщили швейцарец Ж.Ш.Штурм (работавший в Париже) и Коши.

В 1798 г. Наполеон берёт Фурье, Монжа и Бертолле в свой Египетский поход, в составе Легиона культуры.

В 1801 г. Фурье возвращается во Францию и назначается префектом департамента Изер. Занимается осушением болот. Пишет "Математическую теорию тепла".

В 1808 г. Фурье получает от Наполеона титул барона и награждается орденом Почётного легиона.

В 1812 г. Фурье получает Большую премию Академии за аналитическую теорию теплопроводности, несмотря на нестрогие доказательства. Впрочем, полная строгость была достигнута только в эпоху Гильберта. Свои методы (ряды и интегралы Фурье) он использовал в теории распространения тепла. Но вскоре они стали исключительно мощным инструментом математического исследования самых разных задач – особенно там, где есть волны и колебания. А этот круг чрезвычайно широк – астрономия, акустика, теория приливов, радиотехника и др.

В период «Ста дней» (1815 г.) Фурье переходит на сторону императора. После Реставрации отстранён от должности префекта и бедствует. Возвращается в Париж, где некоторое время работал директором Статистического бюро.

В 1817 г. Академия, вопреки давлению Бурбонов, избирает Фурье своим членом (первая попытка в 1816 году не удалась, король Людовик XVIII отменил избрание). Фурье становится одним из самых влиятельных академиков, и в 1822 г. его избирают пожизненным секретарём.

В 1822 г. наконец выходит в свет завершающий классический трактат "Математическая теория тепла" (*Theorie analytique de la chaleur*). «Великой математической поэмой» назвал этот труд лорд Кельвин.

**Научные достижения:**

- Доказал теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих между данными пределами (Теорема Фурье 1796).



- Исследовал, независимо от Ж. Мурайле, вопрос об условиях применимости разработанного Исааком Ньютоном метода численного решения уравнений (1818).
- Монографии «Аналитическая теория тепла», в которой был дан вывод уравнения теплопроводности в твёрдом теле, и разработка методов его интегрирования при различных граничных условиях. Метод Фурье состоял в представлении функций в виде тригонометрических рядов Фурье.
- Нашёл формулу представления функции с помощью интеграла, играющую важную роль в современной математике.
- Доказал, что всякую произвольно начерченную линию, составленную из отрезков дуг разных кривых, можно представить единым аналитическим выражением.
- В 1823 г. независимо от Эрстеда открыл термоэлектрический эффект, показал, что он обладает свойством суперпозиции, создал термоэлектрический элемент [66].

### ЧЕБЫШЕВ Пафнутий Львович



Русский математик и механик, адъюнкт (1853), с 1856 г. экстраординарный, с 1859 г. - ординарный академик Петербургской АН (26 мая 1821 – 8 декабря 1894). Родился в с. Окатово Калужской губернии, ныне Калужской области.

Первоначальное образование получил дома; в 16 лет поступил в Московский университет и окончил его в 1841 г. В 1846 г. при Московском университете защитил магистерскую диссертацию. В 1847 г. переехал в Петербург, где в том же году защитил диссертацию при университете и начал чтение лекций по алгебре и теории чисел. В 1849 г. защитил докторскую диссертацию, удостоенную в том же году Петербургской АН Демидовской премии; в 1850 г. стал профессором Петербургского университета. Длительное время принимал участие в работе артиллерийского отделения военно-учёного комитета и учёного комитета Министерства народного просвещения. В 1882 г. прекратил чтение лекций в Петербургском университете и, выйдя в отставку, целиком занялся научной работой.

Чебышев П.Л. - основатель Петербургской математической школы, наиболее крупными представителями которой были А.Н. Коркин, Е.И. Золотарев, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Д.А. Граве.

Характерные черты творчества Чебышева П.Л. – разнообразие областей исследования, умение получить посредством элементарных средств большие научные результаты и неизменный интерес к вопросам практики.

Исследования Чебышева П.Л. относятся к теории приближения функций многочленами, интегральному исчислению, теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов и многим другим разделам математики и смежных областей знания. В каждом из упомянутых разделов Чебышев П.Л. сумел создать ряд основных, общих методов и выдвинул идеи, наметившие ведущие направления в их дальнейшем развитии. Стремление увязать проблемы математики с принципиальными вопросами естествознания и техники в значительной мере определяет его своеобразие как учёного. Многие открытия Чебышева П.Л. навеяны прикладными интересами. Это неоднократно подчёркивал и сам Чебышев П.Л., говоря, что в создании новых методов исследования «... науки находят себе верного руководителя в практике» и что «... сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования...» (Полн. собр. соч., т. 5, 1951, с. 150).

В теории вероятностей Чебышеву П.Л. принадлежит заслуга систематического введения в рассмотрение случайных величин и создание нового приёма доказательства предельных теорем теории вероятностей - т. н. метода моментов (1845, 1846, 1867, 1887). Им был доказан закон больших чисел в весьма общей форме. При этом его доказательство поражает своей простотой и элементарностью. Исследование условий сходимости функций распределения сумм независимых случайных величин к нормальному закону Чебышев П.Л. не довёл до полного завершения. Однако посредством некоторого дополнения методов Чебышева П.Л. это удалось сделать А.А. Маркову. Работы Чебышева П.Л. по теории вероятностей составляют важный этап в её развитии, кроме того, они явились базой, на которой выросла русская школа теории вероятностей, вначале состоявшая из непосредственных учеников Чебышева П.Л.

В теории чисел Чебышев П.Л., впервые после Евклида, существенно продвинул (1849, 1852) изучение вопроса о распределении простых чисел. Он доказал, что функция  $\pi(x)$  – число простых чисел, не превосходящих  $x$ , удовлетворяет неравенствам  $a \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b \frac{x}{\ln x}$ , где  $a < 1$  и  $b > 1$  – вычисленные Чебышевым П.Л. постоянные ( $a = 0,921$ ,  $b = 1,06$ ). Исследование расположения простых чисел в ряду всех целых чисел привело Чебышева П.Л. также к исследованию квадратичных форм с положительными определителями. Работа Чебышева П.Л., посвященная приближению чисел рациональными числами (1866), сыграла важную роль в развитии теории диофантовых приближений.

Наиболее многочисленны работы Чебышева П.Л. в области математического анализа. Ему была, в частности, посвящена диссертация на право чтения лекций, в которой Чебышев П.Л. исследовал интегрируемость некоторых иррациональных выражений в алгебраических функциях и логарифмах. Интегрированию алгебраических функций Чебышев П.Л. посвятил также ряд других работ.

Важное направление исследований по математическому анализу составляют его работы по построению общей теории ортогональных многочленов. Поводом к её созданию явилось параболическое интерполирование способом наименьших квадратов. К этому же кругу идей примыкают исследования Чебышева П.Л. по проблеме моментов и по квадратурным формулам. Имея в виду сокращение вычислений, Чебышев П.Л. предложил (1873) рассматривать квадратурные формулы с равными коэффициентами.

Чебышев П.Л. – основоположник так называемой конструктивной теории функций, основной составляющей элемент которой – теория наилучшего приближения функций. Простейшая постановка задачи Чебышева П.Л. такова (1854): дана непрерывная функция  $f(x)$ ; среди всех многочленов степени  $x$  найти такой  $P(x)$ , чтобы в данном промежутке  $[a, b]$  выражение  $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|$  было возможно меньшим. Помимо указанного равномерного наилучшего приближения, Чебышев П.Л. рассматривал также квадратическое приближение, а помимо приближений алгебраическими многочленами, – приближение посредством тригонометрических полиномов и с помощью рациональных функций.

Теория машин и механизмов была одной из тех дисциплин, которыми Чебышев П.Л. систематически интересовался всю жизнь. Особенно многочисленны его работы, посвященные синтезу шарнирных механизмов, в частности параллелограмму Уатта (1861, 1869, 1871, 1879 и др.). Изучение параллелограмма Уатта и стремление усовершенствовать его натолкнуло Чебышева П.Л. на постановку задачи о наилучшем приближении функций.

Чебышев П.Л. оставил яркий след в развитии математики и собственными исследованиями, и постановкой соответствующих вопросов перед молодыми учёными. Так, по его совету А. М. Ляпунов начал цикл исследований по теории фигур равновесия вращающейся жидкости, частицы которой притягиваются по закону всемирного тяготения.

Труды Чебышева П.Л. ещё при жизни нашли широкое признание не только в России, но и за границей. Он был избран членом Берлинской АН (1871), Болонской АН (1873), Парижской АН (1874; член-корреспондент 1860), Лондонского королевского общества (1877), Шведской АН (1893) и почётным членом многих других русских и иностранных научных обществ, академий и университетов.

В честь Чебышева П.Л. АН СССР учредила в 1944 премию за лучшие исследования по математике [67, 68].

## ЭЙЛЕР Леонард (Leonhard Euler)



Леонард Эйлер (15.04.1707 – 18.09.1783) - немецкий и русский математик, механик и физик. Родился 15 апреля 1707 г. в Базеле. Учился в Базельском университете (1720-1724), где его учителем был Иоганн Бернулли. В 1722 г. получил степень магистра искусств. В 1727 г. переехал в Санкт-Петербург, получив место адъюнкт-профессора в недавно основанной Академии наук и художеств. В 1730 г. стал профессором физики, в 1733 г. - профессором математики. За 14 лет своего первого пребывания в Петербурге Эйлер опубликовал более 50 работ. В 1741-1766 г.г. работал в Берлинской академии наук под особым покровительством Фридриха II и написал множество сочинений, охватывающих по существу все разделы чистой и прикладной математики. В 1766 г. по приглашению Екатерины II Эйлер возвратился в Россию. Вскоре после прибытия в Санкт-Петербург полно-

стью потерял зрение из-за катаракты, но благодаря великолепной памяти и способностям проводить вычисления в уме до конца жизни занимался научными исследованиями: за это время им было опубликовано около 400 работ, общее же их число превышает 850.

Труды Эйлера свидетельствуют о необычайной разносторонности автора. Широко известен его трактат по небесной механике "Теория движения планет и комет" ("Theoria motus planetarum et cometarum", 1774), в котором особое внимание уделено теории движения Луны. Автор книг по гидравлике, кораблестроению, артиллерии. В 1739 г. Эйлер создает новую теорию музыки. Образцом популяризации науки является изложение Эйлером наиболее важных проблем естествознания в его "Письмах к одной немецкой принцессе о разных метафизических материях" ("Lettres a une Princesse d'Allemagne", 1768-1772). Работа ученого "Об усовершенствовании стеклянных очковых линз" ("Sur la Perfection des Verres Object des Lunettes", 1747) способствовала созданию ахроматических телескопов.

Наибольшую известность принесли Эйлеру исследования в области чистой математики. Современная тригонометрия с определением тригонометрических функций как отношений и с принятыми в ней обозначениями берет начало с эйлеровского "Введения в анализ бесконечных" ("Introductio in analysin infinitorum", 1748). Предпринятый в этой работе анализ кривых и поверхностей с использованием их уравнений позволяет рассматривать ее как первый учебник аналитической геометрии.

Следующее значительное сочинение Эйлера – "Дифференциальное исчисление" ("Institutiones calculi differentialis", 1755), а затем трехтомное "Интегральное исчисление" ("Institutiones calculi integralis", 1768-1774). Здесь не только рассматриваются разделы математики, вынесенные в названия книг, но и развивается теория обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных. Эйлеру принадлежит первое изложение вариационного исчисления, он является создателем теории специальных функций, известны его работы по теории чисел. Эйлер установил некоторые свойства аналитических функций, применил мнимые величины к вычислению интегралов, тем самым положив начало теории функций комплексного переменного. Умер Эйлер в Санкт-Петербурге 18 сентября 1783 года [69, 70].

### ЭРМИТ Шарль (Charles Hermite)



ЭРМИТ Шарль (24.12.1822 – 14.01.1901) – французский математик. Родился 24 декабря 1822 г. в Дьёзе. Посещал коллеж Генриха IV. В 1841 г. поступил в лицей Людовика Великого, затем в Политехническую школу, которую окончил в 1847 г. С 1848 г. преподавал математику в Коллеж де Франс, с 1870 г. – профессор Высшей нормальной школы и Сорбонны. Член Парижской академии наук с 1856 г., Лондонского королевского общества – с 1873 г. Работы Эрмита посвящены теории чисел, алгебре и теории эллиптических функций. Он показал, как свести общее алгебраическое уравнение пятой степени к виду, разрешимому в эллиптических модулярных функциях. Изучил класс ортогональных многочленов (многочлены Эрмита), создал теорию инвариантов (совместно с Кэли и Сильверстом). Доказал трансцендентность числа  $e$  (1873); позднее немецкий математик Ф.Линдеман доказал методом, аналогичным методу Эрмита, трансцендентность

числа  $\pi$ . Известен труд Эрмита «О решении уравнения пятой степени» (Sur la resolution de l'equation du cinquieme degr, 1858). Умер Эрмит в Париже 14 января 1901 г. [71].

**ЯКОБИ Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob)**

Якоби Карл Густав Якоб (10.12.1804 – 18.02.1851) – немецкий математик. Член Берлинской Академии наук. Брат физика и электротехника Б.С.Якоби. Родился и посещал школу в Потсдаме. В 16 лет поступил в Берлинский университет. Самостоятельно изучал труды Л.Эйлера, П.Лапласа, Ж.Лагранжа и классические языки. В 1825 г., защитив диссертацию по вопросу разложения алгебраических дробей на простейшие, получил степень доктора философии. В 1826-1842 г.г. работал в Кенигсбергском университете, затем принял приглашение на академическую работу в Берлине. В 1827-1843 г.г. – профессор Альбертины, где развил теорию эллиптических функций и провёл важные исследования в области дифференциальных уравнений, аналитической и небесной механики. Якоби – один из создателей теории эллиптических функций. Он ввел и изучил тета-функции и

некоторые другие трансцендентные функции. Применил теорию эллиптических функций к изучению движения волчка, исследованию геодезических линий на эллипсоиде и другим задачам, сделал важные открытия в области теории чисел, линейной алгебры, вариационного исчисления и теории дифференциальных уравнений, в особенности в теории уравнений 1-го порядка с частными производными; исследовал дифференциальные уравнения динамики и дал ряд новых методов их решения; ввел в употребление функциональные определители и указал на их роль при замене переменных в кратных интегралах и при решении уравнений с частными производными; исследовал один из классов ортогональных многочленов, являющихся обобщением многочленов Лежандра. С именем Якоби связаны теоремы, функции (в частности, тета-функции и эллиптические функции), тождества, уравнения, формулы, интеграл, кривая, матрица, детерминант, радикал, символ.

В 30-40-х г.г. XIX в. Якоби поддерживал тесную связь с русскими математиками М. В. Остроградским, М. А. Тихомандрицким. В 1844 г. вернулся в Берлин [72].

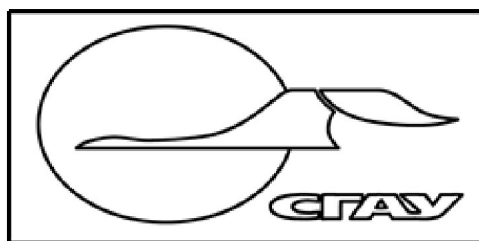
## СПИСОК ТЕМ К ЭКЗАМЕНУ

1. Сигналы и их характеристики. Определение и классификация сигналов. Случайные и детерминированные сигналы. Дискретизация сигналов.
2. Методы представления и преобразования сигналов. Математическое описание сигналов. Динамическое представление сигналов, свертки. Интерполяция, аппроксимация и экстраполяция. Матричное, полиномиальное и Z - представление сигналов.
3. Спектральное представление сигналов. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье. Системы базисных функций. Автокорреляционная функция и энергетический спектр. Свойства спектров мультипликативных базисов.
4. Преобразование Фурье в классических базисах. Системы дельта-функций, единичных функций и функций Котельникова. Тригонометрические системы базисных функций. Системы комплексных экспоненциальных и полиномиальных базисных функций. Преобразования Хартли, Уолша и Хаара.
5. Ортогональные преобразования в обобщенных базисах. Функции и преобразования Виленкина-Крестенсона. Обобщенные функции Крестенсона, Хаара. Теоретико-числовые преобразования. Системы дискретных базисных функций на основе чисел Фибоначчи. Обобщенные преобразования Фурье.
6. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Вычислительная сложность алгоритма. Быстрые алгоритмы вычисления частного спектра, преобразований Уолша, Виленкина-Крестенсона, Хаара. Матричные методы синтеза быстрых преобразований.
7. Цифровые фильтры и их характеристики. Описание цифровых фильтров. Передаточные функции цифровых фильтров и формы их реализации. Частотные и импульсные характеристики фильтров. Классификация фильтров.
8. Методы расчета нерекурсивных и рекурсивных фильтров. Классификация нерекурсивных цифровых фильтров по виду импульсной характеристики. Частотные характеристики нерекурсивных фильтров с симметричной и антисимметричной импульсной характеристикой. Этапы проектирования нерекурсивных фильтров. Оптимизационные и неоптимизационные методы расчета частотных фильтров. Методы расчета рекурсивных цифровых фильтров.

9. Методы аналитического синтеза цифровых фильтров. Синтез оптимальных фильтров. Адаптивные полиномиальные фильтры. Синтез квазиоптимальных полиномиальных фильтров.
10. Спектральные методы синтеза цифровых фильтров. Основы спектральной теории цифровых фильтров. Синтез цифровых фильтров в спектральной области.
11. Понятие непрерывного wavelet-преобразования. Материнские wavelet-ы. Локализирующие свойства и интерпретация, свойства CWT. Дискретизация непрерывного wavelet-a. Применение непрерывного wavelet-преобразования.
12. Дискретное wavelet-преобразование. Матричное описание и свойства DWT. Применение дискретного wavelet-преобразования. Адаптивные ортогональные преобразования.
13. Математическое описание непрерывных изображений. Представление непрерывных изображений, системы преобразования непрерывных преобразований. Детерминированное и вероятностное описание непрерывных изображений. Дискретизация и квантование изображений.
14. Математическое описание дискретных изображений. Векторное представление и линейные преобразования дискретных изображений. Вероятностное описание дискретных изображений.
15. Повышение качества изображения. Линейная фильтрация изображений. Совмещение изображений и линейный прогноз. Математическая морфология и обработка изображений.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»  
(СГАУ)



**СОГЛАСОВАНО**

**УТВЕРЖДАЮ**

Управление образовательных программ

Проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_ / А.В. Дорошин /

\_\_\_\_\_ / В.Н. Матвеев /

" \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

" \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование модуля (дисциплины)

Теория цифровой обработки сигналов и изображений

Цикл, в рамках которого происходит освоение модуля (дисциплины)

М2 Профессиональный цикл

Часть цикла

М2.В.ОД.5 Обязательные дисциплины

Код учебного плана

230100.68-2013-О-П-2г00м

Факультет

Информатики

Кафедра

"Информационные системы и технологии"

Курс

5

Семестр

9

Лекции (СЛ)

54

Семинарские и практические занятия (СП)

36

Лабораторные занятия (СЛР)

0

Экзамен

9

Контроль самостоятельной работы /  
Индивидуальные занятия (КСР / ИЗ)

0

Зачет

Самостоятельная работа (СРС)

72

Всего (Всего с экзаменами)

198

Наименование стандарта, на основании которого составлена рабочая программа:

230100.68 "Информатика и вычислительная техника"

Соответствие содержания рабочей программы, условий ее реализации, материально-технической и учебно-методической обеспеченности учебного процесса по дисциплине всем требованиям государственных стандартов подтверждаем.

Составители:

Куликовских И.М., доцент, к.т.н.

\_\_\_\_\_  
(подпись)

Заведующий кафедрой:

Прохоров С.А., профессор, д.т.н.

\_\_\_\_\_  
(подпись)

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры

"Информационные системы и технологии"

Протокол № \_\_\_\_ от " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

Наличие основной литературы в фондах научно-технической библиотеки (НТБ) подтверждаем:

Директор НТБ

\_\_\_\_\_  
(подпись)

/ \_\_\_\_\_ /  
(расшифровка подписи)

Согласовано:

Декан

\_\_\_\_\_  
(подпись)

/ \_\_\_\_\_ /  
(расшифровка подписи)

# **1 Цели и задачи модуля (дисциплины), требования к уровню освоения содержания**

## **1.1 Перечень развиваемых компетенций**

ОК-6, ПК-1

## **1.2 Цели и задачи изучения модуля (дисциплины)**

Цель и задачи изучения дисциплины:

- ознакомление с базовыми методами и понятиями цифровой обработки сигналов и изображений;
- ознакомление с принципами цифровой обработки сигналов и изображений с использованием мобильных технологий;
- изучение инструментальных средств цифровой обработки сигналов и изображений, реализованных на мобильной платформе;
- ознакомление с принципами оптимизации математических моделей и численных методов в соответствии с требованиями к мобильным приложениям;
- реализация оптимизированных алгоритмов цифровой обработки сигналов и решение прикладных задач.

## **1.3 Требования к уровню подготовки студента, завершившего изучение данного модуля (дисциплины)**

Студенты, завершившие изучение данной дисциплины, должны знать: базовыми методами и понятиями цифровой обработки сигналов и изображений; особенности и принципы цифровой обработки сигналов и изображений с использованием мобильных технологий; принципы оптимизации алгоритмов обработки сигналов и математических моделей.

уметь: использовать инструментальные средства цифровой обработки сигналов, реализованных на мобильной платформе; извлекать исходные сигналы на аппаратно-программном уровне с помощью мобильных технологий; оптимизировать и реализовывать алгоритмы цифрово

й обработки сигналов, создавать мобильные приложения и производить цифровую обработку сигналов посредством данных приложений.

## **1.4 Связь с предшествующими модулями (дисциплинами)**

Для успешного усвоения курса "Цифровая обработка сигналов и изображений" студенты должны знать следующие дисциплины:

- микропроцессорные средства и системы;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- интерфейсы информационно-вычислительных систем;
- теория случайных процессов;- вычислительная математика;
- программирование.

## **1.5 Связь с последующими модулями (дисциплинами)**

Полученные в результате изучения дисциплины знания могут быть применены в дальнейшем при освоении курсов:

- вычислительные системы;
- современные проблемы информатики и вычислительной техники;
- методы распознавания образов и понимания изображений;
- научно-исследовательская работа магистра.

## 2 Содержание рабочей программы (модуля)

Семестр 1		
СЛ 0,2727 54 часов 1,5 ЗЕТ	Активные 0	
	Интерактивные 0	
	Традиционные 1	Сигналы и их характеристики. Определение и классификация сигналов. Случайные и детерминированные сигналы. Дискретизация сигналов.
		Методы представления и преобразования сигналов. Математическое описание сигналов. Динамическое представление сигналов, свертки. Интерполяция, аппроксимация и экстраполяция. Матричное, полиномиальное и Z - представление сигналов.
		Спектральное представление сигналов. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье. Системы базисных функций. Автокорреляционная функция и энергетический спектр. Свойства спектров мультипликативных базисов.
		Преобразование Фурье в классических базисах. Системы дельта-функций, единичных функций и функций Котельникова. Тригонометрические системы базисных функций. Системы комплексных экспоненциальных и полиномиальных базисных функций. Преобразования Хартли, Уолш
		Ортогональные преобразования в обобщенных базисах. Функции и преобразования Виленкина-Крестенсона. Обобщенные функции Крестенсона, Хаара. Теоретико-числовые преобразования. Системы дискретных базисных функций на основе чисел Фибоначчи. Обобщенные преобраз

		Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Вычислительная сложность алгоритма. Быстрые алгоритмы вычисления частного спектра, преобразований Уолша, Виленкина-Крестенсона, Хаара. Матричные методы синтеза быстрых преобразований.
		Цифровые фильтры и их характеристики. Описание цифровых фильтров. Передаточные функции цифровых фильтров и формы их реализации. Частотные и импульсные характеристики фильтров. Классификация фильтров.
		Методы расчета нерекурсивных и рекурсивных фильтров. Классификация нерекурсивных цифровых фильтров по виду импульсной характеристики. Частотные характеристики нерекурсивных фильтров с симметричной и антисимметричной импульсной характеристикой. Этапы проек
		Методы аналитического синтеза цифровых фильтров. Синтез оптимальных фильтров. Адаптивные полиномиальные фильтры. Синтез квазиоптимальных полиномиальных фильтров.
		Спектральные методы синтеза цифровых фильтров. Основы спектральной теории цифровых фильтров. Синтез цифровых фильтров в спектральной области.
		Понятие непрерывного wavelet-преобразования. Материнские wavelet-ы. Локализующие свойства и интерпретация, свойства CWT. Дискретизация непрерывного wavelet-a. Применение непрерывного wavelet-преобразования.
		Дискретное wavelet-преобразование. Матричное описание и свойства DWT. Применение дискретного wavelet-преобразования. Адаптивные ортогональные преобразования.
		Математическое описание непрерывных изображений. Представление непрерывных изображений, системы преобразования непрерывных преобразований. Детерминированное и вероятностное описание непрерывных изображений. Дискретизация и квантование изображений.

		Математическое описание дискретных изображений. Векторное представление и линейные преобразования дискретных изображений. Вероятностное описание дискретных изображений.
		Повышение качества изображения. Линейная фильтрация изображений. Совмещение изображений и линейный прогноз. Математическая морфология и обработка изображений.
СП 0,1818 36 часов 1 ЗЕТ	Активные 1	Основные понятия теории ортогональных многочленов и функций. Определение длительности ортогональные функций. Анализ частотных характеристик.
		Понятие ортогональной модели. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик. Методы определения оптимальных и квазиоптимальных параметров модели.
		Анализ погрешностей оценки коэффициентов разложения ортогональных моделей. Влияние погрешности оценки коэффициентов разложения на увеличение погрешности аппроксимации функциональных характеристик. Анализ методических погрешностей оценки параметров ортогональных
	Интерактивные 0	
	Традиционные 0	
СЛР 0 0 часов 0 ЗЕТ	Активные 1	
	Интерактивные 0	
	Традиционные 0	
КСР 0 0 часов 0 ЗЕТ	Активные 0	
	Интерактивные 0	
	Традиционные 1	
СРС 0,3636 72 часов 2 ЗЕТ	Активные 0	

	Интерактивные 1	Разработка графического интерфейса мобильного приложения для цифровой обработки данных. Реализация механизмов получения и хранения данных.
		Реализация механизмов получения исходных сигналов через использование аппаратных датчиков и функций мультимедиа.
		Реализация оптимизированных алгоритмов анализа временных рядов и численных методов на мобильной платформе.
		Оценка вычислительных затрат на получение конечного результата на разрабатываемом мобильном приложении.
		Решение прикладных задач на разработанном мобильном приложении.
	Традиционные 0	

### **3 Инновационные методы обучения**

1. Использование в качестве лекционного материала как известных методов и понятий, так и новых научных результатов.
2. Разработка индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов.
3. Обсуждение результатов самостоятельной работы на практических занятиях.
4. Реализация анализируемых алгоритмов на мобильной платформе и их оптимизация.

### **4 Технические средства и материальное обеспечение учебного процесса**

1. Класс с проектором и компьютером, работающим под ОС Linux, iOS (Windows).
2. Лекционная аудитория с интерактивной доской.

### **5 Учебно-методическое обеспечение**

#### **5.1 Основная литература**

1. Быстрые алгоритмы многомерного дискретного преобразования Фурье [Текст] : [учеб. пособие] / В. М. Чернов ; Федер. агентство по образованию, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева. - Самара : Изд-во СГАУ, 2007. - 79 с. (40 экз.)
2. Параллельно-рекурсивные методы локальной обработки изображений [Текст] : [учеб. пособие / В. В. Сергеев и др.] ; Федер. агентство по образованию, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева. - Самара : Изд-во СГАУ, 2007. - 115 с. (40 экз.)

#### **5.2 Дополнительная литература**

1. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях [Текст] / [М. А. Басараб и др.] ; под ред. В. Ф. Кравченко. - М. : Физматлит, 2007. - 544 с. (3 экз.)
2. Цифровая обработка сигналов [Текст] / А. Оппенгейм, Р. Шафер ; пер. с англ. С. А. Кулешова под ред. А. Б. Сергиенко. - Изд. 2-е, испр. - М. : Техносфера, 2007. -

### **5.3 Электронные источники и интернет ресурсы**

1. <https://www.coursera.org/course/dsp>

2.

<http://ocw.mit.edu/resources/res-6-008-digital-signal-processing-spring-2011/index.htm>

### **5.4 Методические указания и рекомендации**

Текущий контроль знаний студентов в каждом семестре завершается на отчетном занятии, результатом которого является допуск или недопуск студента к экзамену по дисциплине. Основанием для допуска к экзамену является выполнение и прием индивидуального задания. Неудовлетворительная оценка лишает студента права сдавать экзамен, удовлетворительная - может быть основанием для дополнительного вопроса (задания) на экзамене.

Промежуточный контроль знаний студентов проводят в каждом семестре в виде экзамена. Экзамен проводится согласно положению о текущем и промежуточном контроле знаний студентов, утвержденному ректором университета.

Экзаменационная оценка ставится на основании письменного и устного ответов студента по экзаменационному билету. Экзаменационный билет включает два теоретических вопроса и задачу.